



SPIS TREŚCI NUMERU 2 (393)

Twierdzenie Newtona <i>Waldemar Pompe</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Sprawiedliwa rekrutacja <i>Agnieszka Kaszkowiak</i>	str. 4
Wszechświat ci to obliczy <i>Aleksandra Bej</i> <i>Nadbor Drozd</i>	str. 6
Aktualności	str. 7
δ Konkursy – kulki w sześcianie i czworościanie – siatki kostki czterowymiarowej	str. 8
Klub 44	str.10
Patrz w niebo	str.16
Luty	str.16
Ω Twierdzenie ergodyczne <i>Rafał Sztencel</i>	str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.

Komitet Redakcyjny: prof. dr hab. Andrzej Białynicki-Birula (członek rzeczywisty PAN), prof. dr hab. Bogdan Cichocki, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, dr hab. Armen Edigarian, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, dr hab. Maciej Geller, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Agnieszka Janiuk, prof. dr hab. Wiesław A. Kamiński, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, prof. dr hab. Janusz Matkowski, mgr Andrzej Mąkowski, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Ryszard J. Pawlak, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Grzegorz Sitariski, dr Weronika Śliwa, prof. dr hab. Andrzej Woszczyk, prof. dr hab. Wiesław Żelazko.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Marcin Hauzer, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Mikołaj Korzyński, Tomasz Kwast, Urszula Marciniak, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk. Rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 5450,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-545.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej, Oddział PAP S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-663-87-52, 022-663-11-46)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2007 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2007 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl

Cena prenumeraty w 2007 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5 każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

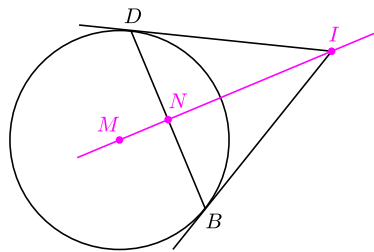
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

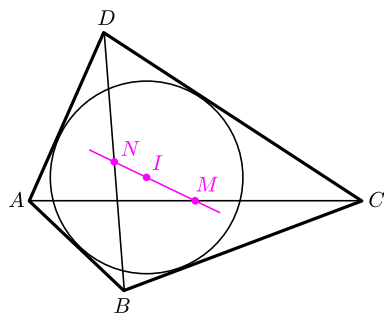
Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:

Pole magnetyczne w galaktykach



Rys. 1



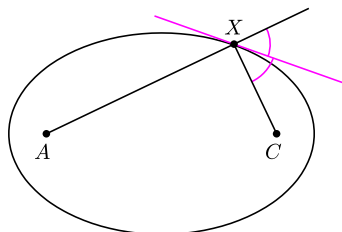
Rys. 2

Przekształcenia afiniczne to te przekształcenia przestrzeni euklidesowej – tutaj płaszczyzny, które proste przeprowadzają na proste. Wynika z tego w szczególności, że proste równoległe przeprowadzają na równoległe, środek odcinka na środek odcinka, a nawet, że ograniczone do prostej są podobieństwami. We współrzędnych kartezjańskich wyrażają się wzorami

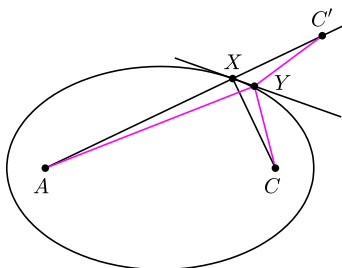
$$x' = ax + by + c, \quad y' = dx + ey + f,$$

gdzie $ae - bd \neq 0$,

z czego wynika także, iż zachowują styczność krzywych i – o ile krzywe są algebraiczne – ich stopień.



Rys. 3



Rys. 4

Zacniemy od porównania dwóch konfiguracji geometrycznych. Na rysunku 1 dany jest okrąg o środku M oraz punkt I leżący na zewnątrz okręgu. Z punktu I poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach B i D . Punkt N jest środkiem odcinka BD .

Z kolei rysunek 2 przedstawia okrąg o środku I wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD .

Pomimo iż konfiguracje te różnią się, to w obu konkluzja jest taka sama: *punkty M, N, I leżą na jednej prostej*. I choć fakt ten jest w pierwszym przypadku oczywisty, w drugim może zdumiewać oraz przysporzyć sporo trudności tym, którzy chcieliby go samodzielnie dowieść. Ta druga, trudniejsza zależność nosi nazwę *twierdzenia Newtona*.

W pracy „wyprowadzimy” pewną niewielką modyfikację twierdzenia Newtona (dla czworokąta $ABCD$ mającego okrąg dopisany zamiast wpisanego), opierając się na prostej obserwacji z rysunku 1. Zmieniając wtedy jedynie słówko „dopisany” na „wpisany”, uzyskamy twierdzenie Newtona. Zabieg ten może budzić wątpliwości, dlatego w dalszej części artykułu podamy ścisły, geometryczny dowód twierdzenia Newtona. Dowód ten będzie opierał się na całkiem innych spostrzeżeniach.

Niech A i C będą ustalonymi punktami, a liczba a ustaloną liczbą większą od odległości punktów A, C . Zbiór takich punktów X , dla których $AX + XC = a$, nazywa się *elipsą o ogniskach A i C* . Część prostej AC zawarta wewnątrz elipsy nosi nazwę *osi głównej elipsy*.

Znanych jest wiele równoważnych definicji elipsy. Jedną z nich, którą wykorzystamy, jest następująca: *Zbiór jest elipsą wtedy i tylko wtedy, gdy jest obrazem okręgu przy pewnym przekształceniu afinicznym*.

Będziemy dalej korzystać z dwóch nietrudnych faktów. Pierwszy z nich to geometryczny opis stycznej do elipsy.

Fakt 1. Jeśli punkt X należy do elipsy o ogniskach A i C , to dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku X trójkąta AXC jest styczna do elipsy w punkcie X (rys. 3).

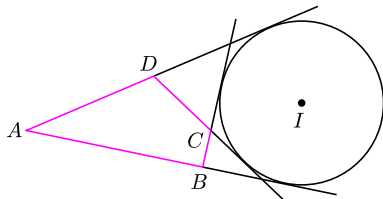
Dowód. Przypuśćmy, że dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku X trójkąta AXC ma z elipsą jeszcze jeden punkt wspólny Y (rys. 4). Niech C' będzie obrazem symetrycznym punktu C względem tej dwusiecznej. Wtedy punkt C' leży na prostej AX . Ponadto $CX = C'X$ oraz $CY = C'Y$. Zatem

$$a = AX + XC = AX + XC' = AC' < AY + YC' = AY + YC = a.$$

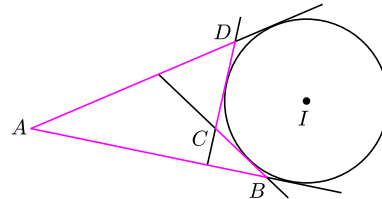
Uzyskaliśmy sprzeczność.

Następny fakt, z którego będziemy korzystać, dotyczy możliwości dopisania okręgu do czworokąta.

Rozważmy na płaszczyźnie cztery proste w położeniu ogólnym. Proste te wyznaczają dwa rodzaje czworokątów: czworokąt wypukły $ABCD$ (rys. 5) oraz czworokąt wklęsły $ABCD$ (rys. 6). Ponadto proste te dzielą płaszczyznę na 11 obszarów, z których dwa są czworokątowe – jeden ograniczony, drugi nieograniczony. Jeśli istnieje okrąg zawarty w nieograniczonej czworokątowej części i styczny do wszystkich czterech prostych, to mówimy, że *do czworokąta $ABCD$ można dopisać okrąg* (rys. 5, 6).



Rys. 5



Rys. 6

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

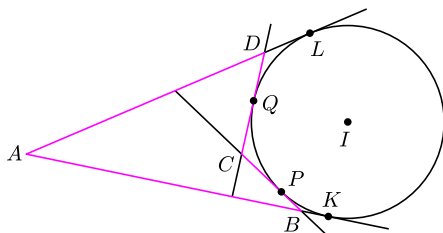
Dla ustalenia uwagi oznaczymy wierzchołki czworokąta (wypukłego lub wklęsłego) tak, jak pokazano na rysunkach 5, 6, tzn. przyjmijmy, że punkt C jest wspólnym wierzchołkiem dwóch czworokątowych obszarów.

Fakt 2. Do czworokąta $ABCD$ (niezależnie od tego, czy jest on wypukły, czy wklęsły) można dopisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

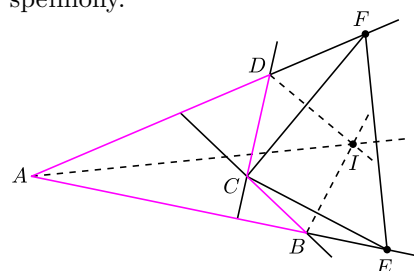
$$(1) \quad AB + BC = AD + DC.$$

Dowód. Ponieważ dowód w obu przypadkach jest podobny, przeprowadzimy go na przykładzie czworokąta wklęsłego (rys. 6).

Założmy najpierw, że istnieje okrąg dopisany do czworokąta $ABCD$ styczny do prostych AB, AD, CB, CD odpowiednio w punktach K, L, P, Q (rys. 7). Wówczas skoro $CP = CQ$, to dowiedziona równość (1) sprowadza się do wykazania, że $AB + BP = AD + DQ$. Ale $BP = BK$ oraz $DQ = DL$, więc wystarczy wykazać, że $AB + BK = AD + DL$. Równość ta jest równoważna warunkowi $AK = AL$, który, oczywiście, jest spełniony.



Rys. 7



Rys. 8

Udowodnimy teraz implikację odwrotną. Założmy, że w czworokącie wklęsłym $ABCD$ zachodzi równość (1). Na prostej AB wybierzmy taki punkt E , że $BC = BE$ oraz punkt B leży pomiędzy punktami A i E (rys. 8). Analogicznie na prostej AD znajdujemy taki punkt F , że $CD = DF$ oraz punkt D leży pomiędzy punktami A i F . Wówczas z równości (1) wynika, że $AE = AF$. Zatem dwusieczne kątów CBE, CDF oraz EAF są jednocześnie symetralnymi odcinków CE, CF oraz EF , czyli przecinają się w jednym punkcie I . Stąd wynika, że odległości punktu I od prostych AB, BC, CD i DA są równe, a więc istnieje okrąg o środku I styczny do wszystkich tych czterech prostych. Ponieważ punkt I znajduje się w nieograniczonej części czworokątowej, więc jest on środkiem okręgu dopisanego do czworokąta $ABCD$.

Wyjaśnimy teraz, jak uzyskać wspomnianą wyżej modyfikację twierdzenia Newtona, korzystając z rysunku 1.

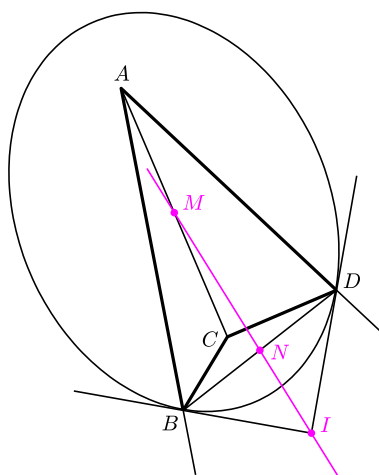
Przekształćmy afinicznie rysunek 1 (dla uproszczenia będziemy oznaczać punkt i jego obraz po przekształceniu afinicznym tą samą literą). Wówczas okrąg przejdzie na elipsę, a jego środek M przejdzie na środek elipsy (rys. 9). Proste IB oraz ID będą po tym przekształceniu styczne do elipsy, a punkt N pozostanie środkiem odcinka BD .

Założmy dodatkowo, że przekształcenie afiniczne pozostawia punkty B i D po przeciwnych stronach osi głównej uzyskanej elipsy, której ogniska oznaczymy przez A i C .

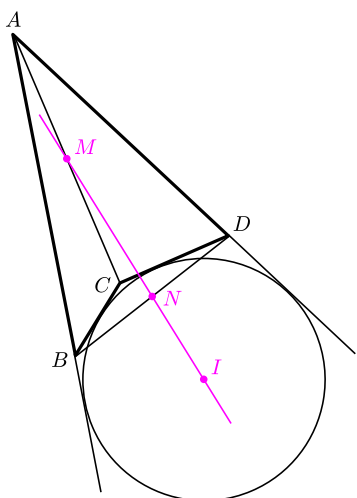
Punkty B i D leżą na tej elipsie, a więc $AB + BC = AD + DC$. Stąd na mocy faktu 2 istnieje okrąg dopisany do czworokąta $ABCD$. Z kolei z faktu 1 wynika, że styczne IB i ID są dwusiecznymi kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i D w czworokącie $ABCD$. Wobec tego punkt I jest środkiem okręgu dopisanego do czworokąta wypukłego $ABCD$.

Przekształcenie afiniczne zachowuje współliniowość, więc punkty M, N oraz I leżą na jednej prostej. Uzyskaliśmy w ten sposób następującą modyfikację twierdzenia Newtona (rys. 10).

Twierdzenie. Jeśli punkt I jest środkiem okręgu dopisanego do czworokąta (wypukłego lub wklęsłego) $ABCD$ oraz punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD , to punkty I, M, N leżą na jednej prostej.



Rys. 9



Rys. 10

Podamy teraz dowód samego twierdzenia Newtona, który oparty jest na poniższym lemacie. Przez \mathcal{F} będziemy oznaczać pole figury \mathcal{F} .

Lemat. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, niebędący równoległobokiem, oraz liczba dodatnia a . Wówczas wszystkie punkty X leżące wewnątrz czworokąta $ABCD$, dla których $[XAB] + [XCD] = a$, leżą na jednej prostej.

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że proste AB i CD nie są równoległe i przecinają się w punkcie E (rys. 11). Niech ponadto K i L będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na półprostych EA^{\rightarrow} i ED^{\rightarrow} , że $EK = AB$ oraz $EL = CD$. Wtedy

$$(2) \quad a = [XAB] + [XCD] = [XEK] + [XEL] = [EKL] \pm [K LX],$$

gdzie znak w ostatnim wyrażeniu zależy od tego, czy liczba a jest większa, czy mniejsza od pola trójkąta EKL (wtedy punkt X znajduje się odpowiednio na zewnątrz lub wewnątrz trójkąta EKL).

W obu przypadkach położenia punktów E , K i L nie zależą od wyboru punktu X . Zatem na mocy równości (2) pole trójkąta $K LX$ również nie zależy od wyboru punktu X . Stąd wynika, że wszystkie punkty X leżą na pewnej prostej, równoległej do prostej KL .

Przystępujemy do dowodu twierdzenia Newtona. Niech $a = \frac{1}{2}[ABCD]$. Wykażemy, że jeśli X jest jednym z punktów I , M lub N , to

$$(3) \quad [XAB] + [XCD] = a,$$

skąd bezpośrednio z powyższego lematu uzyskamy tezę twierdzenia Newtona.

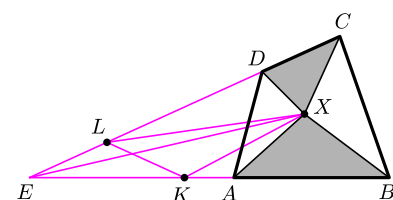
Oznaczmy przez r promień okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Wtedy z zależności $AB + CD = BC + DA$ otrzymujemy

$$[IAB] + [ICD] = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot r = \frac{1}{4}(AB + CD + BC + DA) \cdot r = \frac{1}{2}[ABCD],$$

co dowodzi równości (3) dla $X = I$. Ponadto

$$[MAB] + [MCD] = \frac{1}{2}[ABC] + \frac{1}{2}[CDA] = \frac{1}{2}[ABCD],$$

skąd otrzymujemy zależność (3) dla $X = M$. Dowód tej równości dla $X = N$ jest analogiczny. W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie Newtona.



Rys. 11



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 685. Oszacować, jaką moc rozwija kolarz na finiszu w płaskim terenie.
Rozwiązanie na str. 16

F 686. Przy jakiej minimalnej prędkości rowerzysta może przelecieć przez głowę (razem z rowerem), po zaklinowaniu się przedniego koła w szczelinie chodnika?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE

1159. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu r (rys.). Punkty O , X , Y leżą w tej właśnie kolejności na symetralnej odcinka AB oraz wewnątrz kąta ACB , przy czym $OX \cdot OY = r^2$. Wykazać, że $\sphericalangle ACY = \sphericalangle XCB$.
Rozwiązanie na str. 6

1160. Ciąg a_1, a_2, \dots liczb rzeczywistych jest określony przez warunek

$$a_1 = 1, a_2 = 4 \quad \text{oraz} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Dowieść, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.
Rozwiązanie na str. 16

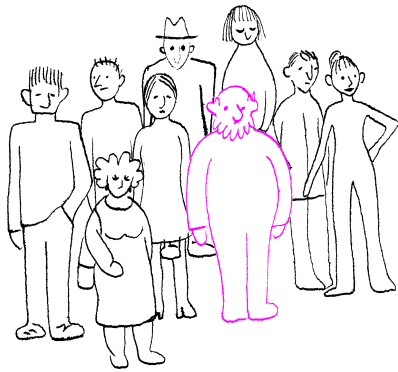
1161. Oznaczmy przez $f(n)$ tę liczbę całkowitą, która na osi liczbowej znajduje się najbliżej liczby \sqrt{n} . Obliczyć

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots + \frac{1}{f(10\,000)}.$$

Rozwiązanie na str. 6

Sprawiedliwa rekrutacja

Agnieszka KASZKOWIAK*



Na to, żeby Jasio, absolwent gimnazjum, znalazł się w szkole ponadgimnazjalnej, potrzeba, żeby przeszedł pomyślnie proces naboru do szkół średnich. Następnie, gdy Janek zda maturę i będzie chciał studiować, będzie musiał uczestniczyć w rekrutacji do szkół wyższych. Gdy dorosły już Jan będzie ubiegał się o stanowisko w konkretnej firmie i złoży podanie o pracę, to znów wejdzie w proces rekrutacji. Rekrutacja to sytuacja, gdzie jednostka (szkoła, uczelnia, firma) spośród kandydatów ubiegających się o przyjęcie wybiera tych, którzy spełniają jej wymagania w najwyższym stopniu. Zastanówmy się, kiedy taki system możemy nazwać sprawiedliwym.

Nie tracąc ogólności, zajmijmy się na razie naborem kandydatów do szkół. Kandydaci chcą się dostać do jak najlepszych szkół, a szkoły chcą mieć jak najlepszych kandydatów, zgodnie ze swoim systemem preferencji (np. biorąc pod uwagę liczbę punktów z testów z konkretnych przedmiotów). W sprawiedliwym systemie rekrutacji „dobrzy” kandydaci mają większe szanse na dostanie się do szkoły niż kandydaci „gorsi” z punktu widzenia konkretnej szkoły.

Dowód na to, że taki sprawiedliwy system rekrutacji istnieje, podali w 1962 roku D. Gale i L. Shapley. Znaleźli oni algorytm pozwalający uwzględnić preferencje szkół i kandydatów prowadzący do uzyskania przydziału, który jest sprawiedliwy i do tego najlepszy z możliwych. Aby ułatwić dobre zrozumienie idei algorytmu, przedstawię na początku założenia, zaproponowane przez L.E. Dubinsa i D.A. Freedmana. Założymy na początku, że liczba szkół i kandydatów jest równa i wynosi n , zbiór kandydatów to

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\},$$

a zbiór szkół to

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}.$$

Każda szkoła może przyjąć tylko jednego kandydata i każdy kandydat może się dostać tylko do jednej szkoły. Kandydaci potrafią określić, która z dowolnych dwóch szkół im bardziej odpowiada (mówimy tu o ostrym liniowym porządku preferencji kandydata). Ponadto szkoły, tworząc swoje listy rankingowe na podstawie np. testów, wyników matur, ocen z wybranych przedmiotów na świadectwie maturalnym, potrafią powiedzieć, który spośród dowolnych dwóch kandydatów w wyższym stopniu spełnia ich oczekiwania. Przydział kandydatów do szkół $f: K \rightarrow S$ nazwiemy *stabilnym* (*sprawiedliwym*), jeżeli nie istnieje takich dwóch kandydatów $k_1, k_2 \in K$ oraz dwie szkoły $s_1, s_2 \in S$, że:

- kandydat k_1 znalazł się w szkole s_1 , tzn. $f(k_1) = s_1$,
- kandydat k_2 znalazł się w szkole s_2 , tzn. $f(k_2) = s_2$,
- kandydat k_1 woli szkołę s_2 od s_1 ,
- szkoła s_2 woli kandydata k_1 od k_2 .

Algorytm przebiega następująco. Zakładamy, że wszystkie szkoły (albo przedstawiciele każdej szkoły) zgromadzeni są w jednym pomieszczeniu. Na początku wszyscy kandydaci są na zewnątrz tego pomieszczenia.

Dowolny kandydat (powiedzmy k_i) wchodzi do „pomieszczenia rekrutacyjnego” i składa podanie do szkoły s_i , w której najbardziej chciałby się znaleźć. Następnie wchodzi inny kandydat k_j i też składa podanie do szkoły, według niego najlepszej. Jeśli tą szkołą jest również s_i , to szkoła s_i określa, którego kandydata woli bardziej: k_i czy k_j i wybranego zatrzymuje, a drugiego odsyła na zewnątrz „pomieszczenia rekrutacyjnego”. Kandydat, z którego jakaś szkoła zrezygnowała, skreśla ją ze swojej listy preferencji. Następnie wchodzi kolejny kandydat i postępowanie wygląda podobnie, aż do momentu, gdy wszyscy kandydaci zostaną już przydzieleni.

Przykładowo, rozpatrzmy trzech kandydatów A, B, C i trzy szkoły X, Y, Z. Kandydat A najbardziej chciałby się dostać do szkoły X, na drugim miejscu do Y, a na trzecim do szkoły Z. Zapiszmy to umownie: A – (X,Y,Z). Analogicznie preferencje pozostałych kandydatów i szkół wyglądają następująco:

- kandydat B – (Y,X,Z), • szkoła X – (B,A,C),
- kandydat C – (Y,Z,X), • szkoła Y – (A,C,B),
- szkoła Z – (C,B,A).

Algorytm rozpoczniemy od sytuacji, w której w pomieszczeniu rekrutacyjnym mamy wszystkie szkoły X, Y, Z. Do pomieszczenia wchodzi kandydat A. Zgodnie ze swoimi preferencjami najbardziej zależy mu na szkole X, a więc do niej składa podanie. Następnie wchodzi kandydat B, którego „ulubioną” szkołą jest Y, więc tam się zatrzymuje. Potem do pomieszczenia wchodzi kandydat C, który na pierwszym miejscu chciałby się dostać również do szkoły Y. Zatem szkoła Y musi zdecydować – czy zostawić kandydata B, czy odesłać go na zewnątrz pomieszczenia rekrutacyjnego i przyjąć kandydata C. Zgodnie ze swoją listą preferencji szkoła Y wybierze drugą możliwość, gdyż woli kandydata C. „Odesłany” kandydat B będzie się ubiegał

*studentka, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

o przyjęcie do szkoły X, która znajduje się na drugim miejscu jego listy preferencji. Ale w szkole X jest już kandydat A. Dla szkoły X „lepszym” kandydatem jest B, zatem tym razem kandydat A musi opuścić pomieszczenie. Kandydat A zaraz po szkole X chciałby być w szkole Y, więc tam się zgłasza (jest już tam kandydat C). Szkoła Y decyduje się zatrzymać kandydata A, a kandydata C odsyła. Kandydat C zgłasza się do szkoły Z, do której nie ubiegał się wcześniej nikt inny, więc już tam zostaje i mamy koniec algorytmu.

Bez względu na kolejność wchodzących kandydatów otrzymany przydział kandydatów do szkół będzie następujący: X – B, Y – A, Z – C. Algorytm Gale’a–Shapleya kończy się w skończonej liczbie kroków, nieprzekraczającej n^2 (po kolei każdy z n kandydatów ubiega się o dostanie się do każdej z n szkół). Po zakończeniu algorytmu kandydaci i szkoły są przydzieleni wzajemnie jednoznacznie. W każdym kroku jest taka sama liczba kandydatów na zewnątrz pomieszczenia rekrutacyjnego jak szkół, które nie przyjęły żadnych kandydatów. Pozostali kandydaci są przyporządkowani wzajemnie jednoznacznie. Gdy tylko szkoła dostanie pierwsze zgłoszenie, ma już potencjalnego kandydata. Algorytm kończy się w momencie, gdy każda szkoła otrzymała przynajmniej jedno zgłoszenie. Otrzymany przydział jest stabilny (sprawiedliwy). Zauważmy, że niemożliwe jest, by przydzielono k_1 do s_1 i k_2 do s_2 , gdzie k_1 woli s_2 od s_1 , a s_2 woli k_1 od k_2 . W przeciwnym przypadku k_1 aplikowałby do s_2 i musiałby zostać przez tę szkołę odrzucony, gdyż ostatecznie przyjęła ona kandydata k_2 – wbrew swoim preferencjom.

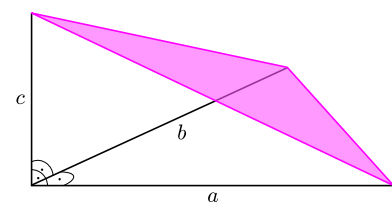
Założenia uproszczonego algorytmu można rozszerzyć tak, ażeby funkcjonował także w sytuacjach, które zdarzają się w rzeczywistości podczas procesów rekrutacyjnych. Liczba kandydatów i szkół może nie być równa. Załóżmy przykładowo, że jest więcej kandydatów niż szkół. Należy tu wspomnieć o nowym rodzaju niestabilności – k_1 został przyjęty przez s_1 , a kandydat k_2 nie znalazł się w żadnej szkole, choć s_1 woli k_2 od k_1 . Rozwiązaniem jest tu wprowadzenie *dotatkowych (fikcyjnych)* szkół, które są dla kandydatów gorsze niż pozostałe szkoły. Do szkół fikcyjnych będą trafiali kandydaci nieprzyjęci przez żadną rzeczywistą

szkołą. Podobne rozwiązanie wprowadza się, gdy razem miejsc w szkołach jest więcej niż kandydatów, wtedy wprowadzamy dotatkowych (fikcyjnych) kandydatów. Gdy liczba szkół i kandydatów jest taka sama, to możemy już zastosować algorytm Gale’a–Shapleya.

Szkoły mogą mieć limity. W rzeczywistości szkoły przyjmują więcej kandydatów niż jednego i wtedy mówimy, że szkoła s ma *limit* $q(s) \geq 1$ i nie może przyjąć więcej niż $q(s)$ kandydatów. Tutaj rozwiązaniem będzie „klonowanie” szkół: ustalenie $q(s)$ *kopii* szkoły s , gdzie każda kopia będzie miała limit 1. Zakłada się przy tym także, że preferencje względem każdej szkoły zostaną skopiowane. Czyli kandydatowi k będzie wszystko jedno, w której z kopii szkoły s się znajdzie. Podobnie każda z kopii szkoły s będzie miała takie same preferencje, jeśli chodzi o kandydatów. Zatem znowu mamy równą liczbę szkół i kandydatów i możemy zastosować algorytm Gale’a–Shapleya.

Limity szkół mogą być *miękkie*. Oznacza to, że w przypadku, gdy istnieją kandydaci, którzy są tak samo preferowani przez daną szkołę (np. mają taką samą liczbę punktów), to dopuszcza się możliwość przyjęcia więcej niż $q(s)$ kandydatów. Szkoła s przyjmuje więc taką liczbę kandydatów, która w możliwie najmniejszym stopniu przekracza limit $q(s)$. Jednakże spełniony musi być warunek, że jeśli jakiś kandydat zostaje przyjęty, to również zostaje przyjęty każdy inny kandydat z tą samą (lub większą) liczbą punktów. Również w tym przypadku można udowodnić, że algorytm Gale’a–Shapleya prowadzi do stabilnego rozwiązania, choć dowód tego faktu jest bardziej skomplikowany.

W świecie, gdzie z rekrutacją spotykamy się na każdym kroku, potrzeba dobrych systemów, które przeprowadzają w jak najlepszy sposób. Algorytm Gale’a–Shapleya jest matematycznym pomysłem na taką sprawiedliwą rekrutację na przykładzie przydziału kandydatów do szkół. Inne systemy rekrutacyjne (np. pracowników do pracy) też mogą się opierać na tym algorytmie. Czytelnikom polecam odwiedzenie w Internecie strony http://www.people.hbs.edu/gbarron/EP-Match_for_Excel.html, gdzie znajduje się program, implementujący opisany algorytm. Można się osobiście przekonać, że faktycznie działa w praktyce.



zaciemnione pole to $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

Na twierdzenie Pitagorasa można spojrzeć tak: *jeśli obetniemy (byle jak) róg kwadratu, to suma kwadratów miar boków przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi miary pozostałego boku*. Przejdźmy do wyższego wymiaru. Okazuje się (proszę sprawdzić – zawodowcom polecamy iloczyn wektorowy), że *jeśli obetniemy róg sześcianu, to suma kwadratów miar ścian przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi miary pozostałej ściany*. Co więcej, okazuje się, że w dowolnym (skończonym) wymiarze n prawdą jest, że *jeśli obetniemy róg n -wymiarowej kostki, to suma kwadratów miar ścian (czyli $(n - 1)$ -wymiarowych sympleksów) przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi miary pozostałej ściany (też $(n - 1)$ -wymiarowego sympleksu)*.

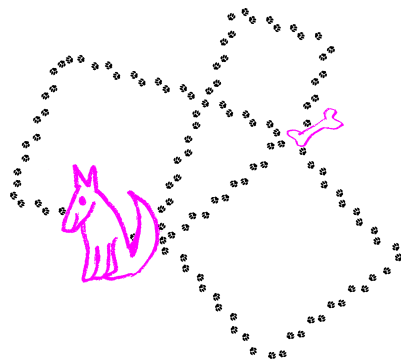
M. K.

Wszechświat ci to obliczy

Aleksandra BEJ, Nadbor DROZD*

Zainspirowani artykułem Piotra Achingera o środku ciężkości i twierdzeniu Steiner'a postanowiliśmy podzielić się innymi zabawnymi przykładami fizycznego spojrzenia na zadania matematyczne. Proponujemy zabawę – jaka sytuacja fizyczna stoi za danym problemem? Podanym rozwiązaniom do matematycznej ścisłości brakuje zwykle kilku zdań, ale można je łatwo uzupełnić, jeśli się tylko pamięta matematyczne definicje pojęć, których fizyk używa bez przerwy, nie zastanawiając się nawet, skąd się wzięły.

1. Punkt X leży wewnątrz pewnego wielościanu wypukłego. Udowodnij, że przynajmniej jeden z rzutów prostokątnych punktu X na ścianę wielościanu zawiera się w tej ścianie (a nie w jej przedłużeniu).
2. Udowodnij, że suma wektorów prostokątnych do ścian dowolnego wielościanu jest zerem – przyjmujemy, że wszystkie wektory prostokątne są skierowane do wewnątrz i mają długość równą polu powierzchni odpowiedniej ściany.
3. Niech A będzie sześcianiem o jednostkowej krawędzi. Niech B_1, B_2, \dots, B_6 będą wektorami takimi, jak w poprzednim zadaniu. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $|x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_6 B_6|$, gdzie x_i jest dowolnie, ale jednakowo obraną współrzędną środka i -tej ściany.
4. Punkty F_1 i F_2 są ogniskami elipsy E . Punkt X należy do odcinka AB i elipsa E jest styczna do tego odcinka w X . Udowodnij, że kąty $F_1 X A$ oraz $F_2 X B$ są równe.
5. W trójkącie o wszystkich kątach mniejszych od 120° znajdź (skonstruuj) punkt realizujący najmniejszą sumę odległości od wierzchołków.
6. Udowodnij, że jeśli wielokąt ma osie symetrii, to wszystkie one przecinają się w jednym punkcie.
7. Niech punkty $B_i, C_i, i = 1, 2, \dots, n$, leżą wszystkie w jednej płaszczyźnie oraz $\vec{B_1 C_1} + \vec{B_2 C_2} + \dots + \vec{B_n C_n} = \vec{0}$. Udowodnij, że $\sum_i f(A, B_i, C_i)$ nie zależy od punktu A – liczba $f(X, Y, Z)$ jest polem trójkąta XYZ , jeśli kąt (zorientowany) pomiędzy wektorami \vec{XY} i \vec{XZ} jest wypukły – w przeciwnym razie $f(X, Y, Z)$ jest minus polem trójkąta XYZ .
8. Udowodnij, że spośród czworokątów o zadanych długościach boków największe pole ma ten, na którym można opisać okrąg. Zakładamy, że taki ekstremalny czworokąt istnieje.



Literatura

[1] H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*

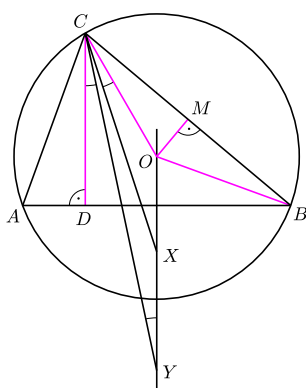
[2] V. Prasolov, *Problems in plane and solid geometry*

[3] W. Ungier, M. Hamera, *Wybrane zadania z 43 lat Olimpiad Fizycznych*

[4] М.Б. Балк, В.Г. Болтянский: *Геометрия масс*

*Studenci Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

rozwiązania na str. 15



Rozwiązanie zadania M 1159.

Oznaczmy przez D rzut prostokątny punktu C na prostą AB oraz niech M będzie środkiem boku BC . Wówczas $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC = \sphericalangle COM$, skąd uzyskujemy $\sphericalangle ACD = \sphericalangle OCM$. Pozostaje więc wykazać, że $\sphericalangle OCX = \sphericalangle DCY$. Z danej w treści zadania równości mamy $\frac{OX}{OC} = \frac{OC}{OY}$, co w połączeniu z równością $\sphericalangle COX = \sphericalangle YOC$ dowodzi, że trójkąty COX i YOC są podobne. A zatem $\sphericalangle OCX = \sphericalangle OYC = \sphericalangle DCY$.



Rozwiązanie zadania M 1161.

Zależność $f(n) = k$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $k^2 - k < n \leq k^2 + k$. Stąd wynika, że dla $k = 1, 2, \dots$ istnieje dokładnie $2k$ takich liczb całkowitych n , że $f(n) = k$.

Ponadto $f(10000) = 100$, a największą taką wartością n , dla której $f(n) = 99$, jest $99^2 + 99 = 9900$. Stąd otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{10000} \frac{1}{f(i)} = \sum_{i=1}^{99} 2i \cdot \frac{1}{i} + 100 \cdot \frac{1}{100} = 199.$$

Czy ciemna materia świeci?

Poruszany dzisiaj temat jest jak najbardziej aktualny, choć informacja ta mogła ukazać się w *Delcie* prawie dwa lata temu. Wiadomo od dawna, że świetnym kandydatem na ciemną materię są neutralina, hipotetyczne najlżejsze cząstki supersymetryczne. Kolejna analiza to potwierdzająca [1] nie wzbudziła mojej czujności. I to był błąd.

Ale po kolei. Supersymetria jest teorią, która może uzupełnić nasz detaliczny opis materii zebrany w standardowym modelu cząstek i oddziaływań fundamentalnych. Postuluje podwojenie liczby znanych cząstek. Każdemu fermionowi (o połówkowym spinie) miałyby odpowiadać bozon (o spinie całkowitym) i na odwrót. Gdyby supersymetria była nienaruszoną własnością materii, to masy partnera i superpartnera musiałyby być takie same. Ponieważ tego nie obserwujemy, to supersymetria musi być ukryta (żargonowo: złamana), a fakt ten objawia się dodatkową masą superpartnerów.

Na pierwszy rzut oka nie widać, po co komu taka teoria. Na drugi zresztą też nie, bo wprowadza ona dodatkowe sto kilkadziesiąt parametrów. Oczywiście, z doświadczalnego punktu widzenia propozycja jest atrakcyjna, bo byłoby co mierzyć przez następne kilkadziesiąt lat. Jednak nie to jest głównym powodem zainteresowania supersymetrią, tylko możliwość włączenia grawitacji do kwantowego opisu rzeczywistości poprzez rozszerzenie symetrii czasoprzestrzeni. Droga ta jest dość pokrewna i wiedzie do superstrun, czyli do rezygnacji z pojęcia cząstki elementarnej jako obiektu punktowego. Wątek ten musimy jednak zatrzymać, bo to ma być artykuł, a nie monografia.

Dodatkowo supersymetria może zapewnić rozwiązania wielu palących problemów. W szczególności daje kandydatów na trwałe, masywne, słabo oddziałujące cząstki (ang. WIMP), które idealnie nadają się do zrobienia z nich ciemnej materii. Termodynamika wczesnego Wszechświata nakłada ograniczenia na własności takich cząstek. Istotne są dwa parametry: masa i prawdopodobieństwo anihilacji. Od nich zależy, ile takich cząstek powinno być obecnie i jaki dają przyczynek do gęstości Wszechświata. Okazuje się, że jednym z rozwiązań są cząstki o masie kilkudziesięciu mas protonu i prawdopodobieństwie anihilacji odpowiadającym oddziaływaniom słabym. Sygnaturą tego rozwiązania jest właśnie anihilacja, która powoduje zamianę dwóch takich cząstek na dwie cząstki modelu standardowego, które, rozpadając się, ostatecznie produkują protony, elektrony (i ich antycząstki) oraz fotony (pochodzące głównie z rozpadów neutralnych pionów). Właśnie te ostatnie powinny dać się zaobserwować.

Sygnалу należałoby szukać w postaci nadmiaru promieniowania gamma wysokiej energii. Taki właśnie nadmiar został odkryty w danych zebranych w latach 1991–2000 przez EGRET (Energetic Gamma Ray Emission Telescope), jeden z czterech instrumentów Compton Gamma Ray Observatory. Na pierwszym rysunku kolorowe punkty odpowiadają zmierzonemu spektrum energetycznemu promieniowania gamma, jasne cieniowanie – standardowemu modelowi, a ciemne cieniowanie – wkładowi od anihilacji WIMPów o masie $60 \text{ GeV}/c^2$. Pośrednim cieniowaniem zaznaczono różnicę wkładu od anihilacji związaną ze zmianą masy w granicach $\pm 10 \text{ GeV}/c^2$.

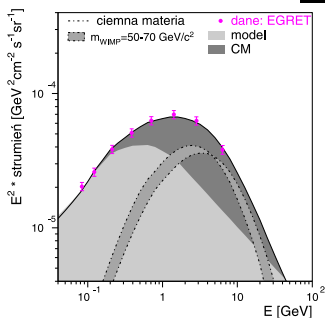
Naprawdę ciekawe jest dopiero to, co przedstawiają pozostałe cztery rysunki. EGRET wykonał dokładną mapę intensywności promieniowania gamma docierającego do Ziemi. Daje to możliwość odtworzenia przestrzennego rozkładu obserwowanej nadwyżki, ponieważ intensywność anihilacji zależy od przestrzennego rozkładu gęstości. Dopasowanie, przeprowadzone jednocześnie dla 180 kierunków w ośmiu przedziałach energetycznych, pozwoliło stwierdzić, że obserwowany nadmiar jest zgodny z rozkładem ciemnej materii, w którym oprócz spodziewanego, sferycznie-symetrycznego halo, występują: dysk o promieniu 4,2 kpc i grubości 0,2 kpc oraz toroid o promieniu 14 kpc, dyspersji promienia 3,3 kpc i grubości 1,7 kpc.

Rysunek 2 pokazuje brak dobrego dopasowania zależności intensywności od długości galaktycznej l , bez uwzględnienia dodatkowej struktury, a rysunek 3 poprawę takiego dopasowania po dopuszczeniu jej obecności. Z kolei rysunki 4 i 5 pokazują dopasowanie do krzywej rotacyjnej Naszej Galaktyki przed i po uwzględnieniu obecności dysku i toroidu. Jest to pierwsze zadowalające wyjaśnienie skokowego wzrostu powyżej promienia 11 kpc.

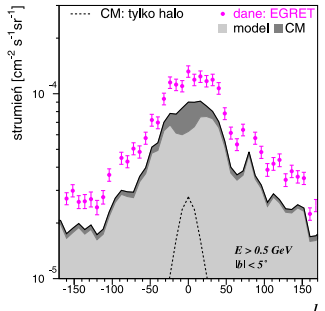
Czy w ten sposób po raz pierwszy zaobserwowaliśmy (nie całkiem) ciemną materię? Jeżeli tak, to potwierdzenie powinien przynieść uruchamiany w tym roku w CERN Wielki Zderzacz Hadronów LHC.

Piotr ZALEWSKI

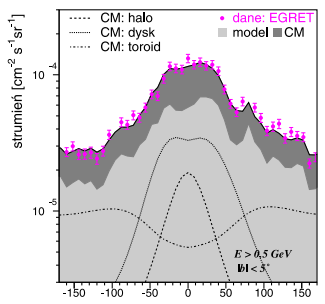
[1] W. de Boer, C. Sander, V. Zhukov, A.V. Gladyshev, D.I. Kazakov, *EGRET excess of diffuse galactic gamma rays as tracer of dark matter*, *Astronomy and Astrophysics*, **444**(2005)51-67



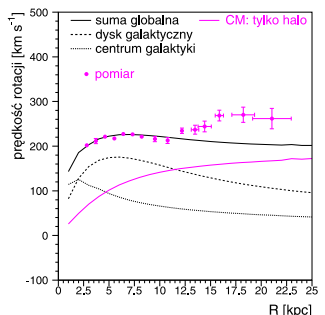
Rys. 1. Rozkład energii kosmicznego promieniowania gamma.



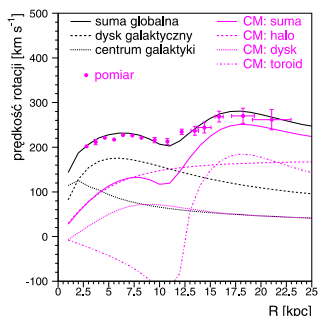
Rys. 2. Zależność intensywności od l (dopasowanie bez struktury).



Rys. 3. Zależność intensywności od l (dopasowanie ze strukturą).



Rys. 4. Kształt krzywej rotacyjnej (dopasowanie bez struktury).



Rys. 5. Kształt krzywej rotacyjnej (dopasowanie ze strukturą).

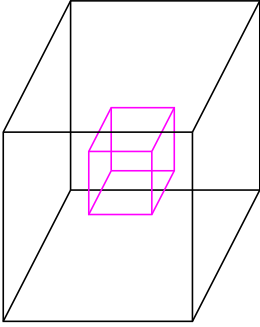
5

mała delta

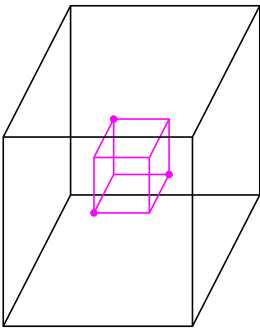
Konkurs – kulki w sześcianie i czworościanie

Dla ułatwienia sobie życia zajmujemy się tylko sześcianem o krawędzi 1. Będziemy w nim umieszczać możliwie duże jednakowe kulki.

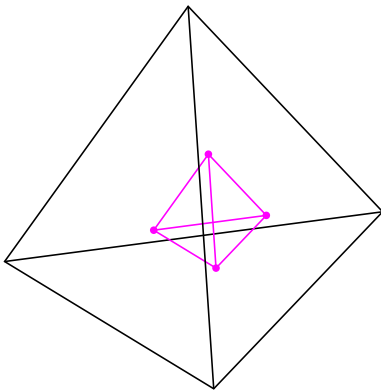
Jak duże? Każdy widzi, że zależy to od tego, ile chcemy, aby tych kulek się zmieściło. Oznaczmy największy promień n kulek mieszczących się w sześcianie przez $r(n)$. Bez specjalnego kłopotu stwierdzamy, że gdy chcemy umieścić tylko jedną kulkę, to jej promieniem jest $r(1) = \frac{1}{2}$. A co będzie, gdy zapagniemy, by kulek było więcej? Tu nasuwa się od razu pomysł, który będzie pasował przynajmniej do kilku przypadków. Kulka wrzucona do sześcianu ma środek w ... mniejszym sześcianie. Istotnie: gdy ta kulka ma promień r , jej środek znajduje się w tych punktach wnętrza sześcianu jednostkowego, które są odległe od brzegu tego sześcianu co najmniej o r , a więc we wnętrzu sześcianu o krawędzi $1 - 2r$.



Środki kulek o promieniu $\frac{1}{3}$ w sześcianie jednostkowym muszą być w sześcianie o krawędzi $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.



Środki trzech maksymalnych kulek w sześcianie.



Środki czterech maksymalnych kulek w czworościanie.

A może $f(4) = f(3) = f(2)$?

Gdy więc chcemy umieścić w sześcianie możliwie duże dwie kulki, to ich środki należy obracać możliwie jak najdalej od siebie w sześcianie o krawędzi $1 - 2r(2)$. Najdalsze punkty sześcianu to końce jego przekątnej. Ma ona, oczywiście, długość $\sqrt{3}(1 - 2r(2))$. Ale kulek nie będzie można powiększyć, gdy będą styczne, czyli gdy będą miały promień równy połowie tej przekątnej. Stąd otrzymujemy równanie

$$\sqrt{3}(1 - 2r(2)) = 2r(2),$$

które daje nam rezultat

$$r(2) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \approx 0,316.$$

To daje się łatwo powtórzyć dla trzech kulek: mamy

$$\sqrt{2}(1 - 2r(3)) = 2r(3), \quad \text{zatem} \quad r(3) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,293,$$

bo trzy najodleglejsze punkty sześcianu to trzy wierzchołki tworzące trójkąt równoboczny o boku będącym przekątną ściany. Od razu też (lub po chwili) spostrzegamy, że jest jeszcze jeden punkt w tej samej odległości od tych trzech, a więc $r(3) = r(4)$.

Tu jednak sprawa się zaczyna. Jak bowiem można dowiedzieć się, gdzie leży pięć punktów sześcianu o boku $1 - 2r$, takich że najmniejsza odległość między nimi jest możliwie największa? I jaka to jest odległość? To jest właśnie zadanie konkursowe: obliczyć $r(n)$ dla możliwie największej liczby kolejnych n .

Bo, oczywiście, każdy wie, że $r(8) = \frac{1}{4}$, a $r(27) = \frac{1}{6}$, ale co po drodze?

Zadanie wydaje się znacznie trudniejsze, gdy zamiast sześcianu weźmiemy np. czworościan foremny (dla odróżnienia poszukiwany promień oznaczmy teraz $f(n)$). Oczywiście, wiemy (?), że $f(1) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Co więcej, środek kulki o promieniu r w czworościanie znajduje się zatem w mniejszym czworościanie o krawędzi $1 - 2\sqrt{6}r$. Ale jak postępować dalej? Znowu są łatwe rezultaty: dla czterech kulek mamy

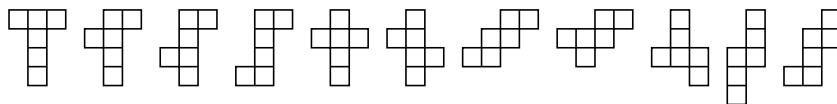
$$1 - 2\sqrt{6}f(4) = 2f(4), \quad \text{zatem} \quad f(4) = \frac{\sqrt{6} - 1}{10} \approx 0,145,$$

ale jak obliczyć inne wartości?

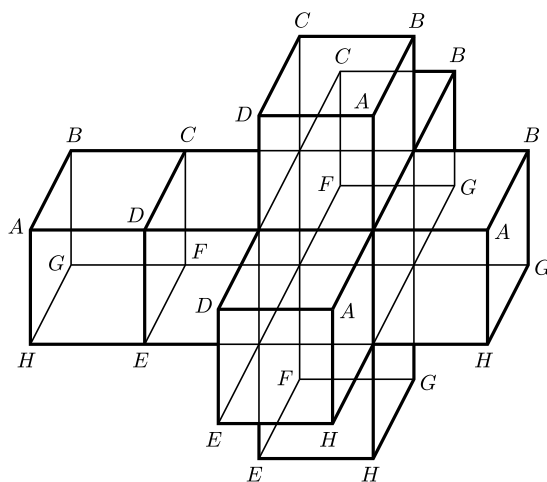
Najlepsze prace opublikujemy.

Konkurs – siatki kostki czterowymiarowej

Jednowymiarowa kostka to odcinek, dwuwymiarowa kostka to kwadrat, trójwymiarowa kostka to sześcian. Siatką kostki n -wymiarowej nazywamy takie rozcięcie jej brzegu, aby była ona w jednym kawałku, aby nie rozcinać żadnej z jej $(n - 1)$ -wymiarowych ścian i aby dawała się umieścić w $(n - 1)$ -wymiarowej przestrzeni. Po przestudiowaniu tego okropnego określenia stwierdzamy, że jednowymiarowa kostka nie ma siatek, dwuwymiarowa ma jedną (jest nią odcinek, a właściwie „łamana” złożona z czterech przedłużających się odcinków) – zatem nic ciekawego. Ciekawiej przedstawia się sprawa z siatkami sześcianu. Jest ich jedenaście i wszystkie są narysowane poniżej.

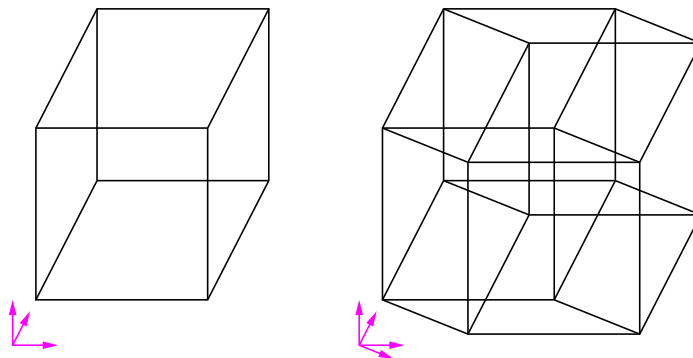


Kolejny rysunek przedstawia jedną z siatek kostki czterowymiarowej. Aby ją skleić, należy połączyć wszystkie tak samo nazywające się punkty.



Jasna rzecz, że fizycznie wykonać się tego nie da – nasza przestrzeń (wbrew rozpowszechnianym przez niektórych plotkom) jest tylko trójwymiarowa. A co by wyszło, gdybyśmy jednak skleili? Bardzo łatwo się o tym przekonać – wystarczy narysować. Przecież rysujemy na dwuwymiarowym papierze trójwymiarowe kostki, czemu nie moglibyśmy narysować czterowymiarowej? Sześcian

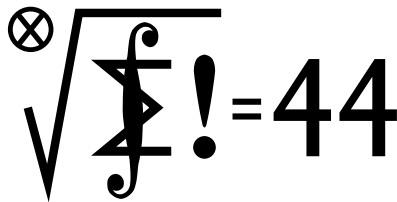
rysujemy tak: wyprowadzamy z jednego punktu trzy kreski i umawiamy się, że są one parami prostopadłe i wszystkie tej samej długości, a potem każdą parę uzupełniamy do równoległoboku – zrobimy tak samo w przypadku czterech kresek.



Oto więc czterowymiarowa kostka. Jak widać, ma 16 wierzchołków, 32 krawędzie, 24 płaskie ściany i 8 ścian trójwymiarowych – prawda?

To było łatwe. Trudne natomiast jest pytanie, ile taka kostka ma nieprzystających siatek. Ogłaszamy konkurs na rozwiązanie tego problemu. Najsprytniejszy sposób obliczenia nagrodzimy publikacją.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 IV 2007

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 523 ($WT=2,99$) i 524 ($WT=1,38$) z numeru 6/2006

Michał Kieza	- 1- 44,87
Jerzy Cisło	- 4- 43,71
Marian Łupieżowiec	- 43,55
Michał Jastrzębski	- 41,19
Piotr Kumor	- 9- 38,84
Lukasz Garncarek	- 38,19
Zbigniew Galias	- 1- 38,09
Marcin Kasperski	- 2- 36,86
Krzysztof Dorobisz	- 36,37
Krzysztof Kamiński	- 35,52
Dariusz Kurpiel	- 2- 34,82
Tomasz Wietecha	- 6- 32,18
Paweł Kubit	- 3- 31,15
Marek Prauza	- 3- 30,56
Leszek Grzanka	- 29,14
Franciszek S. Sikorski	- 29,11
Tomasz Warszawski	- 1- 27,89
Janusz Olszewski	- 8- 27,87
Grzegorz Karpowicz	- 27,61
Jan Czardybon	- 26,21
Witold Bednarek	- 3- 25,48
Marek Spychała	- 24,60
Grzegorz Kozłowski	- 23,23
Jerzy Witkowski	- 4- 21,86

Legenda (przykładowo): stan konta 9-38,84 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 38,84 punktów.

Listę otwiera **Michał Kieza**, który po raz drugi zgromadził na koncie 44 punkty.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2004, 2005 lub 2006.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z matematyki nr 535, 536

Redaguje Marcin E. KUCZMA

535. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci $p = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi.

536. Znaleźć wszystkie wielomiany W (o współczynnikach rzeczywistych) spełniające równanie

$$W(x) + W(4x) + W(6x) + W(7x) = W(2x) + W(3x) + W(5x) + W(8x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 536 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2006

Przypominamy treść zadań:

527. Funkcja f , określona na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych, o wartościach rzeczywistych, jest różniczkowalna w przedziale $(0; \infty)$, ciągła prawostronnie w punkcie 0 oraz spełnia warunki

$$f(0) = 0, \quad |f'(x)| \leq \pi \cdot |f(x)| \text{ dla } x > 0.$$

Czy z tych założeń wynika, że f jest funkcją równą tożsamościowo zeru?

528. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej a oraz każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = [a].$$

527. Odpowiedź: *Tak*. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnej liczby $b \in (0; \infty)$ wartość $f(b)$ jest różna od zera. Z założeń wynika, że funkcja f jest ciągła w $\langle 0; \infty \rangle$. Zatem zbiór $\{x: 0 \leq x \leq b, f(x) = 0\}$ (niepusty, bo $f(0) = 0$) ma największy element - oznaczmy go przez a ; oczywiście $a < b$, skoro $f(b) \neq 0$.

W przedziale $(a; b)$ funkcja f ma wartości niezerowe. Niech $g(x) = \ln |f(x)|$ dla $x \in (a; b)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie a , przy tym $f(a) = 0$, więc $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = -\infty$. Jednak

$$|g'(x)| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \leq \pi.$$

Funkcja g , której pochodna jest w przedziale skończonej długości $(a; b)$ ograniczona, sama musi być w tym przedziale ograniczona (łatwy wniosek z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla pochodnych). Ale wcześniej zauważyliśmy, że przy lewym końcu tego przedziału wartości g dążą do $-\infty$. Sprzeczność dowodzi, że odpowiedź *tak* jest prawidłowa.

528. Zapiszmy liczbę a w postaci $a = qn + r + \delta$; $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\delta \in \langle 0; 1 \rangle$. Przekształcamy badaną sumę:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left(q + \left\lfloor \frac{r+k+\delta}{n} \right\rfloor \right) = nq + \sum_{k=0}^{n-1} c_k,$$

gdzie

$$c_k = \left\lfloor \frac{r+k+\delta}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{dla } k < n-r, \\ 1 & \text{dla } k \geq n-r. \end{cases}$$

W ciągu $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ jest więc r jedynek, i wobec tego $S = nq + r = [a]$.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałeczki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (9), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (8), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Józefczyk, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisło (4), W. Bednarek (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, M. Kieza, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, P. Najman, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Piłkuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, T. Warszawski, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Zmijewski.

lub $120^\circ \Rightarrow$ pewne dwa żuki spotkają się w jednym punkcie] (współczynnik trudności $WT=4,00$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=0$; nieapetyczny komizm ostatniego skrótu niezamierzony). To właśnie TO zadanie. W niewielu przysłanych pracach powtarzał się jednakowy błąd: przypuścmy, że żuki nigdy się nie spotkają; ich pierwszy ruch wyznacza więc permutację 28-elementowego zbioru możliwych pozycji (punktów węzłowych), która rozpada się na cykle. Autorzy omawianych prac przenoszą na owe cykle założenie o kątach 60° , 120° (skąd już nietrudna sprzeczność) – co jednak nie ma żadnego uzasadnienia, skoro każdy z cykli składa się z elementów trajektorii *różnych* żuków.

Nie znamy innego rozwiązania niż firmowe, wydrukowane w 1/2006.

Zadanie 508. [Boki AB, BC, CD, DA czworokąta $ABCD$ są styczne do okręgu w punktach K, L, M, N ; $KM \cap LN = \{S\} \Rightarrow |KS| \cdot |AB| \cdot |CM| \cdot |DM| = |MS| \cdot |AK| \cdot |BK| \cdot |CD|$] ($WT=2,18$; $LPR=10$). Niech a, b, c, d będą długościami odcinków stycznych z punktów

W zakończonym właśnie sezonie ligowym mamy do odnotowania dwa wyrównania rekordów. Wyrównania – bo o pobiciu nie może być mowy. Chodzi o współczynniki trudności zadań (WT), które z definicji są liczbami z przedziału $(1; 4)$. Otóż obie te ekstremalne wartości znalazły się wśród tegorocznych wyników. Oczywiście $WT=1,00$ za zadanie **517** oznacza, że wszyscy je rozwiązyali bez usterki. Taka sytuacja miewała już miejsce parokrotnie.

Również przeciwny kraniec skali został już raz osiągnięty wcześniej, w zadaniu **194** z numeru 8/1989 – trudne równanie diofantyczne (komentarz w omówieniu w 2/1992). Był to jednak okres wielkich przemian w naszym kraju, *Delta* przez czas jakiś nie ukazywała się, ludzie byli zajęci poważniejszymi sprawami niż liga zadaniowa. Rozwiązania zadań z owego miesiąca przysłało zaledwie trzech uczestników, zadania **194** nikt nie ruszył, stąd $WT=4,00$.

No i teraz znów mamy $WT=4,00$. Za zadanie **505** – kombinatoryka, żuki na planszy, siatka o 28 węzłach. Redaktor ligi znalazł je w olimpiadzie matematycznej kraju, który niegdyś był jedną z radzieckich republik. Poznał je wraz z rozwiązaniem, sprawiającym wrażenie, że zadanie nie powinno być zbyt trudne. . .

Jednak wyniki nas zaskoczyły: żadna z przysłanych prac, zdaniem oceniającego, nie zawierała nic, co by mogło dać choćby ułamek punktu; stąd maksymalny WT . (Z tej emocji podaliśmy w numerze 5/2006 błędną informację o współczynnikach trudności zadań **505** i **506**, zamieniając je miejscami – sprostowanie w 7/2006 – ponownie przepraszamy).

Otóż i pouczający przyczynek do wrózenia trudności. Jeśli sam na serio zadania nie atakowałeś, rozwiązanie dostałeś gotowe na talerzu, to o trudności nie wiesz nic! Redaktor ligi, przez wiele lat aktywny w olimpiadzie matematycznej i innych konkursach, więc niby w tej zabawie doświadczony, co raz to ma okazję się przekonać, jak iluzoryczne to doświadczenie.

A swoją drogą ciekawe, jak to zadanie wypadło w tamtej olimpiadzie (w swoim kraju) i czy było przez jej jury wstępnie oceniane jako łatwe czy średnio trudne. . .

Wśród pozostałych zadań, jak widać z poniższego omówienia, najciekawsze okazały się zadania geometryczne.

Zadanie 505.

[Trójkąt równoboczny podzielony na 36 trójkątów przystających; po liniach podziału łączy 28 żuków, startując z różnych węzłów siatki i zakręcając po każdym ruchu o 60°

A, B, C, D . Umieszczamy w tych punktach masy m_A, m_B, m_C, m_D proporcjonalne do $1/a, 1/b, 1/c, 1/d$; punkt K jest środkiem masy układu $\{A, B\}$, a M jest środkiem masy układu $\{C, D\}$. Zatem środek masy całego układu $\{A, B, C, D\}$ leży na odcinku KM oraz – przez analogię – na odcinku LN ; jest to więc punkt S . Gdy masy m_A, m_B przeniesiemy obie do punktu K , a masy m_C, m_D do M , środek masy powstałego układu $\{K, M\}$ pozostanie w punkcie S ; stąd $\frac{|KS|}{|MS|} = \frac{m_C + m_D}{m_A + m_B} = \frac{1/c + 1/d}{1/a + 1/b} = \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{c+d}{cd}$ (teza).

Jakie proste! Jest to prawie dosłowna reprodukcja rozwiązania, które przedstawili **W. Bednarek, M. Jastrzębski, J. Olszewski**; a także autor zadania **Piotr Achinger**. Redaktor ligi uznał, niezbyt mądrze, że tę „fizykę” (środki ciężkości) lepiej zastąpić przez kombinacje liniowe wektorów i w ten sposób powstało rozwiązanie firmowe. Niby to samo, jednak straciło lekkość. Ale dzięki temu zyskałmy wdzięczną pozycję do omówienia rocznego.

Zadanie 515. [AB, AD, AE – trzy krawędzie sześcianu; odległość okręgu wpisanego w ścianę $ABCD$ od okręgu opisanego na trójkącie $BDE = ?$] ($WT=3,10$; $LPR=4$ (5?)). Ciekawe zadanie – wszystkie rozwiązania różne. **J. Cisło** zauważył, że najkrótszy odcinek łączący punkty obu okręgów musi być współpękowy lub współpłaszczyznowy z prostymi przechodzącymi przez środki tych okręgów i prostopadłymi do ich płaszczyzn; potem przeszedł do rachunków (na współrzędnych), ale już niezawiliych, właśnie dzięki owemu geometrycznemu spostrzeżeniu.

Rozwiązanie od początku do końca rachunkowe (współrzędne, potem pochodne) przedstawił **Ł. Garncarek**.

Rozwiązanie firmowe było oparte na innym geometrycznym spostrzeżeniu: te okręgi są zawarte w sferach – wpisanej w szkielet sześcianu oraz opisanej na sześcianie. Taką metodą zrobił zadanie **J. Olszewski**.

Najprościej, w pewnym sensie również „taką metodą”, poradził sobie **T. Tkocz**, bowiem rozpoznał to jako jedno z zadań z Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych sprzed kilkunastu lat – ku zaskoczeniu redaktora ligi, który je znalazł w całkiem innym źródle, znacznie późniejszym (i z innego kraju).

Jeszcze jeden uczestnik przysłał rozwiązanie, być może dobre, mocno rachunkowe, ale niestety nieczytelne wskutek braku objaśnień użytych oznaczeń.

Zadanie 516. [Iterowanie operacji $(a, b) \mapsto (a', b')$, gdzie $(a', b') = (2a, b-a)$ gdy $a < b$, $(a', b') = (a-b, 2b)$ gdy $a \geq b$; dla jakich par początkowych $(a_0, b_0) \in \mathbb{N}^2$ algorytm się zatrzyma?] (WT=2,01; LPR=9). **J. Olszewski**,

T. Rawlik, M. Spychała, M. Chrzanowski podali warunek w takiej mniej więcej formie, jak w rozwiązaniu firmowym: iloraz $a_0/(a_0+b_0)$ ma być liczbą dwójkowo-wymierną. Bardziej elegancką, bo symetryczną (choć oczywiście równoważną) postać warunku znaleźli **J. Cisko, K. Dorobisz, Ł. Garncarek, P. Kumor, J. Witkowski**: iloraz $(a_0+b_0)/\text{NWD}(a_0, b_0)$ ma być potęgą dwójki.

Zadanie 518. $\{\{1, 2, \dots, 3n\} = A \cup B \cup C$;
 $|A| = |B| = |C| = n \Rightarrow \exists a \in A, b \in B, c \in C : a \pm b \pm c = 0\}$
 (WT=3,53; LPR=2). **J. Olszewski** przysłał rozwiązanie dużej urody; ma ono cechy wspólne z rozwiązaniem firmowym, ale jest zgrabniejsze:

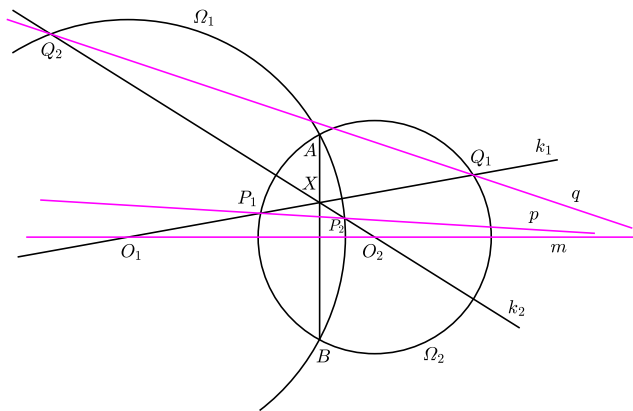
Niech $1 \in C$; jeśli $1 \in A-B$ lub $1 \in B-A$, to mamy tezę; dalej zakładamy, że $\pm 1 \notin A-B$ (żaden element zbioru A nie sąsiaduje z żadnym elementem B). Jeżeli któryś ze zbiorów A, B , na przykład A , jest rozproszony, tzn. nie zawiera żadnej pary liczb kolejnych, to z własności $\pm 1 \notin A-B$ wynika, że $(n+1)$ -elementowy zbiór $(A-1) \cup \{b\}$, gdzie $b = \min B$, jest zawarty w C – sprzeczność ($|C| = n$).

Gdy żaden ze zbiorów A, B nie jest rozproszony, bierzemy najdłuższy blok X złożony z kolejnych liczb w zbiorze A oraz najdłuższy blok Y w zbiorze B ($|X| > 1, |Y| > 1$). Przyjmijmy, że liczby w zbiorze X są większe od liczb w Y . Zbiór $X-Y$ jest blokiem złożonym z $|X|+|Y|-1$ kolejnych liczb, a więc dłuższym niż X i niż Y ; nie jest zatem podzbiorem ani zbioru A , ani B ; stąd i z własności $\pm 1 \notin A-B$ łatwy wniosek, że $(X-Y) \cap C \neq \emptyset$. Teza.

P. Kumor podał odsyłacz: stary numer *Kwanta* (**P. Kubit**, który zadanie zaproponował, też je stamtąd zaczerpnął).

Zadanie 520. [Okręgi Ω_1, Ω_2 (środki O_1, O_2) przecinają się prostopadłe w punktach A, B ; na odcinku AB leży punkt X ; prosta $O_i X$ przecina Ω_j w punktach P_i, Q_i ($P_i \in \text{odc } O_i X$), $\{i, j\} = \{1, 2\} \Rightarrow$ proste $P_1 P_2, Q_1 Q_2, O_1 O_2$ przecinają się w punkcie niezależnym od X] (WT=3,49; LPR=3).

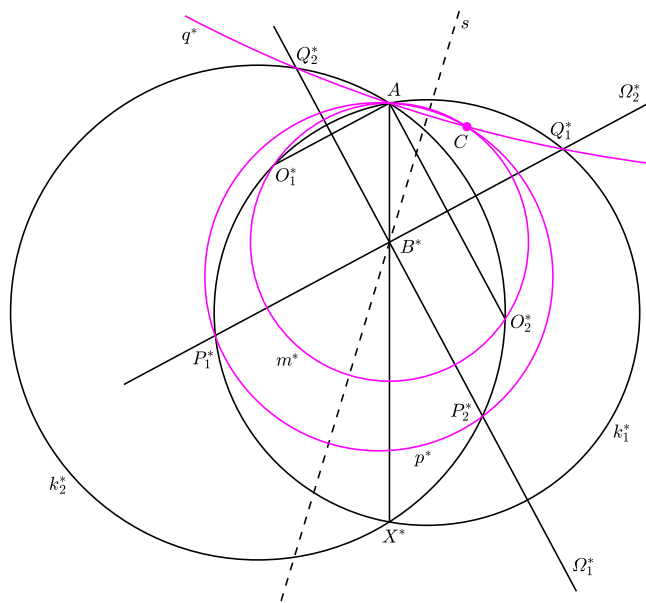
Rozwiązanie firmowe było wzorowane na rozwiązaniu, które dostarczył **Piotr Achinger**, autor zadania. Dość podobny w charakterze dowód przedstawił **J. Olszewski**. A oto



zupełnie odmienne rozwiązanie, które znaleźli **B. Dyda** i **M. Jastrzębski**:

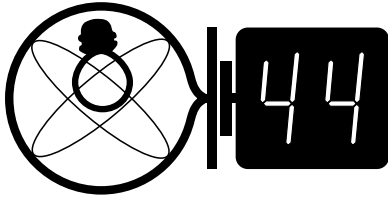
Inwersja o środku A i dowolnym promieniu przekształca okręgi Ω_i na proste Ω_i^* będące symetrycznymi odcinkami AO_i^* (gwiazdka oznacza obraz punktu lub figury w tej inwersji); tworzy się trójkąt prostokątny $O_1^* A O_2^*$, punkt B^* jest środkiem przeciwprostokątnej $O_1^* O_2^*$. Obrazami prostych $k_1 = O_1 X, k_2 = O_2 X, m = O_1 O_2, p = P_1 P_2, q = Q_1 Q_2$ są okręgi przechodzące przez A .

Okrąg k_1^* przecina prostą Ω_2^* w punktach P_1^*, Q_1^* ; prosta Ω_1^* , jako symetralna cięciwy AO_1^* okręgu k_1^* , jest też symetralną równoległej cięciwy $P_1^* Q_1^*$. Zatem B^* jest środkiem odcinka $P_1^* Q_1^*$, i analogicznie, środkiem odcinka $P_2^* Q_2^*$. Ponadto B^* leży na osi potęgowej okręgów k_1^*, k_2^* , więc iloczynowy $|B^* P_1^*| \cdot |B^* Q_1^*|$ są równe, i wobec tego $P_1^* P_2^* Q_1^* Q_2^*$ jest kwadratem o środku B^* .

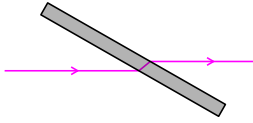


Dwusieczna s kąta prostego utworzonego przez proste Ω_1^* i Ω_2^* , przechodząca przez ćwiartkę płaszczyzny zawierającą punkt A , jest wspólną symetralną odcinków $P_1^* P_2^*$ i $Q_1^* Q_2^*$, jest więc osią symetrii każdego z okręgów $p^* = (AP_1^* P_2^*)$, $q^* = (AQ_1^* Q_2^*)$. Jest też osią symetrii okręgu $m^* = (AO_1^* O_2^*)$, bo przechodzi przez jego środek B^* . Punkt C , symetryczny do A względem s , leży na tych trzech okręgach i jest niezależny od X (bo określenie prostej s nie zależało od X). Jest on obrazem inwersyjnym punktu leżącego na prostych p, q, m .

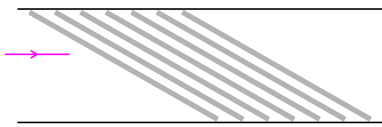
Redaguje Jerzy B. BROJAN



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2007



Rys. 1



Rys. 2

432. Jak wiadomo, wiązka światła padająca na powierzchnię szkła pod kątem Brewstera i spolaryzowana w płaszczyźnie załamania biegnie dalej bez odbicia. Dotyczy to również wiązki załamującej się przy wyjściu z płytki płaskorównoległej, jeśli padała ona na płytkę pod kątem Brewstera (rys. 1). Na tej zasadzie oparta jest konstrukcja prostego polaryzatora (rys. 2): zestaw równoległych płytek szklanych umieszczamy w pudełku pomalowanym od środka na czarno i kierujemy na nie równoległą wiązkę światła niespolaryzowanego. Wychodzące światło staje się spolaryzowane, w stopniu zależnym od liczby płytek. Z ilu płytek powinien składać się przyrząd, aby zawierało ono nie więcej niż 10% „niewłaściwej” składowej? Pudełko jest szerokie, tak że trzeba uwzględnić dowolną liczbę odbić światła od różnych powierzchni płytek. Przyjąć $n = 1,5$ i pominąć pochłanianie światła w szkło. Należy też pominąć interferencje (przyjąć, że światło jest niespójne).

Wskazówka: gdy promień pada na powierzchnię szkła pod kątem Brewstera (lub wybiega pod kątem Brewstera) i jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej, współczynnik odbicia R wynosi

$$R = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2.$$

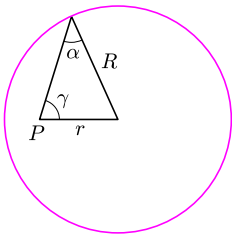
433. W jednym z artykułów ze *Świata Nauki* w zeszłym roku można było przeczytać, że powyżej pewnej energii progowej (tzw. granica GZK) proton może rozproszyć się na niskoenergetycznym fotonie promieniowania relikтового wypełniającego przestrzeń międzygwiazdową, w wyniku czego powstaje mezon π^0 . Obliczyć wartość granicy GZK. Dana jest energia fotonu $E_f = 10^{-3}$ eV, masa protonu $m_p = 938$ MeV/c², masa mezonu $m_{\pi^0} = 135$ MeV/c².

Rozwiązania zadań z numeru 10/2006

Przypominamy treść zadań:

424. Dwa jednakowe tramwaje z tą samą liczbą pasażerów przejechały z tą samą prędkością tę samą trasę, z wieloma przystankami. Czy zachowanie się pasażerów może być przyczyną tego, że jeden tramwaj zużył więcej energii elektrycznej niż drugi?

425. Wewnątrz szklanej kuli, w punkcie P odległym od środka kuli o r znajduje się izotropowe źródło światła. Jaka część wysyłanego światła wydostaje się z kuli? Dane są: współczynnik załamania szkła $n = 1,5$ oraz stosunek $k = r/R = 0,75$, gdzie R – promień kuli. Szkło jest doskonale przezroczyste.



Rys. 3

424. Jeśli w czasie rozpędzania tramwaju pasażerowie przemieszczają się do przodu, a w czasie hamowania – do tyłu, to wykonują przy tym pracę dodatnią przeciw sile bezwładności, czyli dostarczają energię i powodują zmniejszenie poboru energii elektrycznej. Jeśli wykonują ruchy przeciwne, to ich praca jest ujemna, czyli odbierają energię, kosztem dodatkowego poboru energii z sieci.

Równoważne rozwiązanie opiera się na analizie popędu i pracy siły rozpędzającej tramwaj. Popęd tej siły $\int F dt$ nie zależy od ruchu pasażerów (skoro tramwaj osiąga ten sam pęd końcowy). Gdy jednak początkowo pasażerowie zaczynają poruszać się do przodu, a później zatrzymują się względem tramwaju, zwiększą siłę niezbędną do rozpędzania tramwaju w fazie początkowej (kiedy prędkość jest mała), a zmniejszą w fazie końcowej (kiedy prędkość jest duża). Ze wzoru $W = \int Fv dt$ widać, że spowoduje to zmniejszenie pracy silnika.

425. Kąt graniczny dla całkowitego wewnętrznego odbicia jest dany wzorem $\alpha = \arcsin(1/n)$. Korzystając z twierdzenia sinusów (zob. rys. 3), otrzymujemy, że promień pada na

powierzchnię kuli pod tym kątem wtedy, gdy

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{k} = \frac{1}{kn}.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania (jedno mniejsze, drugie większe od 90°), wyznaczające granice przedziału kątów γ , w którym promień wybiegający z P ulegnie całkowitemu wewnętrznemu odbiciu. Kierunki poza tym przedziałem leżą wewnątrz dwóch wycinków kuli, a miarą kąta bryłowego każdego z tych wycinków jest $2\pi(1 - \cos \gamma)$ – łącznie $4\pi(1 - \cos \gamma)$. Ponieważ pełny kąt bryłowy wynosi 4π , więc szukany ułamek określający stosunek strumienia światła wybiegającego na zewnątrz do całkowitego strumienia wysyłanego przez źródło ma wartość

$$1 - \cos \gamma = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{kn} \right)^2} = 0,542.$$

Zauważmy, że promień, który raz uległ całkowitemu wewnętrznemu odbiciu, musi przy następnym trafieniu na powierzchnię kuli ulec takiemu odbiciu ponownie – natomiast po częściowym odbiciu (gdy kąt padania jest mniejszy od granicznego) ma następną „szansę” wydostania się i po wielu takich odbiciach wewnątrz kuli pozostanie dowolnie mała jego część.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 421 zadaniach

Mateusz Łącki	- Kraków	42,38
Tomasz Tkocz	- Rybnik	36,42
Marian Łupieżowiec	- Zebrydowice	32,79
Konrad Kapcia	- Częstochowa	32,13
Tomasz Rudny	- Warszawa	31,48
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	1 - 29,30
Tomasz Wietecha	- Tarnów	5 - 26,08
Jerzy Witkowski	- Radlin	1 - 26,07
Krzysztof Magiera	- Losiów	18,64
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	2 - 17,01
Jacek Konieczny	- Poznań	15,22
Piotr Kumor	- Olsztyn	13,92
Piotr Ładyżyński	- Michalin	10,21
Ryszard Woźniak	- Kraków	9,35
Kazimierz Gryszko	- Gliwice	9,18
Radosław Poleski	- Kołobrzeg	8,65
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	7 - 8,62

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2004-2006 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (7), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;
„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach, J. Witkowski.

Do kilku zadań z ostatniego rocznika otrzymaliśmy od naszych Czytelników oryginalne rozwiązania i uzupełniające uwagi.

Zadanie 404 [Jak człowiek wyczuwa kierunek fali dźwiękowej w różnych zakresach częstotliwości] (współczynnik trudności $WT = 1,83$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). Ciekawe szczegóły na temat zasady funkcjonowania tego zmysłu przekazali w swoich listach **A. Idzik** (na podstawie książki E. Ozimka *Dźwięk i jego percepcja*, PWN 2002) oraz **M. Łącki**. Nasi korespondenci podają m. in., że przy wysokich częstotliwościach istotne znaczenie ma kształt małżowiny usznej. Trzecie dobre rozwiązanie nadesłał **J. Witkowski**.

Zadanie 406 [Lewitacja szklanej kulki w pionowym strumieniu światła] ($WT = 2,84$, $LPR = 2$). Podana w numerze 3/2006 wartość natężenia światła jest 2 razy za duża, wskutek pomyłki. Poza tym przypuszczenie, że „całkę można obliczyć prawdopodobnie tylko numerycznie” okazało się niesłuszne, jak wykazał dr Jerzy Cisło z Uniwersytetu Wrocławskiego. Otrzymane przez niego wyrażenie analityczne jest jednak dość skomplikowane. Spośród uczestników naszej ligi dobre rozwiązania nadesłali **A. Idzik** i **M. Łącki** (oba z numerycznym obliczeniem całki).

Zadanie 408 [Współczynnik załamania szkła pryzmatu, z którego promień wybiega stycznie] ($WT = 1,26$, $LPR = 8$). Tu również istnieje rozwiązanie w postaci wzoru analitycznego, z czego skorzystali wszyscy uczestnicy tej serii zadań.

Zadanie 409 [Ciężar wisi na dwóch drutach, a przepływ prądu doprowadza do ich zetknięcia] ($WT = 2,99$, $LPR = 4$). Żadne z nadesłanych rozwiązań (**A. Idzika**, **J. Kelnera**, **T. Tkocza** i **J. Witkowskiego**) nie było zbliżone do „firmowego”, w którym autor analizował kształt drutów, pracowicie całkując równanie różniczkowe II stopnia. Nasi korespondenci uprościli ten kształt bardzo znacznie, i to w dowolny sposób (łamana albo łuk okręgu). Mimo to wszystkie oceny są dość wysokie, nawet wtedy, gdy przyjęto kształt w postaci dwóch odcinków prostoliniowych. Oto jedna z głównych różnic między zadaniem fizycznym a matematycznym: fizykowi wolno dokonywać wszelkich niezbędnych przybliżeń, o ile nie deformują one wyjściowego problemu w nadmiernym stopniu (cała sztuka polega na ocenie, jaki stopień jest dopuszczalny!). Zresztą, rozwiązanie firmowe też zawierało przybliżenie, gdyż dla każdego odcinka drutu oddziaływanie obliczano ze wzoru słusznego dla przewodników nieskończonych i równoległych. Czy istnieje rozwiązanie ścisłe i ogólne? Może tak, a może nie; ale nie ma to bardzo wielkiego znaczenia, jeśli wynik ma obowiązywać tylko w pewnym zadanym zakresie zmienności wszystkich parametrów.

Zadanie 412 [Dlaczego szampan się nie pieni podczas otwierania butelki przy usuwaniu osadu] ($WT = 2,75$, $LPR = 2$). Pan **K. Magiera** przedstawił wzorowe rozwiązanie tego zadania, uwzględniające wszystkie możliwe przyczyny, uszeregowane według ważności – w szczególności, pominiętą w rozwiązaniu firmowym, większą rozpuszczalność dwutlenku węgla w winie w niskiej temperaturze, a także ewentualne unieruchomienie butelki podczas jej otwierania „niekonsumpcyjnego”. Dalsze badania tych frapujących kwestii podsuwamy pasjonatom fizyki jako naukowy akcent świąt i uroczystości rodzinnych... Drugie dobre rozwiązanie – **J. Witkowski**.

Zadanie 415 [Liczba operacji niezbędna do rozdzielenia mieszanki izotopów na frakcje] ($WT = 2,93$, $LPR = 3$). W rozwiązaniu firmowym odnotowana została rozbieżność pomiędzy liczbą operacji wynikającą z przyjętego algorytmu (1,4 mln) a liczbą wynikającą z porównania entropii (700 tys.). Na pytanie, czy ktoś z Czytelników skonstruuje lepszy algorytm, mamy odpowiedź pozytywną – według **J. Witkowskiego** „odkładanie na bok” dobrze wzbogaconych partii gwarantuje osiągnięcie celu już po 1,15 mln operacji. Pozostałe dobre rozwiązania – **A. Idzik** i **K. Magiera**.

Wszechświat ci to obliczy – rozwiązania

1. Dowód nie wprost. Gdyby zbudować model tego wielościanu z lekkiego (nieważkiego) materiału i umieścić w X ciężarek, to okaże się, że rzut środka masy nie trafia w podstawę niezależnie od tego, na której ścianie stoi wielościan. Zatem wielościan będzie się przewracał bez końca. Jeżeli pochylimy płaszczyznę, na której stoi, o bardzo mały kąt, tak żeby zachować własność punktu X , to możemy zmusić nasz wielościan do wtaczania się bez końca pod górę! Otrzymaliśmy perpetuum mobile.

2. Wyobraźmy sobie, że wielościan jest wypełniony powietrzem. Siły pochodzące od ciśnienia działającego na ścianki są właśnie tymi wektorami prostopadłymi. Gdyby ich suma nie była zerem, to by znaczyło, że siły działające wewnątrz układu przesuwały cały układ!

3. Nic się nie zmieni, jeśli weźmiemy wektory skierowane do wewnątrz. Gdyby zanurzyć nasz sześcián w cieczy o jednostkowej gęstości, siły pochodzące od ciśnienia działającego na ściany sześciánu byłyby właśnie takimi wektorami. Zgodnie z prawem Archimedeasa siła wyporu, która jest ich sumą, ma niezależnie od ułożenia sześciánu wartość 1 i kierunek pionowej współrzędnej.

4. Nitkę z koralikiem zaczepiamy w punktach F_1 i F_2 . Możliwe położenia koralika tworzą elipsę o ogniskach F_1 i F_2 . Po pewnym czasie koralik zsunie się do najniższego położenia – X . Ponieważ położenie jest najniższe, styczna do elipsy w punkcie X jest pozioma. Na koralik działają w położeniu równowagi trzy siły. Grawitacja – w dół, i siły od nitki – wzdłuż nitki, czyli w kierunku ognisk. Składowe poziome tych dwóch sił muszą być takie same – bo koralik jest w równowadze. Wartości tych sił również muszą być takie same – bo nitka również jest w równowadze. Zatem obie siły – a więc również odcinki XF_1 i XF_2 tworzą taki sam kąt z pionem. Z tego już wynika żądana równość kątów. Kiedy obracamy cały układ, koralik obiega całą elipsę, więc X jest dowolnym punktem elipsy (patrz też Fakt 1 na str. 1).

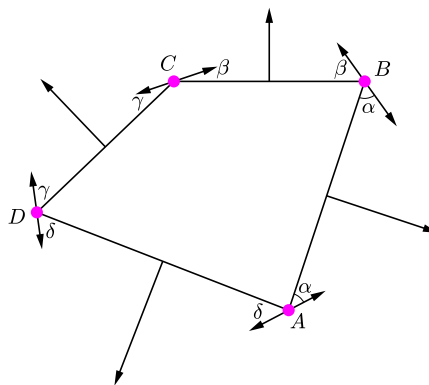
5. Wyobraźmy sobie płaski stół z dziurami w punktach A, B, C . Przez dziury przewleczone są sznurki, na których wiszą jednakowe odważniki m . Wszystkie sznurki są połączone w węzeł X . Na węzeł X działają trzy siły o takiej samej wartości mg i kierunkach wzdłuż sznurków. Te siły ściągną X do jedynego możliwego położenia równowagi, w którym kąty AXB, BXC, CXA mają po 120° . W tym położeniu energia potencjalna jest najmniejsza. To oznacza, że środek masy odważników jest w najniższym położeniu, czyli suma odległości punktu X od A, B, C jest najmniejsza. Zatem szukany punkt jest scharakteryzowany równością kątów, teraz można go skonstruować. Trzeba zauważyć, że znaleźliśmy minimum globalne, ale chyba nikt nie ma wątpliwości, że dowolny punkt X zostanie ściągnięty do położenia równowagi, a nie np. do nieskończoności... Gdyby jeden z kątów trójkąta ABC był większy od 120° , punkt X trafiłby do wierzchołka tego kąta. To zadanie można uogólnić na sumę odległości ze współczynnikami poprzez zawieszanie różnych ciężarków – wtedy dowiemy się, na przykład, gdzie umieścić szkołę – żeby dzieci z kilku wiosek pokonywały codziennie najmniejszą trasę itp. W tym zadaniu potencjał w punkcie X miał postać $|AX| + |BX| + |CX|$. Jeśli usunąć ciężarki, a sznurki zastąpić sprężynami, otrzymamy potencjał $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2$, natomiast siły działające na węzeł nie będą stałe, tylko

proporcjonalne do odległości od wierzchołków. W ten sposób można pokazać, że minimum sumy kwadratów odległości od wierzchołków jest realizowane w środku ciężkości. Zmieniając postać potencjału, możemy scharakteryzować punkty o ekstremalnej sumie lub ekstremalnym iloczynie odległości od wierzchołków lub od boków wielokąta.

6. Wielokąt zawsze można zbudować z jednorodnego drutu. Środek masy takiego obiektu jest jednoznacznie określony i musi leżeć na osi symetrii (inaczej byłyby dwa). Zatem wszystkie osie symetrii przechodzą przez środek ciężkości.

7. Zauważmy, że $f(A, B_i, C_i) = \frac{1}{2} AB_i \cdot AC_i \sin(\angle B_i A C_i)$. Jeśli punkty B_i, C_i leżą w płaszczyźnie XY , to wektor $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB_i} \times \overrightarrow{AC_i}$ ma kierunek osi Z . Współrzędna Z tego wektora wynosi właśnie $f(A, B_i, C_i)$. Zatem wystarczy pokazać, że suma $\sum_i \overrightarrow{AB_i} \times \overrightarrow{AC_i} = \sum_i \overrightarrow{AB_i} \times \overrightarrow{B_i C_i}$ nie zależy od punktu A . Jeżeli wektory $\overrightarrow{B_i C_i}$ są siłami, to $\sum_i \overrightarrow{AB_i} \times \overrightarrow{B_i C_i}$ jest ich momentem siły obliczonym względem punktu A . Ponieważ suma sił jest zerem, ten moment nie zależy od punktu.

8. Załóżmy, że $ABCD$ jest takim ekstremalnym czworokątem. Możemy wykonać jego model z cienkiego drucika z zawiasami. W jakiej sytuacji fizycznej czworokąt z zawiasami w wierzchołkach będzie dążył do zmaksymalizowania pola? Tak się stanie, jeśli graniastosłup o podstawie czworokąta napelnimy gazem. Na bok czworokąta (ścianę graniastosłupa) działa siła prostopadła, proporcjonalna do długości boku. Jeżeli $ABCD$ jest szukany ekstremalny czworokąt, to musi pozostawać w równowadze z tymi siłami. Na bok AB działają trzy siły: siła rozpychająca x przyłożona w środku boku oraz siły b i a pochodzące od boków BC i DA przyłożone w punktach B i A odpowiednio. Zatem $a + b + x = 0$, gdy bok AB będzie w równowadze. Dla składowych równoległych do AB to oznacza: $a_r + b_r = 0$, bo $x = x_p$, natomiast dla składowych prostopadłych mamy równanie: $a_p - b_p = 0$, ponieważ moment siły względem środka boku AB musi się zerować. Zatem siły a oraz b tworzą z prostą AB takie same kąty α . Analogicznie z pozostałymi bokami – tam odpowiednie kąty oznaczamy β, γ, δ – jak na rysunku.



Ponadto jeśli BC działa na AB siłą b , to AB działa na BC siłą minus b . Dostajemy natychmiast układ równań:

- 1) $\alpha + \beta + \angle ABC = \pi$
- 2) $\beta + \gamma + \angle BCD = \pi$
- 3) $\gamma + \delta + \angle CDA = \pi$
- 4) $\delta + \alpha + \angle DAB = \pi$

Gdy wyeliminujemy z tych równości $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, mamy od razu równość $\angle ABC + \angle CDA = \angle BCD + \angle DAB$.



Rozwiązanie zadania M 1160.

Z danej w treści zadania zależności rekurencyjnej uzyskujemy dla $n \geq 2$ związek

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = -1 = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2,$$

skąd

$$\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Zatem ciąg (b_n) określony dla $n \geq 2$ wzorem

$$b_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}$$

jest ciągiem stałym. W szczególności $b_n = b_2 = 4$, skąd otrzymujemy

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

A ponieważ a_1 i a_2 są liczbami całkowitymi, więc z ostatniej równości wynika, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi.



Rozwiązanie zadania F 685.

Niech prędkość roweru na finiszu będzie równa v , a siła oporu powietrza $F \approx \rho v^2 S$, gdzie ρ to gęstość powietrza, a S powierzchnia efektywna roweru, stawiająca opór pokonywanym warstwowi powietrza. W takim razie moc $P \approx Fv \approx \rho v^3 S$. Podstawiając $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$, $v \approx 60 \text{ km/h}$, $S \approx 0,5 \text{ m}^2$, otrzymujemy $P \approx 2 \text{ kW}$.



Rozwiązanie zadania F 686.

Przyjmijmy, że przy takim fikołku środek ciężkości układu podniesie się o $0,5 \text{ m}$.

Zatem z zasady zachowania energii

$$\text{mamy: } v = \sqrt{2g\Delta h} \approx 3 \text{ m/s}.$$

Patrz w niebo

Po latach tworzenia modeli jądra aktywnej galaktyki zdawało się, że astronomowie rozumieją już to zjawisko. Niewykluczone, że nadzieja ta była przedwczesna. Według popularnego zunifikowanego modelu jądrem aktywnej galaktyki jest bardzo masywna czarna dziura, którą otacza masywny i nieprzezroczysty torus, o rozmiarach wielu lat świetlnych, zasilający czarną dziurę w materię i pochłaniający część wyzwalającej się w niej energii. Torus ten powinien następnie pozbywać się pochłoniętej energii, emitując silne promieniowanie podczerwone. Obserwowaną różnorodność wśród tego rodzaju obiektów ma tłumaczyć kierunek, z jakiego takie aktywne jądro galaktyki widzimy. W niektórych bowiem przypadkach da się dostrzec samo centrum torusa, w innych torus przesłania czarną dziurę, sam jednak mechanizm zjawiska powinien być zasadniczo taki sam.

Tymczasem nie pasuje do tego modelu galaktyka M87. Jest to najbliższa wielka galaktyka eliptyczna, leżąca w gromadzie galaktyk w Pannie (Virgo), w odległości 15 Mpc. Obserwacje ruchów gwiazd w pobliżu centrum galaktyki, wykonane za pomocą kosmicznego teleskopu Hubble'a, potwierdziły obecność tam supermasywnej czarnej dziury o masie w przybliżeniu 3 mld mas Słońca. Z jądra galaktyki wylatuje typowa dla takich obiektów struga materii świecąca w wielu zakresach widma. Nie ma jednak charakterystycznego dla tych obiektów potężnego świecenia torusa w podczerwieni, a dokładniej – gdyby ten torus tam był, to byłby około 1000 razy słabszy, niż się spodziewano. Taki w każdym razie okazał się wynik obserwacji wykonanych kilka lat temu za pomocą jednego z 8-metrowych teleskopów Gemini na Hawajach. Można podejrzewać, że różnorodność wśród aktywnych jąder galaktyk jest jeszcze większa, niż się zdawało. Sam model zjawiska nie musi być jednak zagrożony. Niektórzy badacze uważają mianowicie, że w przypadku tak starej galaktyki jak M87 możemy być świadkami końcowej fazy jej aktywności: torus już został zużyty, a czarna dziura żywi się rzadkim gazem pozostałym w centralnych obszarach galaktyki.

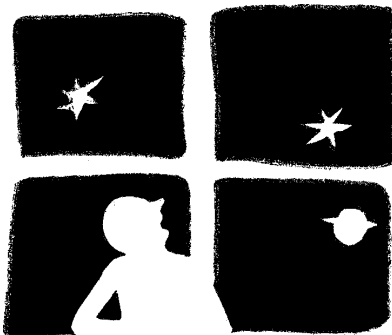
Tomasz KWAST

Luty

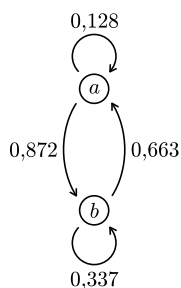
Gwiazdy widoczne na nocnym niebie są tak odległe, że rozmiary kątowe nawet największych i najbliższych są poniżej zdolności rozdzielczej niemal wszystkich teleskopów – powiedzmy, z wyjątkiem kilku teleskopów obecnie największych. Dlatego do niedawna żadnej gwiazdy nie widziano jako tarczy. Otóż w zimowe wieczory w całej okazałości widać Oriona, którego alfa, czyli Betelgeza, jest gwiazdą tak wielką (czerwony nadolbrzym blisko 1000 razy większy od Słońca) i położoną na tyle niedaleko (150 pc), że w wielkich współczesnych teleskopach jej tarczę w zasadzie widać. Jednak jej średnicę zmierzono już niemal wiek temu, bo w roku 1919, metodą interferometryczną, za pomocą 2,5-metrowego teleskopu na Mount Wilson w Kalifornii. Był to jeden z pierwszych (bezpośrednich!) pomiarów średnicy gwiazdy.

Wenus jest na granicy Wodnika i Ryb i widać ją krótko nad ranem we wschodniej części nieba. Mars jest w Strzelcu i praktycznie nie widać go z powodu bliskości Słońca. Jowisz jest w Wężowniku i widać go przed wschodem, a Saturn na granicy Raka i Lwa i widać go przez całą noc (10 II w opozycji). Pełnia Księżyca wypada 2 II, nów 17 II. W lutym Księżyc zakryje Saturna 2 II – zobaczą to mieszkańcy centralnej Azji, Regulusa 3 II – co będzie widać w północnych obszarach Ameryki Północnej, Spikę 8 II – to z kolei będzie widać na południu Ameryki Południowej, i Antaresa 11 II – a to będzie widać na Antarktydzie i w okolicach. Merkury znajdzie się kątowo najdalej od Słońca 7 II i można go próbować odszukać po zachodzie Słońca. Żadnych zaćmień ani przewidywalnych rojów meteorów w lutym nie będzie.

T. K.



	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	0,128	0,872
<i>b</i>	0,663	0,337



Twierdzenie ergodyczne *Rafał SZTENCEL*

W 1913 roku rosyjski matematyk Andriej Andriejewicz Markow (senior) dokonał analizy statystycznej ciągu 20 000 liter poematu Puszkina „Eugeniusz Oniegin”, badając następstwa samogłoska/spółgłoska [1], i uzyskał wyniki przedstawione obok.

Z pierwszego wiersza tabeli odczytujemy, że po samogłosce (*a*) w 87,2% przypadków następuje spółgłoska (*b*); pozostałe 12,8% przypadków to samogłoski.

Jest to prawdopodobnie pierwszy opublikowany przykład analizy statystycznej tekstu. Autor chciał sprawdzić, czy można traktować badany ciąg znaków – choćby w przybliżeniu – jako obiekt, zwany obecnie łańcuchem Markowa.

Wyobraźmy sobie najpierw, że litery są losowane niezależnie, a prawdopodobieństwa nie zależą od numeru losowania. Dobrze wiadomo, że częstości liter będą się stabilizować (jest to prawo wielkich liczb), będzie też zachodzić centralne twierdzenie graniczne: odchylenia częstości od prawdopodobieństwa w długiej serii mają rozkład zbliżony do normalnego.

Załóżmy teraz, że szanse wylosowania kolejnej litery zależą od tego, jaką wylosowano poprzednio. Można powiedzieć, że mamy do czynienia z grą planszową, gdzie ewolucja układu zależy od prawdopodobieństw przejścia z *i*-tego do *j*-tego stanu. Tak jak w grze planszowej, losowania są niezależne.

Markow bada zatem łańcuch o dwóch stanach: *a*, *b* i prawdopodobieństwach przejścia tworzących macierz 2×2 . Okazuje się, że po długim czasie łańcuch niejako zapomina, skąd wystartował, i prawdopodobieństwa pobytu w stanach *a* i *b* zbiegają do dodatnich granic, które oznaczymy także literami *a* i *b*. Oczywiście, $a + b = 1$. Liczby *a* i *b* wyznaczają tzw. rozkład stacjonarny.

Dokładniej, zbieżność do (jedynego) rozkładu stacjonarnego ma miejsce, jeśli stanów jest skończony wiele, każde dwa stany komunikują się (tj. możliwe jest przejście między stanami, być może w wielu krokach), a ponadto stany są nieokresowe (największy wspólny dzielnik czasów powrotu równy 1). Jest to twierdzenie ergodyczne. Wynika z niego odpowiednik prawa wielkich liczb dla łańcuchów Markowa.

Jak wyznaczyć rozkład stacjonarny? Musi on być niezmienniczy ze względu na działanie macierzy przejścia (dlaczego?). Jak czytamy w [2], Markow rozwiązał układ równań:

$$(*) \quad [a, b] \begin{bmatrix} 0,128 & 0,872 \\ 0,663 & 0,337 \end{bmatrix} = [a, b], \quad a + b = 1,$$

i okazało się, że $[a, b] = [0,432; 0,568]$. Na tej podstawie powziął przypuszczenie, że w tekście „Eugeniusza Oniegina” powinno być 43,2% samogłosek i 56,8% spółgłosek. I rzeczywiście tak jest.

Analogiczny eksperyment przeprowadzony na X księdze „Pana Tadeusza” (Emigracja. Jacek; 31676 liter, 13087 spółgłosek, 18589 samogłosek), daje następujące wyniki (w nawiasach kwadratowych liczby przejść):

	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	0,152289 [1993]	0,847711 [11094]
<i>b</i>	0,596805 [11094]	0,403195 [7495]

Rozwiązanie układu równań (*) daje $[a, b] = [0,413152; 0,586848]$, co podejrzanie dobrze zgadza się z częstościami samogłosek i spółgłosek. Zabawne, że faktyczna zgodność jest idealna. Nietrudno zobaczyć, że dla konkretnego ciągu znaków tak musi być. Jest to prosta arytmetyka, a nie twierdzenie ergodyczne i prawo wielkich liczb, co zdaje się sugerować komentarz do wyników Markowa [2].

Na rozgrzewkę można wykazać, że liczba przejść z *a* do *b* jest taka sama, jak z *b* do *a* (jeśli uwzględnimy przejście z ostatniego znaku do pierwszego).

Macierze przejścia dla rosyjskiego i polskiego różnią się, można więc identyfikować za ich pomocą język, co więcej – również autora. Nie ulega wątpliwości, że próbki tekstów Witkiewicza i Lema to najczystsza polszczyzna. Tuwimowi udało się zredukować częstość samogłosek do 36%, a macierz przejścia sugerowałaby raczej ekstremalny język czeski (*strč prst skrz křk*).

Sturba wasza włań chełbiasta!
Stanisław Ignacy Witkiewicz, *Szewcy*,
cytat być może niedokładny.

Apentula niewdziosek, te będą grubaśne,
W koć turmiela weprzącznie, kostrą bajtę
spoczy,

Oproszędy zniemęci, wyświrle uwzroczy,
A korśliwe porsacze dogremnie
wyczkaśnie.

Stanisław Lem, *Cyberiada*.

Przez gwiezdne niebo jak przez durszlak
Noc sieje żdźbła mdle blasków ostrych.
Gwóźdź Kacper mknie przez twardych
dróg szlak

I idą za nim słupy wiorst pstre.

Julian Tuwim, *Jeszcze jeden wiersz poety
Andrzeja Wiktora Butnego*.

A. A. Markow (1856–1922) brał czynny udział w rosyjskim ruchu liberalnym. W tymże 1913 roku, gdy uroczystość obchodzono w Petersburgu 300-lecie panowania Romanowów, Markow zorganizował konkurencyjne obchody 200-lecia odkrycia prawa wielkich liczb przez Bernoulliego. Fakty z życia Markowa podajemy za [2].

Literatura

[1] A. A. Марков, *Пример статистического исследования над текстом „Евгения Онегина” иллюстрирующий связь испытаний в цепь*, Изв. Акад. Наук, СПб. VI серия, т. 7, 1913, No. 3, стр. 153–162.

[1*] A. A. Markow, *An Example of Statistical Analysis of the Text of Eugene Onegin Illustrating the Association of Trials into a Chain*, Bulletin de l’Académie Impériale des Sciences de St. Petersburg, Ser. 6, vol. 7 (1913), pp. 153–162.

[2] J. Laurie Snell, *Introduction to Probability*, Random House/Birkhäuser, New York 1988.