

Nagrodę Dziekanów






dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*
w roku akademickim 2007/2008

uzyskał

Tomasz Bartnicki

za artykuł *Największa liczba na świecie*
zamieszczony w numerze 3(406)/2008

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (417)

Czarne dziury w weekend – przewodnik praktyczny <i>Bożena Czerny</i>	str. 1
 Zadania	str. 4
Kosmiczna linijka 2. Proxima Centauri <i>Bożena Czerny, Agnieszka Janiuk</i>	str. 5
Konkurs zadań astronomicznych	str. 5
Algorytm SPFA <i>Krzysztof Piecuch</i>	str. 6
Graficzna interpretacja sum ciągów arytmetycznych <i>Gustaw Sierżputowski</i>	str. 8
VI Międzynarodowa Olimpiada Lingwistyki Teoretycznej, Matematycznej i Stosowanej	str.10
 Okna gotyckie i trójliście <i>Wojciech Guzicki</i>	str.12
 Poznajemy zjawisko rozszerzalności cieplnej <i>Stanisław Bednarek</i>	str.14
Informatyczny kącik olimpijski (17): Rozkłady jazdy <i>Filip Wolski</i>	str.16
 Przemawiające obrazy <i>Andrzej Walat</i>	str.17
Klub 44	str.18
Aktualności	str.23
Patrz w niebo	str.24
Luty	str.24
 Króliki i szufladki w geometrii <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Grzegorz Sitarski, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński, Andrzej Walat, Piotr Zalewski – z-ca red. nac. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delt”, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 022-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 022-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl, e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2009 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2009 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 0-804-200-600

Cena prenumeraty w 2009 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 022-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 0-800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

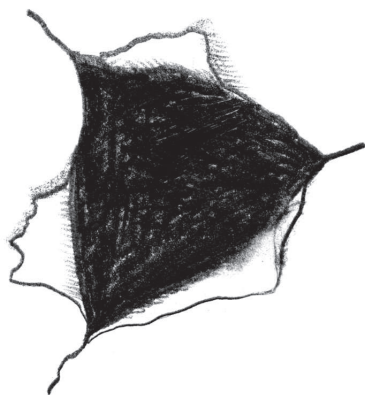
Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze:
Zgrubna geometria

Czarne dziury w weekend – przewodnik praktyczny

Bożena CZERNY

Ogólna teoria względności (OTW) jest koncepcyjnie prosta, gdy się już ją uda zrozumieć. Materia wypełniająca przestrzeń (dokładniej – czasoprzestrzeń) określa geometrię tej czasoprzestrzeni, a geometria czasoprzestrzeni określa z kolei jak wygląda ruch materii. Jednak matematyczna strona tej teorii jest bardzo złożona i wykład uniwersytecki, zapoznający studentów z podstawami OTW, trwa zazwyczaj cały rok. Albert Einstein też się zresztą sporo namęczył, zanim ubrał swoją ideę w postać matematycznych równań. Co więc można zrobić w weekend? Proszę poczytać dalej.



Ale najpierw dygresja. Warto czasami pójść do księgarni i rozejrzeć się. Jest tam pełno podręczników obiecujących naukę czegoś w weekend. Ja kiedyś kupiłam dla siebie i syna książeczkę pod tytułem „Nauka narciarstwa w weekend”. Nabyliśmy też używane narty i na stok! Tak więc sobie teraz pomyślałam, że skoro kiedyś ktoś potrafiący jeździć na nartach zechciał napisać takie dzieło dla tych, którzy nie opanowali tej trudnej sztuki, to może ja się teraz odwzięczę i, jako osoba nieco wtajemniczona, przybliżę OTW tym, którzy jej nie znają na tyle, aby sami mogli sobie coś obliczyć.

Oczywiście, nie da się opisać w uproszczony sposób sytuacji najbardziej ogólnej, ale trzeba się skupić na stosunkowo prostym zagadnieniu. Skupię się więc na opisie czarnej dziury.

Czarna dziura to ekstremalny przejaw OTW. Na trop jej istnienia natrafiono jednak już dużo wcześniej, niż powstała OTW. Pierwszy zasugerował to w bardzo przekonujący sposób John Mitchell w roku 1784. Rozważył on po prostu problem prędkości ucieczki z powierzchni ciała o masie M i promieniu R . Prędkość ucieczki łatwo obliczyć w ramach teorii Newtona – wystarczy określić, dla jakiej prędkości energia całkowita cząstki o masie m (energia kinetyczna plus energia potencjalna) jest równa 0 (G oznacza stałą grawitacji):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0.$$

Masa cząstki m skróci się w tych rachunkach i otrzymamy

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

znaną nam wszystkim drugą prędkość kosmiczną. Ale Mitchell pomyślał: co będzie, jeżeli rozważymy światło, które ma znaną prędkość c (300 000 km/s)? Okazuje się wówczas, że dla znanej masy mamy pewną charakterystyczną wartość promienia

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}.$$

Jeżeli jakieś ciało przy tej samej masie miałoby mniejszy promień, to prędkość ucieczki byłaby większa niż prędkość światła. A zatem światło nie mogłoby wydostać się z takiej gwiazdy i dotrzeć do odległego obserwatora! Taka gwiazda wydawałaby się czarna (nie świeciłaby) i – jak zauważył Mitchell – jej obecność można by wykryć tylko dzięki jej oddziaływaniu grawitacyjnemu na ruch innych, świecących ciał.

Taka prosta argumentacja nie musi być poprawna, ponieważ – jak teraz wiemy – teoria Newtona stosuje się tylko do ciał poruszających się z małymi prędkościami w stosunku do światła. A jednak w tym akurat wypadku wszystko jest w porządku – OTW w pewnym sensie potwierdza taki dokładny wynik! Mówiąc precyzyjniej, wkrótce po sformułowaniu OTW przez Einsteina Karl Schwarzschild znalazł ściśle rozwiązanie równań opisujących pole grawitacyjne wokół sferycznie symetrycznej masy w obszarze, gdzie masy już nie ma (tzw. rozwiązanie próżniowe). Rozmiar źródła pola grawitacyjnego nie ma w tym przypadku znaczenia. Może to być duża gwiazda – jak Słońce, albo coś bardziej zwarte. Ale jeżeli jest to coś bardziej zwartego, to w opisie pola

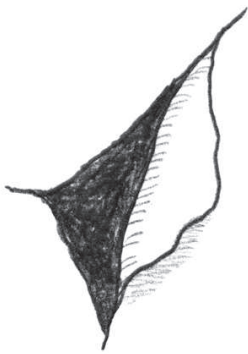
Rozwiązania zadań lingwistycznych

Zadanie 1.

1. Apostrof oznacza długość, jeżeli znajduje się po samogłosce, a czyta się jako [ə], jeżeli jest po spółgłosce.
2. Litera *w* oznacza zaokrąglenie warg, jeżeli znajduje się po spółgłosce, a głoskę [w] w pozostałych przypadkach.
3. [ə] wymawia się, chociaż nie jest zapisywane, między dowolną spółgłoską i następującą sonorą ([l m n]).
4. [ə] jest wymawiane także przed grupami spółgłosek na początku wyrazów.
5. *p t j g gw q qw* są wymawiane jako dźwięczne spółgłoski ([b d j g g^w ʧ ʧ^w]) na początku wyrazu i między samogłoskami, a jako bezdźwięczne ([p t c k k^w x x^w]) na końcu wyrazu oraz w sąsiedztwie innej spółgłoski.

Odpowiedzi.

- (a) [əksənˈdɔjɔn], [ətəkəbɔx], [gəmɨjəmin], [emtoj^watk], [débəlc];
 (b) tp'te'sn, mtesgm, alapt'g, glamen.



gravitacyjnego pojawia się czynnik $1 - \frac{2GM}{rc^2}$, który jest równy zero dokładnie dla $r = R_S$, stąd wartość tego promienia nosi nazwę promienia Schwarzschilda. Jego wartość określa horyzont czarnej dziury.

O tym, co charakteryzuje czarną dziurę, można przeczytać w wielu książkach popularno-naukowych, więc nie o tym będę pisać, skoro obiecałam rachunki z uwzględnieniem efektów OTW. Poza tym to, co pod horyzontem, jest mało interesujące, bo i tak tego nie widać. Interesujący jest ruch cząstek **ponad** horyzontem, bo tylko obserwując go wykryjemy czarną dziurę.

Ruch cząstek w mechanice Newtona możemy śledzić, ponieważ znamy postać potencjału pola gravitacyjnego $\Psi = -\frac{GM}{r}$ i oczywiście nie ma w nim miejsca na jakiś „horyzont”. To co zrobić, żeby było? Proste, wystarczy napisać, że

$$\Psi = -\frac{GM}{r - R_S}.$$

Coś takiego zapowiada się już znacznie lepiej, ponieważ widać, że przy horyzoncie czarnej dziury, czyli dla r dążącego do R_S , potencjał ten dąży do nieskończoności, a rachunki należy ograniczyć do obszaru $r > R_S$. I już! Najważniejsza część kursu „Czarne dziury w weekend” za nami. Teraz pozostaje zobaczyć, co oznacza ta modyfikacja, czy ma ciekawe konsekwencje, no i wspomnieć, jak to się ma do „uczciwych” rachunków.

Ciekawy, a zarazem stosunkowo prosty, jest przypadek ruchu po okręgu. Prędkość w ruchu po okręgu wyznacza się z warunku, że siła gravitacyjna jest siłą dośrodkową. Kinematykę pożyczamy z mechaniki Newtona, gdzie siła dośrodkowa zależy od promienia orbity r i prędkości v_k jak $F_{\text{doś}} = mv_k^2/r$. Siłę gravitacyjną musimy jednak teraz obliczyć z nowego potencjału. Robi się to przez zróżniczkowanie potencjału i pomnożenie przez masę cząstki, co daje

$$F_{\text{grav}} = \frac{GMm}{(r - R_S)^2}.$$

Zatem już możemy określić prędkość cząstki na orbicie kołowej wokół czarnej dziury jako

$$v_k = \frac{\sqrt{GMr}}{r - R_S}.$$

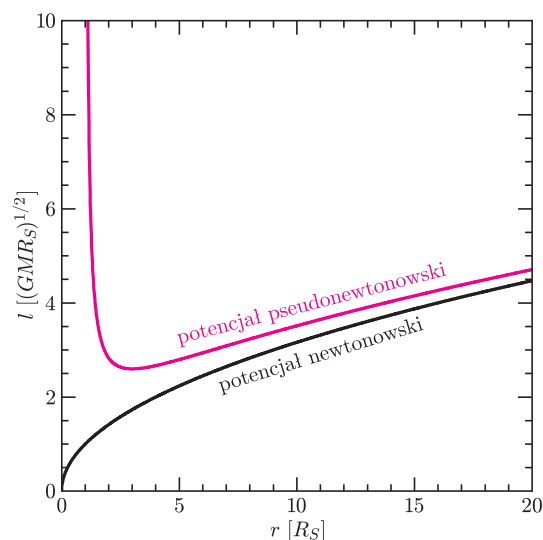
Widać, że – jak w mechanice Newtona – dla dużych promieni prędkość spada jak odwrotność pierwiastka z r (bo wtedy $r - R_S$ jest prawie równe r), a dla malejących wartości promienia rośnie do nieskończoności. Jedyna różnica jest taka, że teraz ta nieskończoność nie jest w $r = 0$, lecz w $r = R_S$.

A jednak zmiana jest istotna, a nie tylko kosmetyczna. Widać to wyraźnie dopiero wtedy, gdy określimy nie prędkość, lecz moment pędu na orbicie kołowej. Ze szkoły wiadomo, że moment pędu cząstki o jednostkowej masie na takiej orbicie to prędkość pomnożona przez r , czyli $l_k = \sqrt{GM}r^3/(r - R_S)$. Widać, że moment pędu (na jednostkę masy) rośnie do nieskończoności, gdy zbliżamy się do horyzontu czarnej dziury! To już wygląda dramatycznie odmiennie od sytuacji w teorii Newtona. W niej bowiem moment pędu na orbicie kołowej (zerowy w $r = 0$) rośnie monotonicznie z odległością r . Tu nie. Z wykresu tego nowego momentu pędu (rys. 1) widać, że w dużej odległości od czarnej dziury rośnie on wraz z r jak w teorii Newtona, ale w pewnej odległości ma minimum, a bliżej rośnie z malejącym r !

Jeżeli ktoś potrafi różniczkować, to może osobiście obliczyć, dla jakiego promienia występuje to minimum. W tym celu wystarczy obliczyć pochodną funkcji $l_k(r)$ względem r i przyrównać ją do zera. Wynik tego ćwiczenia to ładna wielkość

$$R_{\text{ISCO}} = 3R_S.$$

Jej nazwa jest nieco skomplikowana, ale sprawa zaraz się wyjaśni.



Rys. 1. Rozkład gęstości momentu pędu

Zadanie 2.

(a) Każdy wers zawiera 6 sylab. Obowiązuje aliteracja (por. treść zadania), natomiast rym wewnętrzny tworzy się według następujących zasad: oznaczmy samogłoski (i ich połączenia) występujące w jednym wersie kolejno przez V1, V2, . . . , V6. Przynajmniej jedna spółgłoska, która znajduje się bezpośrednio po V5, powinna znajdować się bezpośrednio po Vn dla $n = 1, 2$ albo 3. W wersach parzystych jest przy tym $Vn = V5$. Porównaj na przykład wersy IV,1–6 (aliteracja jest zaznaczona czcionką półtłustą, rymy wewnętrzne są podkreślane):

IV

- 1 háði gramr, þars gnúðu,
- 2 geira hregg við seggi,
- 3 (rauð fnýsti ben blóði)
- 4 bryngögl í dyn Sköglar,
- 5 þás á rausn fyr ræsi
- 6 (réð egglitúðr) seggir . . .

(b) V

- 1 ríks (þreifsk reiddra óxa
- 2 rymr; knóttu spjór glymja)
- 3 svartskyggð bitu seggi
- 4 sverð þjóðkonungs ferðar,
- 5 þás (hugfyldra hólða)
- 6 hlaut andskoti Gauta
- 7 (hótt vas söngr of svírum)
- 8 sigr (flugbeiddra vagra).

Pozostałe wyrazy to: hoegra i smíði.

Zastanówmy się, jakie konsekwencje ma fakt, że w nowym potencjale moment pędu na orbicie kołowej ma minimum. Wyobraźmy sobie, że jakieś cząstki krążą na orbitach kołowych wokół czarnej dziury. Aby przejść na niższą orbitę, cząstka zazwyczaj musi wytracić część swojego momentu pędu. Tak jest zawsze w teorii Newtona, tak też jest i teraz, jeżeli tylko orbita cząstki jest większa niż R_{ISCO} . Mówimy, że istnieje bariera momentu pędu, zapobiegająca opadaniu materii na obiekt centralny. W teorii Newtona taka bariera istnieje zawsze, dla wszystkich orbit kołowych. Teraz natomiast mamy taką sytuację, że jeżeli cząstka jakoś utraci tyle momentu pędu, że znajdzie się na orbicie $r = R_{\text{ISCO}}$, to dalej może spadać na czarną dziurę już bez utraty momentu pędu. Dla mniejszych promieni naturalny moment pędu na orbicie kołowej jest wszak większy, nie ma więc możliwości, by znalazły się tam jakieś cząstki. O takich orbitach mówimy, że są niestabilne. Najdrobniejsze zaburzenie powoduje, że cząstka zmienia charakter ruchu – w tym wypadku spada na czarną dziurę. Dlatego orbita $r = R_{\text{ISCO}}$ nazywa się po angielsku *Innermost Stable Circular Orbit*, tj. Najbardziej Wewnętrzna Stabilna Orbita Kołowa, stąd skrót ISCO.

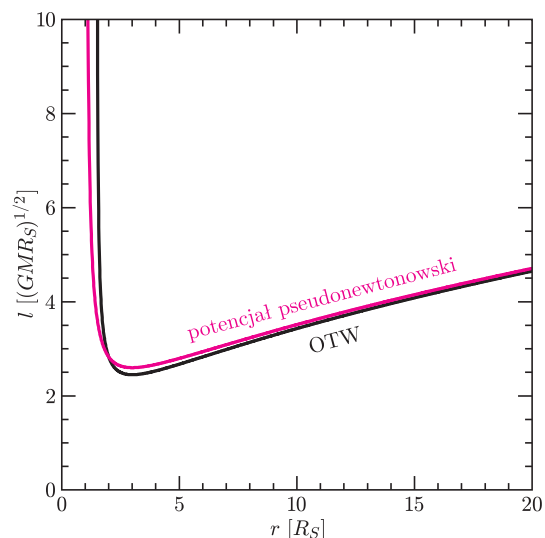
Czy taka ciekawostka może mieć jakieś „praktyczne” konsekwencje? Otóż ma. Astronomia współczesna sporą część swojej aktywności poświęca obserwacjom opadania materii na czarne dziury. Dzięki czarnym dziurom działają słynne kwazary, tj. źródła promieniowania o jasnościach przewyższających setki i tysiące razy łączne świecenie gwiazd macierzystej galaktyki, w której czarna dziura się znajduje. Tak samo działają źródła promieniowania rentgenowskiego w naszej Galaktyce, a także w pobliskich galaktykach, gdzie ostatnio też udaje się je dostrzec. Galaktyczne obiekty zawierające czarne dziury świecą nie tak jasno, bo ich masy są niewielkie, zaledwie kilka czy kilkanaście razy większe od masy Słońca, podczas gdy czarne dziury w kwazarach mogą mieć masy nawet bliskie dziesięciu miliardom mas Słońca, mogą więc wychwycić grawitacyjnie znacznie więcej gazu ze swojego otoczenia, przez co gaz ten może wyprodukować więcej promieniowania.

Mechanizm produkcji energii jest ten sam w obu typach obiektów. Materia – stosunkowo chłodny gaz o znacznym momencie pędu – napływa z otoczenia i osiada na kołowych orbitach wokół czarnej dziury. Materii jest sporo, więc w wyniku turbulencji kłębi się ona, powoli traci moment pędu na rzecz odległych obszarów i dryfuje do środka. Prędkość tego dryfu jest tysiące razy mniejsza od prędkości ruchu orbitalnego. Tak wygląda dysk akrecyjny.

Jak daleko od środka on się rozciąga? Do samego horyzontu czarnej dziury? Tak podpowiadałaby mechanika Newtona, ale według udawanej OTW jest inaczej: dysk akrecyjny sięga tylko do R_{ISCO} , a głębiej materia już tylko

szybko, wręcz błyskawicznie spada. Może to więc wyglądać tak, że w centrum mamy czarną dziurę o promieniu horyzontu R_S , dalej pierścieniową przerwę do $R_{\text{ISCO}} = 3R_S$, a dalej dysk akrecyjny. Niestety, obserwacje nie osiągnęły jeszcze dostatecznej zdolności rozdzielczej, by taki obraz zobaczyć. Jednak z jednej strony w przeciągu 10–20 lat powinno to stać się możliwe, gdyż rozwój technik interferometrycznych jest oszałamiający, a z drugiej strony astronomowie próbują to zobaczyć pośrednio, przez badanie widma promieniowania obiektów zawierających czarne dziury. To jednak jest już inna historia.

A co z tym dziwnym potencjałem? Otóż zgodnie z nim przebieg momentu pędu na orbicie kołowej wokół nierotującej czarnej dziury jest imponująco podobny do przewidywanego przez metrykę Schwarzschilda (rys. 2). W szczególności wartość promienia, gdzie moment pędu ma minimum, odtwarza się dokładnie; ścisła wartość to naprawdę $3R_S$! Niestety, OTW przewiduje również możliwość, że źródło pola grawitacyjnego ma moment pędu (mówimy, że czarna dziura rotuje), a wtedy pole grawitacyjne zależy od tego momentu pędu – im jest on większy, tym mniejszy jest horyzont



Rys. 2. Rozkład gęstości momentu pędu

Zadanie 3. W obu językach przydawka następuje po wyrazie określanym.

(a)
jun – kość,
i-jun – szkielet (mnóstwo kości),
i-wahnawa – wiązka bananów
 (mnóstwo bananów),
i-drai – kalendarz (mnóstwo dni),
drai-hmitrötr – niedziela (święty dzień),
gaa-hmitrötr – sanktuarium

(święte miejsce),
uma-hmitrötr – kościół (święty dom),
ngöne-uma – ściana (granica domu),
ngöne-gejē – wybrzeże (granica wody),
nyine-thin – szydło (narzędzie kłuc),
tii – pisać,
bé-tii – ołówek (narzędzie pisać),
bé-wöli – widelec (narzędzie kłuc),
wöta – zwierzę,

bé-wöli-wöta – ostroga
 (narzędzie kłuc zwierzę),
bé-ödu – szklanka (narzędzie pić),
ba-jié – wybrzeże (granica wody),
ba-bwén – zmierzch (granica nocy),
a-pulut – łóżko (miejsce spać).

(b)
wahnawa ‘banan’, *drai* ‘dzień’;
wöli ‘kłuc’, *pulut* ‘spać’.

(c)
i-bii ‘rój pszczół (mnóstwo pszczół)’,
tusi-hmitrötr ‘Biblia (święta księga)’.

czarnej dziury i promień najbardziej wewnętrznej stabilnej orbity kołowej (jeżeli cząstka krąży w tym samym kierunku, w którym obraca się czarna dziura). Tego już nie da się odtworzyć bez porządnego nauczania się OTW. Obserwacje jednak nie są jeszcze tak precyzyjne, żeby tę rotację czarnej dziury można było wyznaczać w sposób godny zaufania (choć oczywiście są liczne próby i metody podejścia do tego zagadnienia). W wielu więc przypadkach warto ten dziwny potencjał zastosować i tak też się robi.

A skąd on się w ogóle wziął? Wymyślił go niedawno zmarły prof. Bohdan Paczyński, gdy jeszcze pracował w Warszawie, pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku. Prof. Paczyński bardzo się wtedy zainteresował problemem akrecji materii na czarną dziurę, zderzył się jednak z obliczeniowymi trudnościami piętrzącymi się w samej OTW. Przez pewien czas pracował z pomocą specjalistów w tej dziedzinie, ale w końcu uznał, że właściwie nie ma powodów męczyć się z zaawansowanym formalizmem, skoro wtedy i tak nie było wiadomo, co się w pobliżu czarnej dziury dzieje (teraz jest nieco lepiej, ale też nie wszystko wiemy). No i wymyślił potencjał przedstawiony w tym artykule i opublikował w 1980 roku. Praca ta była już cytowana w literaturze ponad 500 razy, co jest naprawdę dobrym wynikiem w astronomii. W praktyce przypadków jej użycia było więcej, gdyż wielokrotnie nie była ona wspominana, jak nie wspomina się formalnie publikacji Einsteina, pisząc o OTW.

Mam więc nadzieję, że drogi Czytelnik, po przeczytaniu tego tekstu, poznał jakąś część OTW. Co prawda, chyba w takim stopniu, w jakim ja w weekend nauczyłam się jeździć na nartach. Po zapoznaniu się z książką nie zaczęłam od razu z wdziękiem śmigać po stoku, na co po cichu liczyłam, udało mi się jednak zjechać z góry w sposób kontrolowany i nabrałam przekonania, że jazdy na nartach można się nauczyć, tylko trzeba dalej próbować. To samo jest z OTW. Tak więc życzę miłego dalszego próbowania.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 733. Kiedyś w czasie mroźnych zim przykrywano gazetą stojące w sieni wiadro z wodą. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 15

F 734. W niektórych starych zegarach, przeznaczonych do pracy na odkrytym powietrzu, wahadło składa się z długiej rurki zakończonej pojemnikiem z rtęcią. Czemu służyła taka konstrukcja wahadła?

Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1231. Liczby całkowite dodatnie spełniają warunek

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2.$$

Wykazać, że liczba $a + b + c + d$ jest liczbą złożoną.

Rozwiązanie na str. 7

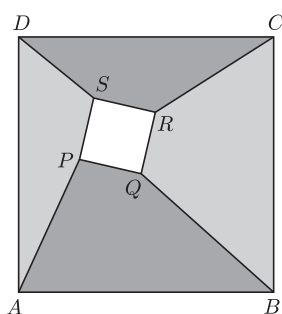
M 1232. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ umieszczono (w dowolnym miejscu) kwadrat $PQRS$, jak pokazano na rysunku. Dowieść, że suma pól czworokątów $ABQP$ i $CDSR$ jest równa sumie pól czworokątów $DAPS$ i $BCRQ$.

Uwaga: Ta oraz kilka innych konfiguracji geometrycznych dotyczących „równych sum pól” przedstawione zostały na plakacie Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (zob. okładka).

Rozwiązanie na str. 24

M 1233. Udowodnić, że spośród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych ($n \geq 1$) można wybrać takie dwie a, b , że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez $2n$.

Rozwiązanie na str. 18



Kosmiczna linijka

2. Proxima Centauri: nasza najbliższa sąsiadka; odległość 0,77 pc (0,4 pc na linijce)



W odległości 4,24 roku świetlnego, w gwiazdozbiornie Centaura leży najbliższa nam gwiazda. Odległość do niej została zmierzona już w 1917 roku przez Voûte'a. Jest to dość niepozorny obiekt jak na gwiazdne standardy: ma masę niemal dziesięciokrotnie mniejszą od masy Słońca (dokładnie 0,107 masy Słońca) i promień siedmiokrotnie mniejszy (0,145 promienia Słońca), jest zatem niewiele większa od największych planet. Świeci z jasnością 10 000 razy mniejszą od jasności Słońca, a w związku z tym, mimo niewielkiej odległości, gwiazdy tej nie zobaczymy gołym okiem. Jest też znacznie bardziej czerwona niż Słońce, co wiąże się ze znacznie niższą temperaturą jej warstw powierzchniowych (ok. 3000 K).

Astronomowie klasyfikują Proximę Centauri jako gwiazdę typu M5.5V. Oznacza to w szczególności, że jest ona czerwonym karłem i należy do tak zwanego ciągu głównego – rodziny gwiazd na dosyć wczesnym etapie rozwoju, spalających w swym wnętrzu wodór i zamieniających go w hel (pod tym względem gwiazda ta jest podobna do Słońca). Obiekty o jeszcze mniejszej masie, poniżej 8% masy Słońca, nie stwarzają możliwości efektywnego zachodzenia reakcji termojądrowych i nie mogą stać się gwiazdami. Proxima Centauri może być nieco starsza od Słońca, jej wiek jest oceniany na 5–6 mld lat, podczas gdy Słońce liczy sobie 4,6 mld lat.

Choć Proxima Centauri jest tak niepozorna, to cechuje ją jednak znaczna aktywność rozblyskowa, którą gwiazda zawdzięcza istnieniu stosunkowo silnego pola magnetycznego o natężeniu kilkuset gausów. Rozbłyski te polegają na znacznym (nawet dwukrotnym) pojaśnieniu gwiazdy, są też widoczne w zakresie promieniowania rentgenowskiego.

Proxima Centauri w odróżnieniu od Słońca nie jest gwiazdą samotną, ale wchodzi w skład układu potrójnego – towarzyszy gwiazdzie Alpha Centauri, która jest z kolei ciasnym układem dwóch gwiazd, oznaczanych symbolami A i B. Sugerowany wcześniej związek fizyczny Proximy Centauri i Alpha Centauri potwierdziła ostatnio staranna analiza obserwacji wykonanych przez satelitę Hipparcos. Stwierdzenie związku nie było łatwe, ponieważ Proxima Centauri jest w znacznej odległości (ok. 15 000 j.a.) od Alpha Centauri – najjaśniejszej gwiazdy w konstelacji.

Poszukiwania planet wokół Proximy Centauri jak dotychczas nie dały rezultatu. W szczególności obserwacje prowadzone przez 7 lat przy użyciu europejskiego teleskopu VLT (*Very Large Telescope*) wykluczyły istnienie planety o masie większej niż masa Neptuna w odległości mniejszej niż 1 j.a. od gwiazdy macierzystej. Nasza najbliższa sąsiadka jest zatem najprawdopodobniej niezamieszkała...

Bożena CZERNY, Agnieszka JANIUK

Konkurs zadań astronomicznych

Na rozwiązania zadań A 3 i A 4 czekamy do 1 marca 2009 r. (decyduje data stempla pocztowego) pod adresem:

Centrum Astronomiczne
im. Mikołaja Kopernika
ul. Bartycka 18
00-716 Warszawa

A 3. Ile razy średnica cienia i półcienia Ziemi na Księżycu jest większa od średnicy Księżycy? Odległość Księżycy od Ziemi to 384 000 km, a jego średnica 3476 km. [1 pkt]

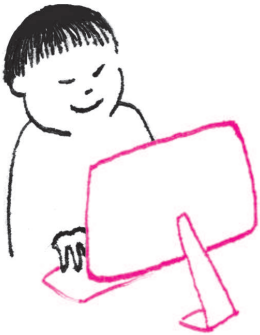
A 4. Albedo A Ziemi, tj. zdolność odbijania promieniowania, wynosi 0,39, zatem $1 - A$ promieniowania słonecznego ogrzewa Ziemię. Przyjmijmy, że Ziemia promieniuje jak ciało doskonale czarne. Oblicz średnią temperaturę Ziemi w stanie równowagi (tj. gdy tyle samo energii wyświeca, ile pochłania). [2 pkt]

Algorytm SPFA

Krzysztof PIECUCH*

„Dane są skierowany graf ważony $G = (V, E)$ z nieujemnymi wagami na krawędziach oraz dwa wyróżnione wierzchołki $s, f \in V$. Wagę krawędzi $u \rightarrow v \in E$ oznaczamy przez $w(u \rightarrow v)$. Należy znaleźć długość najkrótszej ścieżki z s do f .”

O algorytmie Dijkstry można poczytać w książce: T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein, *Wprowadzenie do algorytmów*.



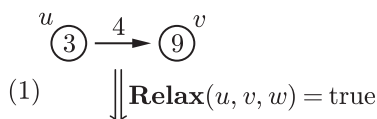
Gdyby to oto zadanie dać do rozwiązania przeciętnemu polskiemu studentowi informatyki, zapewne zaimplementowałby algorytm Dijkstry. Gdyby jednak to samo zadanie zadać studentowi z Chin, to prawdopodobnie wykorzystałby do rozwiązania – w Polsce niemal nieznaną – algorytm SPFA. Nic w tym dziwnego; jest on krótszy i dużo łatwiejszy do zaprogramowania.

Często bywa tak, że uogólniając problem, łatwiej jest znaleźć jego rozwiązanie. Nie inaczej jest w tym przypadku. Zamiast szukać najkrótszej ścieżki z s do f , znajdziemy najkrótsze ścieżki z s do wszystkich wierzchołków $v \in V$.

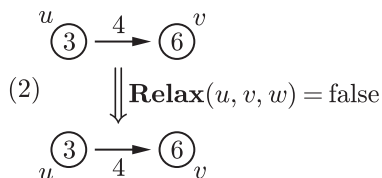
Schemat większości algorytmów rozwiązujących problem najkrótszej ścieżki jest taki sam. Każdemu wierzchołkowi v przypisujemy wartość $d[v]$. Będzie ona oznaczać najmniejszą znalezioną dotychczas długość ścieżki z s do v . Początkowe wartości elementów tablicy d nadaje poniższa prosta procedura.

```
Initialize Single Source( $G, s$ )
  for each  $v \in V$  do  $d[v] := \infty$ ;
   $d[s] := 0$ ;
```

Podstawową operacją, która modyfikuje wartość $d[v]$, jest relaksacja. Dla krawędzi $u \rightarrow v$ polega ona na sprawdzeniu, czy idąc tą krawędzią, dojdziemy do wierzchołka v szybciej, niż potrafiliśmy to zrobić do tej pory. Jeśli tak, to aktualizujemy wartość $d[v]$.



```
Relax( $u, v$ )
  if  $d[v] > d[u] + w(u \rightarrow v)$  then
     $d[v] := d[u] + w(u \rightarrow v)$ ;
  return true;
else return false;
```



Relaksacja. W sytuacji (1) funkcja **Relax** znajduje krótszą ścieżkę do wierzchołka v i aktualizuje $d[v]$. W sytuacji (2) próba znalezienia krótszej ścieżki nie udaje się – żadna wartość nie zostaje zmieniona.

Algorytmy Dijkstry, Bellmana–Forda oraz SPFA różnią się tylko tym, w jakiej kolejności i ile razy relaksują krawędzie. SPFA (ang. *Shortest Path Faster Algorithm*) jest ulepszoną wersją algorytmu Bellmana–Forda. Zaczniemy więc od opisu tego algorytmu. Składa się on z $|V| - 1$ faz, a w każdej z nich relaksowane są wszystkie krawędzie grafu. Koszt czasowy algorytmu Bellmana–Forda to zatem $\Theta(V E)$.

```
Bellman–Ford( $G, s$ )
  Initialize Single Source( $G, s$ );
  for  $i := 1$  to  $|V| - 1$  do
    for each  $u \rightarrow v \in E$  do
      Relax( $u, v$ );
```

Skąd bierze się taka, a nie inna liczba faz algorytmu Bellmana–Forda? Podzielmy wszystkie wierzchołki grafu na grupy: $V_0 = \{s\}, V_1, V_2, \dots$. W zbiorze V_i znajdują się wierzchołki, dla których pewna najkrótsza ścieżka z s składa się z i krawędzi i które nie znalazły się w żadnej grupie V_j dla $j < i$. Można pokazać przez łatwą indukcję, że po wykonaniu i -tej fazy algorytmu dla każdego z wierzchołków z V_i wartość w tablicy d jest ostateczna. Na koniec wystarczy zauważyć, że $V_i \neq \emptyset$ może zachodzić jedynie dla $i \leq |V| - 1$ (dlaczego?).

Zwróćmy teraz uwagę na następujące dwie sytuacje, w których relaksacja krawędzi $u \rightarrow v$ na pewno nie zmieni wartości $d[v]$:

- wartość $d[u] = \infty$;
- krawędź $u \rightarrow v$ była już relaksowana i od tego czasu wartość $d[u]$ nie uległa zmianie.

*student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski



Rozwiązanie zadania M 1231.

Zauważmy, że dana w treści zadania równość jest równoważna zależności

$$(a + b + c + d)(a - c + 2b - 2d) = (a + c)(-a + b + c - d).$$

A zatem, gdyby liczba $a + b + c + d$ była liczbą pierwszą, to musiałaby być dzielnikiem jednej z liczb $a + c$ lub $-a + b + c - d$. Jednak nie jest to możliwe, gdyż $a + c < a + b + c + d$ oraz $|-a + b + c - d| < a + b + c + d$. Wobec tego liczba $a + b + c + d$ jest liczbą złożoną.

W algorytmie Bellmana–Forda często wykonuje się tego typu niepotrzebne relaksacje.

Algorytm SPFA korzysta ze struktury danych zwanej kolejką bez duplikatów. Można na niej wykonać następujące operacje:

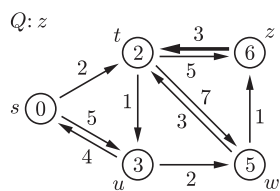
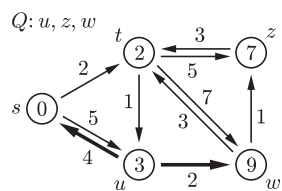
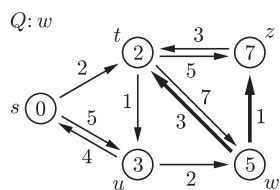
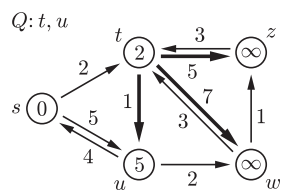
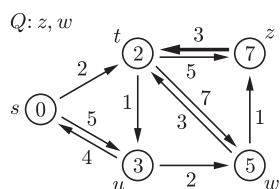
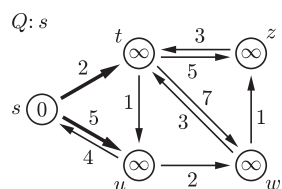
- **Init**(Q): tworzy pustą kolejkę bez duplikatów Q ;
- **Enqueue**(Q, v): wstawia element v do kolejki Q , o ile Q jeszcze go nie zawiera;
- **Dequeue**(Q): wyjmuję z kolejki element, który był wstawiony najwcześniej;
- **IsEmpty**(Q): zwraca prawdę, jeśli kolejka jest pusta; w przeciwnym przypadku zwraca fałsz.

Jeśli przyjmujemy, że elementami Q są liczby z zakresu od 0 do $m - 1$, to implementacja tej struktury danych może wyglądać następująco. Prócz zwykłej kolejki utrzymywać będziemy tablicę boolowską $T[0..(m-1)]$. Wartość $T[i]$ określa, czy element i znajduje się w kolejce, czy też nie. Trzeba teraz tylko, wstawiając i usuwając elementy kolejki, odpowiednio uaktualniać tablicę. W dalszej części artykułu kolejkę bez powtórzeń będziemy nazywać po prostu kolejką.

W algorytmie SPFA na kolejce Q przechowywane są wierzchołki grafu G . Wierzchołek u znajduje się w Q , jeśli spełnione są dwa warunki:

- wartość $d[u] \neq \infty$;
- krawędzie wychodzące z wierzchołka u nie były relaksowane lub od ostatniej relaksacji zmieniła się wartość $d[u]$.

W tym miejscu polecamy uwadze Czytelnika parę podobnie wyglądających warunków a), b) z wcześniejszej części tekstu.



Q : puste

Przykład działania algorytmu SPFA. Na rysunku pogrubiono krawędzie relaksowane. Choć $d[u]$ oraz $d[w]$ zostały zmienione dwukrotnie, to krawędzie wychodzące z tych wierzchołków relaksowaliśmy tylko raz. Było to spowodowane tym, że gdy zmieniliśmy po raz drugi wartość d tych wierzchołków, to były już one w kolejce. Natomiast wierzchołek z znalazł się w kolejce dwukrotnie, więc wychodząca z niego krawędź była relaksowana dwa razy.

Na początku jedynym wierzchołkiem spełniającym oba warunki jest s . Za każdym razem, gdy pobieramy z kolejki wierzchołek u , relaksujemy wszystkie krawędzie wychodzące z u . Jeśli relaksacja krawędzi $u \rightarrow v$ zmieni wartość $d[v]$, to wierzchołek v wstawiamy do kolejki. Algorytm kończy pracę, gdy kolejka staje się pusta.

SPFA(G, s)

```

Initialize Single Source( $G, s$ );
Init( $Q$ );
Enqueue( $Q, s$ );
while not IsEmpty( $Q$ ) do
     $u :=$  Dequeue( $Q$ );
    for each  $u \rightarrow v \in E$  do
        if Relax( $u, v$ ) then
            Enqueue( $Q, v$ );

```

Największą wadą tego algorytmu jest złożoność obliczeniowa. Dla pewnych grafów SPFA będzie działał tak samo kiepsko jak algorytm Bellmana–Forda, czyli w czasie $\Theta(VE)$ (czy potrafisz znaleźć przykład takiej rodziny grafów?). Jednak w praktyce algorytm radzi sobie bardzo dobrze. Wykonuje niewiele relaksacji, a dzięki prostej strukturze ma małą stałą. Do SPFA można też dodać pewne elementy losowości (na przykład przy wyborze kolejności relaksacji krawędzi wychodzących z ustalonego wierzchołka), co istotnie zmniejsza szansę na to, że dla danego grafu algorytm będzie bardzo nieefektywny.

Co jeszcze potrafi SPFA? Po dodaniu tablicy typu „z jakiego wierzchołka nastąpiła relaksacja” algorytm jest w stanie odtworzyć najkrótszą ścieżkę z s do dowolnego z wierzchołków. Dalej, na początku artykułu założyliśmy, że krawędzie grafu mają nieujemne wagi – bez tego warunku algorytm Dijkstry może nie zadziałać poprawnie. Jednak SPFA radzi sobie nie tylko z ujemnymi krawędziami, ale po drobnej modyfikacji wykryje również ujemne cykle w grafie. Jeśli natomiast chcemy obliczyć najkrótsze ścieżki między wszystkimi parami wierzchołków w grafie rzadkim, wystarczy uruchomić SPFA dla każdego możliwego wierzchołka startowego.

Dla grafu gęstego lepiej wykorzystać algorytm Floyd–Warshalla, także opisany we Wprowadzeniu do algorytmów.

Graficzna interpretacja sum ciągów arytmetycznych

Gustaw SIERZPUTOWSKI*

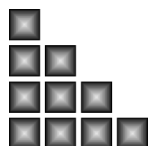
Pomysł na tę pracę powstał całkowicie przypadkowo, gdy otrzymałem zadanie obliczenia sumy kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego drugiego stopnia. Ponieważ zagadnienie to wybiegało poza zakres liceum i definicje ciągów arytmetycznych stopni wyższych niż jeden nie były mi znane, postanowiłem poszukać własnej metody dojścia do rozwiązania...

*uczeń, I LO w Bydgoszczy

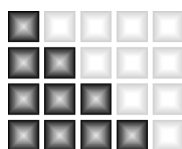
Na początek, jako wprowadzenie do metody, przedstawimy graficzny sposób otrzymania wzoru na sumę kolejnych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego. Zapiszmy ją od razu w następujący sposób:

$$n \text{ wyrazów} \left\{ \begin{array}{l} a_1 + \\ a_1 + r + \\ a_1 + r + r + \\ a_1 + r + r + r + \\ \dots \\ a_1 + \underbrace{r + r + r + \dots + (n-1)r}_{n-1 \text{ wyrazów}} \end{array} \right.$$

Zastąpmy teraz każdą z różnic r kwadratowym klockiem. Dla $n = 5$ będzie to



Przedstawiony zespół klocków może kojarzyć się nam z trójkątem. Po połączeniu go z drugą taką samą figurą otrzymamy prostokąt o polu $(n-1) \cdot n$, które podzielone przez 2 daje nam początkowo szukaną liczbę różnic



Potrąfimy już zatem zapisać wzór na sumę kolejnych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego pierwszego stopnia:

$$S_n^{(1)} = n \cdot a_1 + r \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Zdefiniujmy teraz następujący ciąg:

$$c_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n.$$

Suma pierwszych n wyrazów tego ciągu to

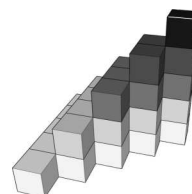
$$S_n = n + (n-1)2 + (n-2)3 + \dots + 3(n-2) + 2(n-1) + n,$$

co widać, gdy rozpiszemy ją tak, aby każdy wyraz znalazł się w osobnej kolumnie

$$n \text{ wyrazów} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \\ 1 + 2 + \\ 1 + 2 + 3 + \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \\ \dots \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n \end{array} \right.$$

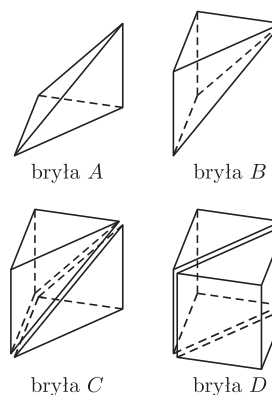
$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ wyrazów}}$

Przedstawmy teraz tę sumę w postaci bryły utworzonej z jednakowej wielkości sześciennych klocków (na rysunku dla $n = 5$).

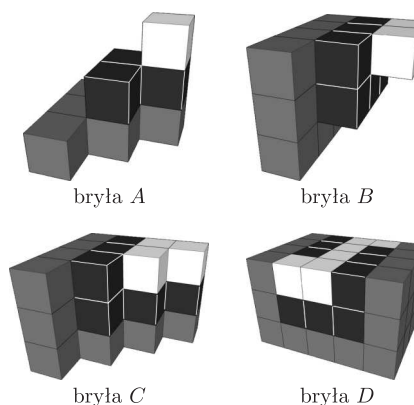


Konstrukcja ta, którą nazwiemy „A”, może przypominać nam ostrosłup. Możemy domyślać się więc istnienia bryły B o dwukrotnie większej objętości (a więc i liczbie klocków), takiej, że jeśli połączymy obie te konstrukcje, to otrzymamy bryłę C przypominającą wyglądem graniastosłup prawidłowy trójkątny. Po połączeniu dwóch konstrukcji C otrzymamy natomiast prostopadłościan, będący odpowiednikiem otrzymanego w poprzednim przypadku prostokąta.

Tak mniej więcej będą wyglądały dane bryły, gdy weźmiemy na tyle duże n , aby przestać zauważać krawędzie klocków.



A tak, gdy $n = 3$:



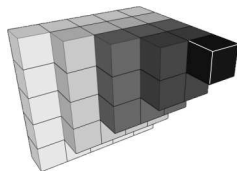
Widzimy więc, że w bryle D znajduje się dokładnie $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ sześciennych klocków. Oczywiście jest też, że $V_D = 2 \cdot V_C = 2 \cdot (V_A + V_B) = 6 \cdot V_A$. Możemy już zatem napisać wzór na sumę kolejnych wyrazów omawianego ciągu:

$$S_n = \frac{1}{6}n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2).$$

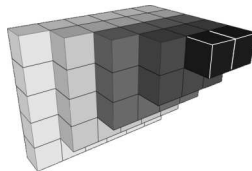
Przejdźmy teraz do sumy kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Przedstawmy ją od razu w sposób analogiczny do poprzednich.

$$n \text{ wyrazów} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \\ 2 + 2 + \\ 3 + 3 + 3 + \\ 4 + 4 + 4 + 4 + \\ 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + \\ \dots \\ n + n + n + n + n + \dots + n \end{array} \right. \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ wyrazów}}$$

Bardzo łatwo zauważyć podobieństwo trójwymiarowej interpretacji tej sumy do otrzymanej w poprzednim przykładzie bryły B (dla $n = 5$).



omawiana suma

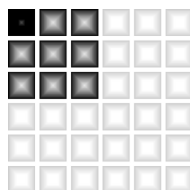


bryła B

Od razu możemy zauważyć, że po odjęciu „omawianej sumy” od sumy przedstawianej przez bryłę B otrzymamy sumę n kolejnych liczb naturalnych. Możemy więc bez problemu otrzymać wzór na sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych:

$$\begin{aligned} S_n^{(2)} &= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3} - \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = \\ &= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}. \end{aligned}$$

Gdy przedstawimy na płaszczyźnie n kolejnych składników sumy sześcianów liczb naturalnych, zauważymy, że zawsze można ułożyć z nich kwadrat o boku długości równej sumie n kolejnych liczb naturalnych.

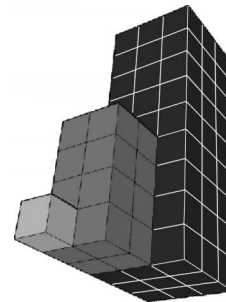


Otrzymujemy więc wzór na sumę:

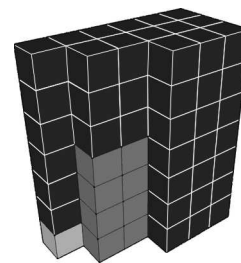
$$S_n^{(3)} = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2.$$

Rozważmy teraz sumę czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych. Utwórzmy graficzną postać sumy $1^4 + 2^4 + 3^4$ ułożonej w taki sposób, że w podstawie każdego z jej składników będzie kwadrat $n \times n$, natomiast wysokością będzie n^2 .

Połączmy takie prostopadłościany w sposób pokazany na rysunku.



Widzimy, że podstawa powstałej konstrukcji jest rozpisana na płaszczyźnie sumą kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Aby policzyć liczbę klocków budujących daną bryłę, należy przestawić je tak, by wyrównać wysokości kolumn, a następnie zmierzyć wysokość powstałej bryły.



Na podstawie dotychczasowych przykładów możemy także przypuszczać, że wzór na sumę k -tych potęg kolejnych liczb naturalnych jest wielomianem $k + 1$ stopnia. Spodziewamy się zatem wzoru na sumę o postaci:

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}(an^2 + bn + c).$$

Widzimy więc, że wysokość naszej bryły jest trójmianem kwadratowym. Możemy przypuszczać, że aby obliczyć jego współczynniki, należy za n podstawić trzy różne liczby naturalne i rozwiązać układ trzech równań (oczywiście, najprościej za n podstawić 1, 2 i 3). Po krótkich rachunkach otrzymujemy wzór na sumę czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych. Warto dodać, że wysokość rozpatrywanej bryły nie dla każdego n będzie liczbą naturalną, czyli w rzeczywistości nie zawsze da się przestawić klocki, wyrównując kolumny, jak dla $n = 3$

$$S_n^{(4)} = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30}.$$

Okazuje się, że metoda, którą otrzymaliśmy wzór na sumę czwartych potęg kolejnych liczb naturalnych, działa także dla wyższych potęg. Dzięki temu spostrzeżeniu możemy utworzyć następujący wzór rekurencyjny, w którym współczynniki trójmianu obliczamy, podstawiając wartości sumy dla małych n :

$$\begin{aligned} 1^k + 2^k + \dots + n^k &= \\ &= (1^{k-2} + 2^{k-2} + \dots + n^{k-2})(an^2 + bn + c), \end{aligned}$$

gdzie $k \geq 2$.

Na zakończenie przedstawimy graficzną postać sumy kolejnych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego II stopnia. Ponieważ jest to ciąg mało popularny, zaczniemy od jego definicji.

Ciągiem arytmetycznym drugiego stopnia nazywamy ciąg (a_n) , w którym różnica $(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n)$ jest stała dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że ciąg

$$(a_2 - a_1), (a_3 - a_2), \dots, (a_n - a_{n-1}), \dots$$

jest ciągiem arytmetycznym (pierwszego stopnia).

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$a_2 - a_1 = r_1, \quad (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = r_2.$$

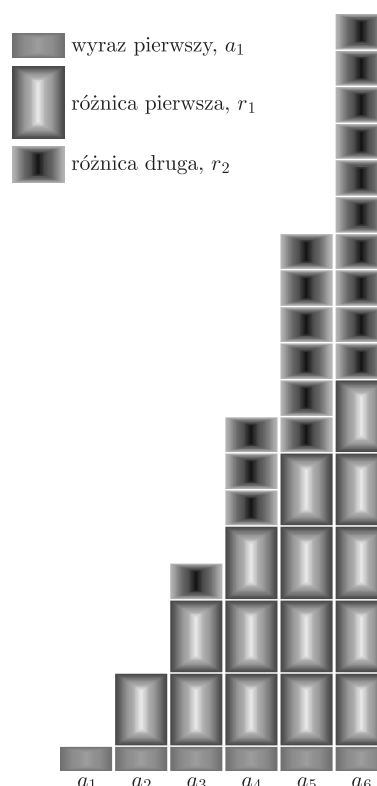
Opierając się na wcześniej otrzymanych wzorach, możemy bez problemu wyprowadzić wzór na sumę:

$$S_n^{(2')} = a_1 \cdot n + r_1 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + r_2 \cdot \frac{(n-2)(n-1) \cdot n}{6}.$$

Łatwo zauważyć, że przedstawione w tym artykule sposoby dojścia do wzorów nie są same w sobie dowodami. Można je jednak udowodnić (na przykład przez indukcję), co pozostawiam Czytelnikom.

Bibliografia

1. H. Pawłowski, *Matematyka 2, Podręcznik, Zakres rozszerzony*, Operon, Gdynia 2003.
2. M. Adamczak, *Ciągi arytmetyczne drugiego stopnia*, *Matematyka 9* (325), str. 554–557.



Tak może wyglądać pierwsze sześć wyrazów ciągu arytmetycznego II stopnia.

VI Międzynarodowa Olimpiada Lingwistyki Teoretycznej, Matematycznej i Stosowanej

Zawody odbyły się w sierpniu 2008 roku w Słonecznym Brzegu w Bułgarii. Startowało w nich 67 uczniów tworzących 16 drużyn narodowych.

W części indywidualnej zawodnicy mieli do rozwiązania 5 zadań w ciągu 6 godzin, a w części drużynowej – jedno zadanie w ciągu 4 godzin. Polacy wywalczyli 5 z przyznanych 20 medali – trzy srebrne (Maciej Janicki z III LO we Wrocławiu, Łukasz Cegiela z XIV LO we Wrocławiu, Marcin Filar z V LO w Krakowie) i dwa brązowe (Radosław Burny z LO im. Małachowskiego w Płocku i Karol Konaszyński z XIV LO we Wrocławiu), a średnia ich wyników indywidualnych dała im drugie miejsce za reprezentacją USA.

W części drużynowej reprezentacja Polski zajęła V miejsce. Dodatkowo Radosław Burny z Płocka zdobył jedną z sześciu nagród przyznanych za najlepsze rozwiązanie poszczególnych zadań. Pod względem liczby zdobytych nagród Polska została pokonana tylko przez reprezentację Stanów Zjednoczonych.

* * *

Zapraszamy do udziału w tegorocznej edycji tej olimpiady. Więcej informacji można znaleźć na stronie internetowej <http://www.fsmw.uni.wroc.pl/lingw/>.

Poniżej prezentujemy wybrane zadania z zawodów indywidualnych.

Zadanie 1 (20 punktów). Podane są wyrazy w języku mikmackim, zapisane w tzw. ortografii Listuguj oraz w transkrypcji fonetycznej, a także ich tłumaczenia na polski:

tmi'gn – [dämīgən] – siekiera; an'stawteg – [anəstawtek] – niebezpieczny; gjiansale'wit – [əkciansalēwit] – archanioł; mgumie'jo'tlatl – [əmkumiejōdələdəl] – podkuć; amqwanji'j – [amx^wancīc] – łyżka; e'jnt – [ējənt] – agent do spraw Indian; tplutaqan – [ətpələdajan] – ustawa; g'p'ta'q – [gəbədāx] – na górze; ge'gwising – [gēg^wisink] – leżeć na górze; lnu'sgw – [lənušk^w] – Indianka; epsaqtejg – [epsaxteck] – piec (*rzeczownik*).

(a) Zapisz wyrazy w transkrypcji fonetycznej: gsnqo'qon – głupota; tg'poq – woda źródłana; gmu'jmin – malina; emtoqwatg – uwielbiać; te'plj – koza.

(b) Zapisz w ortografii Listuguj: [ətpədəsən] – południe; [əmteskəm] – wąż; [alaptək] – oglądać się; [gələmen] – dlatego.

NB: Język mikmacki należy do algonkińskiej rodziny języków. Mówi nim około 8000 osób w Kanadzie.

W transkrypcji [ə] ≈ y w *pierwszy*, [c] ≈ cz w *czas*, [j] ≈ dź w *dżem*, [x] ≈ ch w *chór*, [x] jest dźwięcznym odpowiednikiem ostatniego, [w] oznacza, że poprzednia spółgłoska jest wymawiana z zaokrągleniem warg. Znak ^w oznacza długość samogłoski.

Bożydar BOŻANOW

Zadanie 2 (20 punktów). Podane są cztery urywki z utworów napisanych ok. 900 r. po Chr. w języku staronordyjskim w mierze wierszowej zwanej *dróttkvætt* („metrum dworskie”):

I		
1	ók at ísarnleiki	
2	Jarðar sunr, en dunði ...	
II		
1	áðr gnapsólar Gripnis	
2	gnýstoerandi foeri	
3	rausnarsamr til rimmu	
4	ríðviggs lagar skíðum.	
III		
1	þekkiligr með þegnum	
2	þrymseilar hval deila.	
3	en af breiðu bjóði	
4	bragðviss at þatlagði	
5	ósvifrandi ása	
6	upp þjórhlti fjóra.	
IV		
1	háði gramr, þars gnúðu,	
3	geira hregg við seggi,	
3	(rauð fnýsti ben blóði)	
4	bryngögl í dyn Skoglar,	
5	þás á rausn fyr ræsi	
6	(réð egglituðr) seggir ...	

Jedna z głównych zasad *dróttkvætt* to aliteracja. Pierwszy wers każdego dwuwiersza zawiera dwa wyrazy, które zaczynają się od tej samej głoski, a pierwszy wyraz drugiego wersu zaczyna się od tejże głoski: np. **rausnarsamr**, **rimmu** i **ríðviggs** (II:3–4). Uważa się, że wszystkie samogłoski aliterują ze sobą oraz z j: np. **ók**, **ísarnleiki** i **Jarðar** (I:1–2). Jednak nie jest to jedyna reguła.

Podane teksty zachowane są w więcej niż jednym rękopisie. Czasami w odpowiadających sobie miejscach

znajdują się różne wyrazy, wtedy naukowcy muszą zdecydować, który z wariantów jest pierwotny. Podstawy do podjęcia decyzji mogą być różne. Czasami reguły wersyfikacji pomagają odrzucić błędne warianty. Na przykład w wersie I:2 spotykamy nie tylko wyraz **dunði**, lecz także wyrazy **dulði** i **djarfi**. Wyraz **dulði** nie odpowiada strukturze wiersza, podczas gdy **dunði** i **djarfi** pasują i o wyborze pomiędzy nimi decydują inne argumenty. W wersie II:1 spotykamy wyrazy **Gripnis** i **Grímnis**, ale **Grímnis** nie spełnia wymogów wiersza.

(a) Opisz reguły, według których powinien być zbudowany dwuwiersz w *dróttkvætt*.

(b) Podana jest strofa, w której 13 wyrazów zostało opuszczonych:

V
 1 [...] (þreifsk reiddra øxa
 2 [...] ; knóttu spjór [...])
 3 [...] bitu seggi
 4 [...] þjóðkonungs ferðar,
 5 þás ([...] hǫlða)
 6 [...] [...] [...]
 7 (hór vas [...] of [...])
 8 [...] (flugbeiddra [...]).

Na poniższej liście znajduje się (w porządku alfabetycznym) wszystkie 13 opuszczonych wyrazów i dwa wyrazy, których nie ma w strofie V: **andskoti**, **Gauta**, **glymja**, **hlaut**, **hugfýldra**, **høegra**, **ríks**, **rymr**, **sigr**, **smíði**, **svartskyggð**, **sverð**, **svírum**, **songr**, **vigra**.

Wypełnij luki w strofie V.

NB: Język staronordyjski należy do języków północnogermańskich i był używany w latach ok. 700–1000 po Chr. **æ** = otwarte *e*, **œ** = niemieckie *ö* w wyrazie *schön* (te dwie litery oznaczają długie samogłoski). **ø** jest krótkim odpowiednikiem **œ**; **y** = niemieckie *ü* w wyrazie *Stück*, **q** = otwarte *o*. **au** i **ei** wymawiane są jako jedna sylaba. **ð** i **þ** = angielskie *th* w wyrazach *this* i *thin*. **x** = **k** + **s**. Znak ´ oznacza długość samogłoski. Teksty poetyckie podane są w ortografii znormalizowanej i nie zawierają odchyień od reguł wersyfikacji.

Aleksandr PIPERSKI

Zadanie nr 3 (20 punktów). Podane są wyrazy i kolokacje w dwóch językach Nowej Kaledonii – dechu i czemuchi – i ich przekłady na język polski w porządku losowym:

dechu: *drai-hmitrötr*, *gaa-hmitrötr i-drai*, *i-jun*, *i-wahnawa*, *jun*, *ngöne-gejë*, *ngöne-uma*, *nyine-thin*, *uma-hmitrötr*;
polski: sanktuarium, wiązka bananów, kalendarz, kość, kościół, wybrzeże, szydło, niedziela, szkielet, ściana.

czemuchi: *a-pulut*, *ba-bwén*, *ba-jié*, *bé-ödu*, *bé-tii*, *bé-wöli*, *bé-wöli-wöta*, *tii*, *wöta*;
polski: łóżko, zwierzę, widelec, szklanka, ołówek, wybrzeże, pisać, zmierzch, ostroga.

Podane są także tłumaczenia kilku słów z dechu na czemuchi:

gaa – *a*, *ngöne-gejë* – *ba-jié*, *nyine* – *bé*, *thin* – *wöli*

(a) Ustal prawidłowo odpowiedniki.

(b) Co znaczą wyrazy *wahnawa* i *drai* w dechu, a wyrazy *wöli* i *pulut* – w czemuchi?

(c) W dechu *tusi* – ‘książka’, *bii* – ‘pszczoła’. Przetłumacz z dechu: *i-bii*, *tusi-hmitrötr*.

NB: Językiem dechu mówi ponad 10 000 osób na wyspie Lifu, na wschód od Nowej Kaledonii. Językiem czemuchi mówi około 2000 osób na wschodnim wybrzeżu Nowej Kaledonii. Oba języki należą do rodziny austronezyjskiej.

W dechu **ë** – otwarte *e*, **ö** – niemieckie *ö* w wyrazie *zwölf*, **hm** i **hn** – specjalne spółgłoski bezdźwięczne; **dr** i **tr** – spółgłoski podobne do **d** i **t**, ale wymawiane z zawiniętym i cofniętym językiem; **j** i **th** = angielskie *th* odpowiednio w wyrazach *this* i *thin*; **ng** = *n* w *gong*; **ny** = *ń* w słowie *koń*.

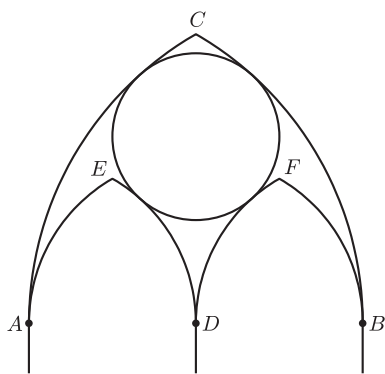
Ksenia GILAROWA

Rozwiązania na str. 2–4



mała delta

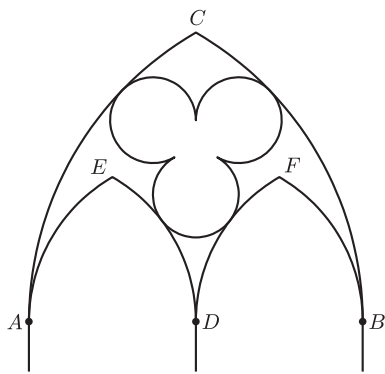
Okna gotyckie i trójliście



Rys. 1

W oknie gotyckim, które badaliśmy w ostatnich trzech artykułach, w wolną przestrzeń wewnątrz ostrołuku ACB i na zewnątrz dwóch mniejszych ostrołuków AED i DFB był wpisany okrąg (zob. rysunek 1). Okrąg ten był styczny wewnętrznie do łuków AC i CB oraz zewnętrznie do łuków ED i DF . W tym artykule przyjrzymy się dwóm innym oknom. W tych oknach w opisaną wyżej wolną przestrzeń wpisujemy nie okrąg, ale trójliście. Ten trójliście możemy wpisać na dwa sposoby (zob. rysunki 2 i 3). Takie dwa typy okien znajdują się w katedrze w Erfurcie.

Trójliście, jak zapewne pamiętamy, powstaje z trzech jednakowych okręgów parami stycznych zewnętrznie. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jaki jest promień tych trzech okręgów i gdzie znajdują się ich środki.



Rys. 2

Zajmiemy się najpierw oknem przedstawionym na rysunku 2. Trójliście jest wyznaczone przez trzy okręgi o środkach O , P i Q . Niech K będzie punktem styczności okręgu o środku O z łukiem ED , niech L będzie punktem styczności okręgu o środku P z łukiem AC , niech wreszcie punkty M i N będą rzutami punktu P na proste CD i AB (nie trudno zauważyć, że punkt M jest punktem styczności okręgów o środkach P i Q). Przyjmijmy, że promienie tych trzech okręgów mają długość r . Przyjmijmy także, że odcinek AD ma długość 1. Równanie, którego rozwiązaniem jest r , otrzymamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trzech trójkątów prostokątnych: ADO , OMP i NBP (zob. rysunek 4).

Zajmiemy się najpierw trójkątem ADO . Zauważmy, że

$$AO = AK + KO = AD + KO = 1 + r.$$

Stąd dostajemy

$$DO^2 = AO^2 - AD^2 = (1 + r)^2 - 1 = 2r + r^2,$$

czyli

$$DO = \sqrt{2r + r^2}.$$

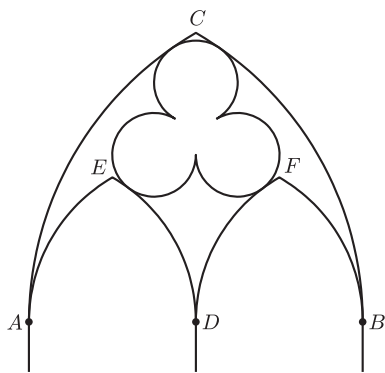
Zauważmy następnie, że trójkąt OMP jest połową trójkąta równobocznego. Jego krótsza przyprostokątna PM ma długość r , a więc dłuższa przyprostokątna OM ma długość $r\sqrt{3}$.

Wreszcie zajmijmy się trójkątem NBP . Mamy teraz

$$NP = DM = DO + OM = \sqrt{2r + r^2} + r\sqrt{3}.$$

Następnie

$$NB = ND + DB = r + 1 \quad \text{oraz} \quad BP = BL - PL = 2 - r.$$



Rys. 3

Z twierdzenia Pitagorasa mamy równość

$$NP^2 + NB^2 = BP^2,$$

z której dostajemy równanie

$$(\sqrt{2r + r^2} + r\sqrt{3})^2 + (r + 1)^2 = (2 - r)^2,$$

czyli

$$2r + r^2 + 2 \cdot \sqrt{2r + r^2} \cdot r\sqrt{3} + 3r^2 + r^2 + 2r + 1 = 4 - 4r + r^2.$$

Po redukcji wyrazów podobnych dostajemy równanie

$$2r\sqrt{3} \cdot \sqrt{2r + r^2} = 3 - 8r - 4r^2.$$

Lewa strona tego równania jest liczbą nieujemną, a więc prawa też musi być nieujemna: $3 - 8r - 4r^2 \geq 0$. Rozwiązując tę nierówność kwadratową, otrzymujemy następujący warunek na r :

$$0 \leq r \leq \frac{\sqrt{7} - 2}{2} \approx 0,3229.$$

Zakładamy zatem, że r spełnia ten warunek. Ponieważ obie strony równania są nieujemne, więc możemy podnieść je do kwadratu:

$$4r^2 \cdot 3 \cdot (2r + r^2) = 9 + 64r^2 + 16r^4 - 48r - 24r^2 + 64r^3.$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie czwartego stopnia

$$4r^4 + 40r^3 + 40r^2 - 48r + 9 = 0.$$

To równanie ma cztery pierwiastki rzeczywiste, których wartości przybliżone wynoszą:

$$r_1 \approx 0,2571, \quad r_2 \approx 0,4891, \quad r_3 \approx -2,0599, \quad r_4 \approx -8,6863.$$

Tylko pierwszy z tych pierwiastków spełnia warunek nałożony wyżej na r , a więc ostatecznie

$$r \approx 0,2571.$$

W podobny sposób, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych ANP , PMO i DBO (zob. rysunek 5), otrzymujemy równanie czwartego stopnia

$$4r^4 - 16r^3 + 52r^2 - 48r + 9 = 0.$$

W tym przypadku r musi spełniać warunek

$$0 \leq r \leq \frac{\sqrt{22} - 4}{2} \approx 0,3452.$$

Nasze równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste:

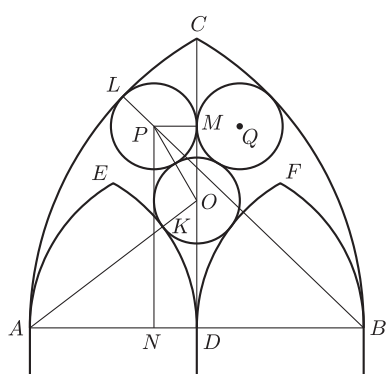
$$r_1 \approx 0,2506, \quad r_2 \approx 0,9583,$$

z których tylko pierwszy spełnia powyższy warunek. Zatem w tym przypadku

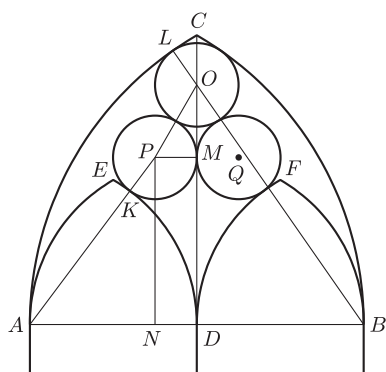
$$r \approx 0,2506.$$

Rozumowanie znacznie wykraczające poza ramy tego artykułu pokazuje, że pierwiastki otrzymanych równań czwartego stopnia nie są konstruowalne, tzn. odcinków o tych długościach nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki, mając dany wyłącznie odcinek długości jednostkowej. Ponieważ w naszym przypadku przyjęliśmy za jednostkę długość odcinka AD , więc mając daną tylko rozpiętość ostrołuku, nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki promienia okręgów tworzących trójliście. Nie powinno nas zatem dziwić to, że budowniczowie katedr rysowali te trójliście „metodą prób i błędów”, uzyskując zadowalającą dokładność; taką, że niedokładności nie są widoczne gołym okiem.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI



Rys. 4

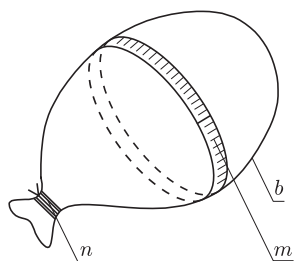


Rys. 5

Poznajemy zjawisko rozszerzalności cieplnej

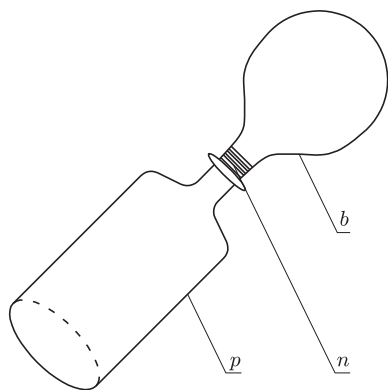
Stanisław BEDNAREK

Celem naszych dzisiejszych eksperymentów fizycznych będzie poznanie i wyjaśnienie zjawiska rozszerzalności cieplnej ciał stałych, cieczy i gazów. Zacniemy od gazów. Na początek potrzebne nam będą dwa gumowe baloniki, suszarka do włosów, nitka, centymetr krawiecki, plastikowa butelka od napojów. Jeżeli nie mamy centymetra krawieckiego, to możemy posłużyć się linijką i papierową taśmą. Jeden z baloników nadmuchujemy i zawiązujemy nitką. Używając centymetra krawieckiego lub papierowej taśmy,ierzmy maksymalny obwód balonika w jego przekroju poprzecznym (rys. 1). Wynik pomiaru zapisujemy lub zapamiętujemy.



Rys. 1. Pomiar obwodu balonika; *b* – balonik, *n* – nitka, *m* – centymetr krawiecki.

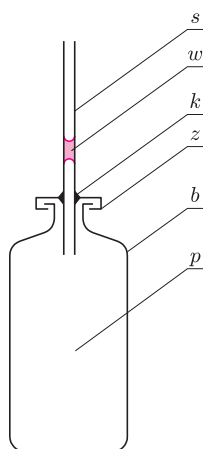
Następnie balonik ogrzewamy przez kilka minut ciepłym powietrzem z suszarki do włosów. Podobnie jak poprzednio mierzymy maksymalny obwód balonika w przekroju poprzecznym. Porównujemy wyniki pomiarów. Jaki wniosek możemy stąd wyciągnąć? Bez trudu stwierdzamy, że obwód balonika wzrósł o kilka centymetrów. Oznacza to, iż powietrze zawarte w baloniku zwiększyło swoją objętość w wyniku ogrzewania.



Rys. 2. Przyrząd do badania rozszerzalności cieplnej gazów; *p* – plastikowa przezroczysta butelka, *b* – balonik, *n* – nitka.

Cylindryczną część drugiego balonika naciągamy na szyjkę otwartej butelki (rys. 2). Balonik pozostaje nienaprzężony. Butelkę wstawiamy do ciepłej wody lub ogrzewamy ją ciepłym powietrzem z suszarki do włosów. Obserwujemy zachowanie się balonika. Podobnie jak w poprzednim doświadczeniu zauważamy, że balonik się napręża, a jego objętość rośnie. Zaobserwowany efekt jest spowodowany rozszerzalnością cieplną powietrza zawartego w butelce. Ponieważ rozmiary plastikowej butelki mogą tylko nieznacznie wzrosnąć, więc powietrze, rozszerzając się, zwiększa objętość balonika.

Zbudujemy teraz prosty przyrząd, służący do badania rozszerzalności cieplnej gazów. Przyrząd ten nazywa się termoskopem gazowym. W tym celu potrzebne będą: szklana butelka z zakrętką, przezroczysta rurka do picia napojów (tzw. słomka), nożyczki, nitka, zabarwiona woda (np. atramentem), zakraplacz do oczu, szybkowiązący klej epoksydowy (np. poxipol lub poxilina). Butelka powinna być szklana, żeby miała sztywne ścianki, nie odkształcające się podczas trzymania w rękach, jak to ma miejsce w przypadku butelek plastikowych. W zakrętce butelki wywieramy otwór o średnicy ok. 5 mm, używając do tego ostrego końca nożyczek. Należy przy tym zachować ostrożność, żeby się nie skaleczyć, lub poprosić o wywiercenie otworu osobą dorosłą.



Rys. 3. Termoskop gazowy; *s* – słomka do picia napojów, *w* – kropla wody, *k* – klej epoksydowy, *z* – zakrętka butelki, *b* – butelka, *p* – powietrze.

W otwór wkładamy słomkę do picia napojów, umieszczając ją tak, żeby pod zakrętką znalazł się odcinek o długości ok. 1 cm (rys. 3). Miejsce przejścia słomki przez zakrętkę uszczelniamy klejem epoksydowym. Po utwardzeniu się kleju wprowadzamy do słomki kilka kropli zabarwionej wody. Używamy do tego celu zakraplacza do oczu i wpuszczamy krople od strony zakrętki po odwróceniu słomki dłuższą częścią ku dołowi. Woda powinna utworzyć w słomce słupkę o długości 1–1,5 cm, znajdujący się w połowie dłuższej części słomki. Słomkę owijamy kilkakrotnie nitką i związujemy jej końce tak, żeby utworzyć przesuwającą opaskę służącą do zaznaczania położenia słupka wody. Mając prawidłowo przygotowany słupkę wody, zamykamy butelkę zakrętką i przystępujemy do doświadczeń.

Ustawiamy butelkę na stole i zaznaczamy opaską z nitki położenie górnego końca słupka wody. Obejmujemy dłońmi butelkę i trzymamy ją przez kilka minut. Obserwujemy zachowanie się słupka wody w słomce. Zaznaczamy opaską nowe położenie słupka wody. Odstawiamy butelkę na kilka minut i patrzymy, jak zmienia się położenie słupka wody. Następnie butelkę umieszczamy



Rozwiązanie zadania F 733.

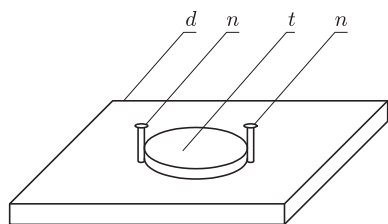
W czasie silnych mrozów woda w wiadrze może zamarzać bardzo szybko. Powstawanie lodu zaczyna się na powierzchni wody oraz przy ściankach wiadra. Jeśli na powierzchni wody utworzy się gruba i solidna warstwa lodu, to tworzący się podczas dalszego zamarzania lód, mający większą objętość niż woda, może odkształcić, a nawet rozerwać wiadro.

Przykrycie wiadra gazetą zmniejsza ochładzanie się powierzchni wody i dzięki temu jej zamarzanie zaczyna się nie od powierzchni. Niezamarznięta woda może się swobodnie podnosić i nie grozi już zniszczenie wiadra.

pod kranem i ostrożnie polewamy najpierw zimną, a potem ciepłą wodą. Cały czas obserwujemy położenie słupka wody w słomce. Okazuje się, że podczas ogrzewania butelki dłońmi lub przez polewanie ciepłą wodą objętość powietrza w butelce wzrasta i słupek wody w słomce przesuwają się wyżej. Przesuwanie się słupka wody podczas ogrzewania dłońmi świadczy o dużej czułości naszego termoskopu. Potrzeba odczekania kilku minut na zauważenie przesunięcia jest wynikiem bezwładności cieplnej butelki. Z kolei, gdy butelka została oziębiona, zawarte w niej powietrze zmniejszyło swoją objętość i słupek wody przesunął się w dół.

Zajmiemy się teraz rozszerzalnością cieplną cieczy. W tym celu przerobimy nasz termoskop gazowy na termoskop cieczowy. Odkręcamy butelkę i napełniamy ją zabarwioną wodą. Do słomki wkraplamy zakraplaczem zabarwioną wodę tak, żeby jej słupek wypełniał dolną połowę długości słomki. Zamykamy butelkę zakrętką i przystępujemy do doświadczeń. Podobnie jak poprzednio, ogrzewamy butelkę dłońmi oraz ciepłą wodą z kranu. Następnie chłodzimy butelkę pod kranem strumieniem zimnej wody. Obserwujemy zachowanie się słupka wody w słomce. Stwierdzamy, że podczas ogrzewania objętość wody w butelce wzrasta i słupek wody w słomce staje się wyższy. Z kolei podczas chłodzenia objętość wody w butelce maleje i słupek wody w słomce staje się niższy.

Należy tu dodać, że zachodzi wyjątek od tych prawidłowości. Woda ogrzewana w przedziale temperatur od 0°C do 4°C zmniejsza swoją objętość. Żeby potwierdzić ten wyjątek, potrzebny będzie nam termometr oraz naczynie, np. garnek, zawierające mieszaninę wody z lodem. Nasz termoskop cieczowy wstawiamy do tego naczynia i wkładamy do niego termometr. Oczekujemy, aż termometr będzie wskazywał temperaturę 0°C i rozpoczynamy obserwację wysokości słupka wody w słomce. Kiedy cały lód ulegnie stopieniu, temperatura wody w naczyniu zacznie wzrastać i będziemy mogli zauważyć opadanie słupka wody w słomce.



Rys. 4. Przyrząd do badania rozszerzalności cieplnej ciał stałych; d – deseczka, n – gwoździć, t – podkładka lub moneta.

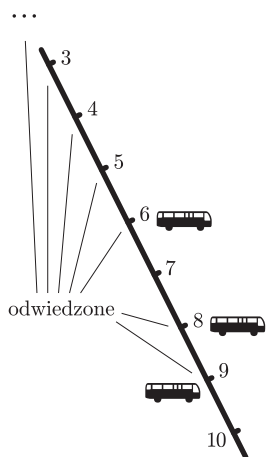
Pozostało nam do zbadania zachowanie się ciał stałych podczas ogrzewania. Do tego doświadczenia będzie nam potrzebna okrągła podkładka pod nakrętkę o średnicy kilkunastu milimetrów (zamiast podkładki może być stara moneta dwudziestozłotowa), deseczka, dwa gwoźdźdiki, młotek, kombinerki, świeczka lub dostęp do kuchenki gazowej i zapałki. Gwoźdźdiki wbijamy w deseczkę w takiej odległości od siebie, żeby podkładka lub moneta ciasno przechodziła między nimi (rys. 4). W praktyce robimy to w ten sposób, że najpierw wbijamy jeden gwoździć, przykładamy do niego podkładkę lub monetę i po przeciwnej jej stronie wbijamy drugi gwoździć.

Chwytny podkładkę lub monetę kombinerkami i sprawdzamy, czy przechodzi ona ciasno między gwoździkami. Następnie, trzymając podkładkę lub monetę kombinerkami, ogrzewamy ją w płomieniu świecy lub kuchenki gazowej. Należy przy tym zachować ostrożność, żeby się nie oparzyć. Ogrzaną podkładkę lub monetę trzymaną kombinerkami próbujemy przesunąć między gwoździkami. Co zauważamy? Okazuje się, że ogrzana podkładka lub moneta nie przechodzi między gwoździkami. Świadczy to o tym, iż jej wymiary wzrosły w wyniku ogrzewania. Możemy się o tym łatwo przekonać po odczekaniu, aż podkładka lub moneta ostygnie. Wówczas znowu przechodzi ona między gwoździkami.

Na koniec pozostaje pytanie, czy wszystkie ciała stałe zwiększają swoje rozmiary podczas ogrzewania w dowolnym przedziale temperatur i jaka jest przyczyna rozszerzalności cieplnej ciał? Odpowiedź na pierwszą część pytania brzmi: tak, ale są nieliczne wyjątki. Należą do nich grafit i stop drukarski, używany do odlewania czcionek. W odpowiedzi na drugą część pytania wyjaśniamy, że przyczyną rozszerzalności cieplnej ciał jest wzrost intensywności ruchów cieplnych cząsteczek, z których składają się wszystkie ciała.



Informatyczny kącik olimpijski (17): Rozkłady jazdy



Wyobraźmy sobie miasto z jedną, długą drogą, wzdłuż której ustawione są (co kilometr) przystanki autobusowe – w sumie jest ich N . Rozkłady jazdy w tym dziwnym mieście często się zmieniają, ale zawsze zachowują pewne cechy. Wzdłuż drogi kursuje K autobusów, z których każdy rano zaczyna z jednego z pierwszych K przystanków (każdy z innego), a wieczorem kończy na jednym z ostatnich K (również każdy na innym). W ciągu dnia autobusy poruszają się tylko w jednym kierunku. Na każdym z przystanków zatrzymuje się dokładnie jeden autobus; co więcej, pomiędzy każdymi dwoma kolejnymi przystankami każdego z autobusów jest nie więcej niż L kilometrów (L jest niewielką liczbą, rzędu 10).

Czy takich rozkładów jazdy może być wiele? Oto właśnie zadanie – obliczenie ich liczby, modulo pewna, zadana liczba M . Z tym właśnie zadaniem zmierzili się uczestnicy *Google Code Jam* 2008.

Zauważmy, że nie możemy układać rozkładu osobno dla poszczególnych autobusów, gdyż wówczas musielibyśmy przez cały czas pamiętać wszystkie już odwiedzone przystanki (gdyby nie było ograniczenia na odległości między kolejnymi przystankami na trasie autobusu, to można by się jednak obejść bez tego). Z tego względu musimy układać rozkłady dla wszystkich autobusów naraz. Jak to robić? Zaczniemy od sytuacji, w której każdy autobus stoi na swoim początkowym przystanku. Teraz w każdym kroku wybierzmy jeden autobus i ustalmy, jaki jest jego następny przystanek – aż każdy autobus znajdzie się na jednym z ostatnich K przystanków. Taki „niedokończony” rozkład nazwiemy *prefiksem* rozkładu jazdy.

Wygodne spostrzeżenie: jeśli w każdym kroku będziemy wybierać ostatni autobus (tj. ten, który stoi na przystanku najbliższym początkowi drogi) i zawsze przestawiać go tak, aby żaden przystanek nie został definitywnie opuszczony, to:

- w każdym tak otrzymanym prefiksie rozkładu wszystkie autobusy będą w odległości co najwyżej $L - 1$ km od ostatniego;
- nie musimy pamiętać, które przystanki zostały już odwiedzone, ponieważ są to wszystkie za ostatnim autobusem oraz te, na których aktualnie stoi któryś autobus (patrz rysunek).

Intuicja podpowiada, że do rozwiązania moglibyśmy użyć techniki programowania dynamicznego. Zauważmy podobieństwo naszego zadania do problemu plecakowego – prefiks rozkładu jazdy jest analogią do częściowo spakowanego plecaka. W przypadku plecaka nie pamiętamy dokładnie, co do niego spakowaliśmy, a jedynie ile to wszystko razem waży (lub zajmuje objętości, zależnie od sformułowania problemu). Jest to pełna wiedza, która nam wystarcza do dokończenia pakowania – dzięki niej możemy obliczyć, ile jeszcze możemy zmieścić. Jaka jest pełna wiedza, która by nam wystarczyła do dokończenia prefiksu p rozkładu jazdy? Musimy znać ostatni(p) – pozycję ostatniego autobusu, oraz pozycje(p), czyli zbiór $K - 1$ różnych wartości pomiędzy 1 a $L - 1$ – odległości pozostałych autobusów od ostatniego. Oczywiście, jest tylko $\binom{L-1}{K-1}$ różnych zbiorów pozycje(p). Zbiór pozycje(p) możemy reprezentować jako liczbę całkowitą – ma ona ustawiony

i -ty bit wtedy i tylko wtedy, gdy $i + 1 \in \text{pozycje}(p)$. Sortujemy te liczby i przez $f(\text{pozycje}(p))$ oznaczamy indeks w posortowanym ciągu liczby odpowiadającej zbiorowi pozycje(p). Inaczej – funkcja f jest „ponumerowaniem” wszystkich możliwych zbiorów pozycje(p).

Weźmy teraz zbiór następników p (oznaczymy go przez następnie(p)), czyli zbiór prefiksów, które mogą powstać z p w wyniku wykonania pojedynczego kroku. Zauważmy, że jeśli $q \in \text{następnie}(p)$, to ostatni(q) = ostatni(p) + 1, ponieważ każdy przystanek musi zostać odwiedzony. Co więcej, weźmy takie p i q , że pozycje(p) = pozycje(q), ale niekoniecznie ostatni(p) = ostatni(q). Jeśli wtedy znamy następnie(p), to z tego możemy otrzymać następnie(q): wystarczy, że zmienimy wartość ostatni(\cdot) dla wszystkich prefiksów należących do tego zbioru. Innymi słowy, zbiór następników nie zależy od „bezwzględnej” pozycji autobusów, a jedynie od ich wzajemnego położenia.

Możemy więc utworzyć taką macierz P , że:

- $P_{i,j} = 1$, gdy istnieją takie prefiksy p i q , że $f(\text{pozycje}(p)) = i$, $f(\text{pozycje}(q)) = j$ i $q \in \text{następnie}(p)$ (co jest równoważne z „gdy dla każdego p spełniającego $f(\text{pozycje}(p)) = i$ istnieje q takie, że $f(\text{pozycje}(q)) = j$ i $q \in \text{następnie}(p)$ ”);
- $P_{i,j} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Oznaczmy przez $T_l[i]$ liczbę różnych prefiksów p rozkładu jazdy takich, że ostatni(p) = l i $f(\text{pozycje}(p)) = i$. Obliczenie wektora T_1 jest oczywiste. Dla dowolnego $l \geq 2$ zachodzi

$$T_l = T_{l-1} \cdot P$$

W ten sposób możemy obliczyć T_{N-K+1} (wektor ten jest równy $T_1 \cdot P^{N-K}$) i stamtąd odczytać wynik (jak?).

Implementacja tego rozwiązania z wielokrotnym mnożeniem T_1 przez macierz P prowadziłaby do algorytmu o złożoności $O(NR^2)$, gdzie R jest wymiarem macierzy P , czyli $\binom{L-1}{K-1}$. Dla dużych N możemy za to wykorzystać szybkie (binarne) potęgowanie macierzy – złożoność takiego rozwiązania wyniosłaby $O(R^3 \log N)$. Na koniec dodajmy, że wszystkie obliczenia w tym zadaniu prowadzimy modulo M – złożoności rozwiązania, na szczęście, nie muszą pogarszać obliczenia na ogromnych liczbach.

Filip WOLSKI

Przemawiające obrazy

Andrzej WALAT

Przemówił dziad do obrazu,
a obraz do niego ani razu.

Dziad z ludowej rymowanki chodził zapewne do polskiej szkoły, kształcącej (z nielicznymi wyjątkami) ludzi głuchych i ślepych, do których muzyka i obrazy kompletnie *nie przemawiają*. Nie mają też żadnego znaczenia. Stosunek ludzi i całych społeczeństw do obrazów jest bardzo różny i zmienny w czasie. Nasi prapradziadowie w czasach niewoli wybudowali w Warszawie (1898–1900) siedzibę Towarzystwa Zachęty Sztuk Pięknych z wieloma obszernymi salami wystawowymi. Nasi prapradziadowie w krótkim okresie dwudziestu lat niepodległej (i biednej) Polski międzywojennej zbudowali imponujący gmach Muzeum Narodowego. Były to ich *świątynie pamięci narodowej*. Za to współcześni Polacy przez ponad 60 lat od zakończenia wojny nie zbudowali ani jednego podobnego gmachu. Skutkiem tego w żadnym miejscu w stolicy kraju, poza okazjonalnymi wystawami, nie jest prezentowana polska sztuka współczesna, a dorobek wielu pokoleń wybitnych polskich artystów XX wieku pochłania czarna jama niepamięci.

Impulsem do tego artykułu był opis przypadku bardzo gorącego stosunku do obrazów (obcej kultury) i wytrwałych działań dla ocalenia ich od zapomnienia. W lipcowym numerze z 2003 roku miesięcznika *The World of Interiors* ukazał się artykuł pt. *Sacred Geometry* (*Święta geometria*). Christopher Gibbs pisze w nim o swojej fascynacji odkryciem (w jednym z antykwariatów na sławnej londyńskiej Portobello Road) dziewiętnastowiecznego albumu kryjącego w szarej, niepozornej szacie zewnętrznej niezwykle ciekawą treść – cudowne kolorowe akwarele przedstawiające geometryczne wzory islamu skopiowane w meczetach rozsianych po Europie i Afryce (w Toledo, Grenadzie, Wenecji, Ravello, Palermo, Kairze, Aleksandrii i Damaszku). Pierwszy właściciel albumu i domniemany autor akwarel musiał się nieźle natrudzić, żeby dotrzeć (w XIX wieku) do wszystkich tych świątyń i uzyskać zgodę na kopiowanie ich arcydzieł. Niektóre ornamenty są bardzo złożone, ale jest też w albumie wiele wzorów bardzo sugestywnych pomimo swojej prostoty, na przykład obraz pięciu białych stycznych rogami kwadratów na czerwonym tle, patrz rysunek.

Co nam mogą mówić takie obrazy? Matematyk, gdy patrzy na wzory islamu lub okna gotyckie, widzi w nich konstrukcje geometryczne. Malarz, patrząc na jeden obraz, widzi często obłok różnych wariantywnych realizacji tego samego pomysłu plastycznego. Informatyk może widzieć zadanie programistyczne. Popatrzmy na pięć białych kwadratów okiem „artysty informatyka”. Jaką rozwartość mają kąty ostre małych czerwonych trójkątów prostokątnych w narożach czerwonego kwadratu? Czy 30 i 60 stopni? Czy to optymalne artystycznie rozwiązanie? Możemy napisać procedurę tworzącą odpowiednie obrazy dla różnych wartości tych kątów i wybrać wariant, który nam się najbardziej podoba. Przedtem jednak należy wyznaczyć dwie zależności trygonometryczne: zależność długości a boku małych kwadratów od długości b boku dużego kwadratu i kąta α nachylenia małych białych kwadratów względem dużego czerwonego (jest to jeden z kątów ostrych trójkąta

prostokątnego w narożu) oraz zależność długości d boku kwadratu wyznaczonego przez środki czterech małych kwadratów w narożach od długości a i kąta α . Pozostawiam Czytelnikom sprawdzenie, że poprawnym rozwiązaniem zadania są wzory:

$$a = b / (3 \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$d = b - a(\cos \alpha + \sin \alpha) = 2a \cos \alpha.$$

Rozwiązaniem zadania programistycznego jest zestaw czterech procedur.

```
oto kwadraty :b :alfa
ukp "czerwony5 zamkwad :b
ukp "biały
niech "m (sin :alfa) + (3 * cos :alfa)
niech "a :b / :m
niech "d 2 * :a * cos :alfa
pw :alfa zamkwad :a lw :alfa zamaluj
hop -0.5 * :d -0.5 * :d
powtórz 4 [białykwadrat :a :alfa pod np :d opu pw 90]
hop 0.5 * :d 0.5 * :d
już
oto białykwadrat :a :alfa
lw :alfa
zamkwad :a
pw :alfa
już
oto zamkwad :bok
hop -0.5 * :bok -0.5 * :bok
powtórz 4 [np :bok pw 90]
hop 0.5 * :bok 0.5 * :bok
zamaluj
już
oto hop :a :b
pod np :a pw 90
np :b lw 90 opu
już
```

Na tym nie koniec. Natychmiast nasuwają się następne zadania, np. napisać procedurę, która tworzy *mobil* – ruchomy obraz pięciu białych kwadratów „wpisanych” w duży czerwony, zmieniających płynnie swoje położenie względem zewnętrznego kwadratu od 0 do 90 stopni i z powrotem. Jeśli podłożymy pod ten niemy film odpowiednią muzykę, to będziemy mogli mieć wrażenie, że nasz ruchomy obraz nie tylko przemawia, ale wręcz śpiewa, chociaż może nie każdemu jest dane usłyszeć ten śpiew.

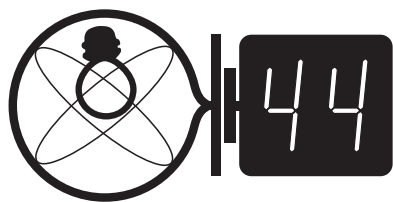
Rozwiązanie zadania w aneksie na stronie www Delti.

Literatura

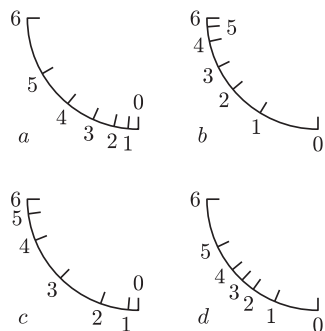
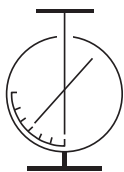
[1] Christopher Gibbs, *Sacred Geometry*, w: *The World of Interiors*, July 2003.



Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2009



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z fizyki nr 472, 473

Redaguje Jerzy B. BROJAN

472. Elektroskop wycechowano zaopatrując go w skalę, na której zaznaczono kolejne wartości ładunku (w dowolnych jednostkach). Czy działki skali powinny być równo od siebie odległe, czy też nierówno odległe ($a-d$)? Wskazać skalę najbliższą prawidłowej i uzasadnić odpowiedź.

473. W chwili początkowej drobinę pyłu były nieruchome i rozmieszczone w sposób jednorodny, tworząc kulę (gwiazdę?). Jeśli jedyną siłą działającą na pyłki jest wzajemne przyciąganie grawitacyjne, to czy w czasie zapadania się kula pozostanie jednorodna? Jeśli nie, to czy gęstość będzie większa w środku kuli, czy przy jej powierzchni?

Jaka jest odpowiedź na te same pytania w odniesieniu do chmury pyłu o kształcie długiego walca? Uzasadnić wszystkie odpowiedzi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2008

Przypominamy treść zadań:

464. Cienki pierścień o promieniu r jest naładowany równomiernie rozłożonym ładunkiem elektrycznym. W którym miejscu dipol elektryczny (układ dwóch bardzo dużych ładunków położonych w ustalonej, bardzo małej odległości od siebie) może pozostawać w równowadze w polu tego pierścienia?

465. W długim przewodniku prostoliniowym znajdującym się w próżni płynie prąd o natężeniu I . W polu magnetycznym tego przewodnika porusza się elektron, przy czym w chwili początkowej jego odległość od przewodnika wynosiła r_1 , jego prędkość miała wartość v , a kierunek prędkości był równoległy do przewodnika, ze zwrotem zgodnym ze zwrotem prądu. Jaką (maksymalnie) odległość r_2 od przewodnika osiągnie elektron?

464. Dipol pozostaje w równowadze, jeśli:

- jest ustawiony równoległe do pola elektrycznego – inaczej obróciłby się,
- pole jest lokalnie jednorodne (ściśle: gradient pola jest równy zeru) – inaczej zostałyby wciągnięty w obszar silniejszego pola.

Warunek b) jest spełniony w środku pierścienia oraz w dwóch punktach położonych symetrycznie na jego osi, gdyż natężenie pola jest równe zeru w środku, rośnie w miarę oddalania się od niego wzdłuż osi, a w dużej odległości znów maleje do zera. Wzór na wartość E w odległości d od środka pierścienia wynika ze zrzutowania wektora natężenia pola poszczególnych fragmentów pierścienia na kierunek osi:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{(d^2 + r)^{3/2}}.$$

Maksymalną wartość E osiąga dla $d = r/\sqrt{2}$. Autor sądzi, że te dwa punkty są jedynymi punktami równowagi trwałej, a środek pierścienia – jedynym punktem równowagi nietrwałej, choć ścisły dowód tego byłby zapewne trudny.

465. Przyrównując siłę Lorentza do siły dośrodkowej, otrzymuje się znany wzór na promień okręgu zataczanego przez ciało naładowane w polu magnetycznym. Podstawiamy tu ładunek elementarny e :

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Gdy pole nie jest jednorodne (tu $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$), tor ciała nie jest okręgiem, a powyższy wzór opisuje promień jego krzywizny. Tak jak w przypadku ruchu po okręgu, prędkość v pozostaje stała. Tor ruchu elektronu i przewodnik leżą w jednej płaszczyźnie, a jeśli przedstawimy tor jako funkcję $y(r)$ (gdzie y jest współrzędną



Rozwiązanie zadania M 1233.

Niech a_1, a_2, \dots, a_{n+2} będą danymi liczbami, które z dzielenia przez $2n$ dają odpowiednio reszty r_1, r_2, \dots, r_{n+2} .

Jeśli $r_i = r_j$ dla pewnych liczb i, j ($i \neq j$), to liczba $a_i^2 - a_j^2$ jest podzielna przez $2n$. Przyjmijmy zatem, że liczby r_1, r_2, \dots, r_{n+2} są różne.

Zbiór $S = \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$ możliwych reszt z dzielenia przez $2n$ podzielimy na $n+1$ podzbiorów:

$$S = \{1, 2n-1\} \cup \{2, 2n-2\} \cup \dots \cup \{n-1, n+1\} \cup \{0\} \cup \{n\}.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że pewne dwie reszty r_i, r_j ($i \neq j$) spełniają równość $r_i + r_j = 2n$. Stąd wynika, że liczba $a_i^2 - a_j^2$ jest podzielna przez $2n$.

wzdłuż przewodnika, a r – odległością od niego), to promień krzywizny wynosi

$$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}$$

gdzie primami oznaczono pochodne. Oznaczając y' jako u , a stałe zbijając w wyrażeniu $A = \frac{2\pi mv}{\mu_0 e I}$, mamy równanie

$$Aru' = (1 + u^2)^{3/2}.$$

Całkujemy je metodą rozdzielania zmiennych, otrzymując

$$A \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} = \ln \left(\frac{r}{r_0} \right).$$

W tych punktach toru, gdzie r osiąga wartość ekstremalną, u dąży do nieskończoności ze znakiem $+$ albo $-$, a lewa strona powyższego równania dąży do $\pm A$. Odejmujemy stronami równania z minimalną wartością r_1 i maksymalną r_2 , stąd $\ln(r_2/r_1) = 2A$, a rozwiązaniem jest wzór

$$r_2 = r_1 \exp \left(\frac{4\pi mv}{\mu_0 e I} \right).$$



Oto nasz coroczny remanent – komentarze i uzupełnienia wynikające z nadesłanych rozwiązań.

Zadanie 442 [Zależność ogniskowej zestawu dwóch soczewek od ich wzajemnego ustawienia] (współczynnik trudności $WT = 1,56$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 6$). Rozwiązanie nadesłane przez **A. Idzika** było w zasadzie prawidłowe, ale czysto doświadczalne i pozbawione jakiegokolwiek interpretacji otrzymanych wyników. Za to jednak zostało bogato zilustrowane dołączonymi fotografiami, z których kilka reprodukuje na okładce. Na ostatnim zdjęciu widzimy „wspólniczkę” – córkę i współpracownicę naszego Weterana. (A może by tak wprowadzić Rodzinną Ligę Zadaniową, na wzór niektórych konkursów telewizyjnych?) Pozostałe dobre rozwiązania pochodzą od **K. Kapci**, **K. Magiery**, **T. Wietechy**, **P. Bieniasa** i **T. Tkocza**. Chociaż zostały ocenione wyżej, nie mogą się równać z pracą Idzika-i-Córki pod względem oprawy wizualnej!

Zadanie 448 [Czy wprowadzenie poziomych przegród między szybami okiennymi polepszy, czy pogorszy izolację cieplną] ($WT = 2,65$, $LPR = 1$). Jedynym nadesłanym rozwiązaniem tego zadania była praca **K. Magiery**, oparta na przeprowadzonym doświadczeniu. Przyrząd naszego Czytelnika składał się z trzech równoległych szybek, z których dwie tworzyły zbiornik na gorącą wodę, a między środkową i trzecią znajdował się układ poprzecznych listewek. Pomiar temperatury przy trzeciej szybcie był wykonany dwukrotnie – w pozycji pionowej listewek, oraz w pozycji poziomej. Otrzymany wniosek – że przegrody pogorszą izolację – jest zgodny z rozwiązaniem firmowym (choć chyba niezupełnie zgodny z zamieszczoną w pracy tabelką pomiarów).

Zadanie 449 [Impuls światła odbija się od zwierciadeł na dwóch zbliżających się do siebie statkach kosmicznych] ($WT = 3,25$, $LPR = 0$). Podane w treści zadania założenie $E_0 \ll mvc$ (dotyczące energii impulsu oraz masy i prędkości statków) pozostawia niejasność co do porównania E_0 z mv^2 . Rozwiązanie firmowe było prawidłowe, o ile $E_0 \ll mv^2$, a w innym wypadku wymagało drobnej korekty. Ten punkt prawidłowo przedstawił w swoim liście **M. Koźlik** (jednak jego praca też zawierała błąd).

Zadanie 459 [Ładunek nad powierzchnią cieczy dielektrycznej, zależność wysokości „górkę” od wysokości ładunku] ($WT = 3,25$, $LPR = 1$). Oprócz całkowicie zgodnego z firmowym rozwiązaniem **T. Wietechy** otrzymaliśmy też list (pozakonkursowy, bo wysłany z dużym opóźnieniem) od **A. Idzika**. Jego pomysł nie opiera się na minimalizacji energii całkowitej, lecz na równowadze sił. Siłę podnoszącą ciecz na jednostkę jej powierzchni oblicza p. Andrzej jako iloczyn natężenia pola przez gęstość powierzchniową ładunku σ , z kolei zaś σ uzależnia od natężenia pola i stałej dielektrycznej cieczy. Rozwiązanie wynika dalej z przyrównania siły do ciężaru „górkę”, a wynik jest zgodny z opublikowanym w *Delcie*.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po 461 zadaniach

Mateusz Łącki (Kraków)	42,38
Konrad Kapcia (Częstochowa)	41,36
Jerzy Witkowski (Radlin)	1 – 36,24
[poprawiono drobną pomyłkę]	
Marian Łupieżowiec (Zebrzydowice)	35,00
Krzysztof Magiera (Łosiów)	1 – 26,16
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 25,68
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	8 – 24,36
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	22,24
Tomasz Wietecha (Tarnów)	6 – 21,45
Jacek Konieczny (Poznań)	19,16
Ryszard Woźniak (Kraków)	12,74
Michał Koźlik (Gliwice)	8,98
Przemysław Bienias (Aleksandrów Łódzki)	8,58
Zbigniew Galias (Kraków)	1 – 8,15

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2006–2008 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

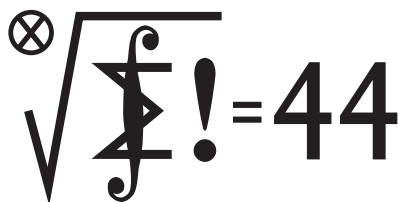
Weterani Klubu 44F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (8), T. Wietecha (6), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Magiera, B. Mikielwicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach, J. Witkowski.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2009

Zadania z matematyki nr 575, 576

Redaguje Marcin E. KUCZMA

575. Rozważamy alfabet złożony z n liter, a w nim słowa o następującej własności: między dwoma wystąpieniami którejkolwiek litery, każda litera pojawia się co najwyżej jeden raz (tzn. zabronione są podciągi $x \dots y \dots y \dots x$, również dla $y = x$). Ile jest takich słów o maksymalnej długości?

576. Dowieść, że dla liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}.$$

Zadanie 576 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2008

Przypominamy treść zadań:

567. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb rzeczywistych, dla których istnieje funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spełniająca równanie

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_n = ax + b \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

568. Niech k_1, k_2, \dots, k_n oraz m będą liczbami całkowitymi większymi od 1. Zakładamy, że liczba m jest względnie pierwsza z każdą z liczb k_i . Wykazać, że równanie

$$x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \dots + x_n^{k_n} = y^m$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n, y .

567. Spróbujmy wziąć funkcję postaci $f(x) = Ax + B$; jej n -ta iteracja ma postać $A^n x + (A^{n-1} + \dots + A + 1)B$. Aby funkcja f spełniała podany warunek (dla zadanych liczb a, b), wystarczy, by spełniony był układ równań

$$A^n = a, \quad (A^{n-1} + \dots + A + 1)B = b.$$

Gdy $a \geq 0$ lub gdy n jest liczbą nieparzystą, przyjmujemy $A = a^{1/n}$; wówczas suma w nawiasie w drugim równaniu jest niezerowa, co pozwala wyznaczyć B . Znalezione wartości A, B określają „dobrą” funkcję f .

Ta metoda nie działa, gdy n jest liczbą parzystą oraz $a < 0$. Wykażemy, że w tym przypadku nie istnieje żadna funkcja f o wymaganych własnościach. Przypuśćmy bowiem, że f jest taką funkcją. Jej n -ta iteracja $ax + b$ jest funkcją ściśle malejącą, więc różnowartościową. Zatem także f musi być różnowartościowa. Wraz z założeniem ciągłości wymusza to jej ścisłą monotoniczność. W konsekwencji funkcja $f \circ f$ jest ściśle rosnąca i wobec tego n -ta (parzysta) iteracja funkcji f nie może być malejącą funkcją $ax + b$.

Odpowiedź: dla n nieparzystych wszystkie pary (a, b) są dobre; dla n parzystych – wszystkie pary (a, b) , w których $a \geq 0$.

568. Liczba m jest względnie pierwsza z iloczynem $K = k_1 k_2 \dots k_n$. Istnieją zatem liczby naturalne s, t , dla których $tm - sK = 1$. Przyjmijmy $x_i = n^{sK/k_i}$ ($i = 1, \dots, n$) oraz $y = n^t$. Tak określone liczby spełniają zadane równanie:

$$\sum_{i=1}^n x_i^{k_i} = \sum_{i=1}^n n^{sK} = n \cdot n^{sK} = n^{sK+1} = n^{tm} = y^m.$$

Niestety, nie był to *Prima Aprilis*. „Przypomniana” w numerze kwietniowym treść zadania **551** była wprawdzie identyczna z tą podaną cztery miesiące wcześniej, na Gwiazdkę, ale – no cóż – z tym samym, wiernie skopiowanym, błędem. Niedbalstwo przy korekcie. . . To było zadanie o zespole folklorystycznym. Założenie miało brzmieć: „tancerz i trenował z tancerkami od 1 do $2i - 1$ ”. Zamiast tego – wydrukowane zostało „od i do $2i - 1$ ”. Firmowe rozwiązanie bieгло jednak przy założeniu z wersji zamierzonej, błąd umknął uwadze.

Literówki zwykle albo są nieistotne albo – przeciwnie – powodują, że treść całkiem traci sens; czytelnicy widzą, że „coś jest nie tak” i zgadują, jak miało być. Tym razem jednak zadanie pozostało sensowne, uczestnicy ligi próbowali je

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
563 ($WT = 1,23$) i 564 ($WT = 2,50$)
z numeru 6/2008

Jerzy Witkowski	4–42,80
Marcin Kasperski	2–42,50
Marek Prauza	3–39,95
Andrzej Idzik	39,53
Zbigniew Galias	1–39,34
Adam Woryna	1–38,97
Wojciech Maciak	35,69
Marek Spychała	33,34
Michał Kieza	2–32,56
Bartłomiej Dyda	4–31,69
Franciszek S. Sikorski	31,36
Tomasz Warszawski	2–30,39
Łukasz Garncarek	1–30,14
Paweł Najman	3–29,21
Jan Czardybon	28,27
Jacek Jendrej	27,67
Joachim Jelisiejew	27,50
Joanna Bogdanowicz	26,02
Tomasz Wietecha	7–25,08
Krzysztof Dorobisz	2–24,38
Zbigniew Skalik	1–23,93
Grzegorz Kozłowski	23,23
Tomasz Choczewski	21,03
Piotr Żmijewski	1–20,21
Piotr Kumor	10–20,13

Legenda (przykładowo): stan konta 7–25,08 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 25,08 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2006, 2007 lub 2008.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

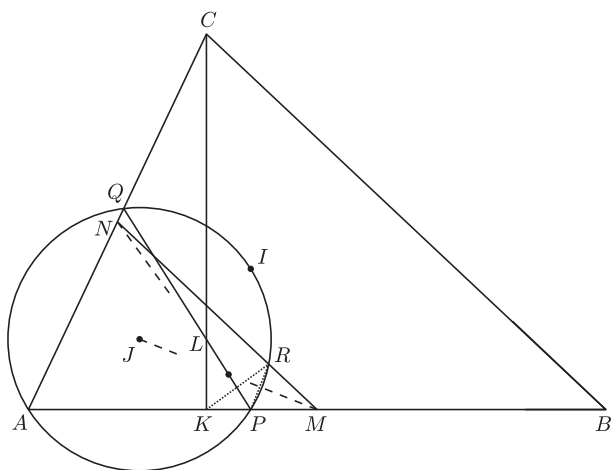
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (10), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (10), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (7), T. Józefczyk, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczański, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (6), W. Bednarek (4), D. Kurpiel, P. Najman (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, K. Dorobisz, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, M. Kieza, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Józwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, T. Tkocz, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Zadanie 549 $[\triangle ABC; c > a > b; CK - \text{wysokość}; M, N - \text{środkie } AB, AC; \text{okrąg wpisany w } \triangle ABC \text{ styczny do } AB, AC \text{ w punktach } P, Q \Rightarrow \text{okrąg wpisany w } \triangle KMN \text{ ma środek na } PQ]$ ($WT = 2,92; LPR = 10$).
Znow **J. Jendrej** jest autorem ciekawego rozwiązania:



w dobrej wierze rozwiązać... Oto fragmenty wiosennej wymiany korespondencji między redaktorem ligi a jednym z uczestników (**Jerzy Cisło**):

– Szkoda mi tego barwnego zadania o tańcach, ono mogło być ciekawe; i jestem nie w porządku wobec wszystkich, którzy włożyli wiele czasu i wysiłku we frustrujące zmagania z *wydrukowanym* zadaniem.

– Tylko jedna pomyłona litera na tyle zadań? Nauczyłem się czegoś nowego i o żadnej frustracji nie ma mowy.

No, przez dwadzieścia parę lat nazbierało się tych pomyłek ciut więcej... Ale dziękujemy za krzepiące słowa!

A teraz akcent optymistyczny minionego sezonu: dziesięć czterdziestoczeropunktowych rund! Sztuki tej dokonał **Janusz Olszewski**, jako drugi uczestnik w historii ligi (przypomnijmy – pierwszym był **Piotr Kumor**). Czekamy na dalszych – no i czekamy może na pierwszą „jedenastkę” – pełną ćwiartkę naszej liczby-ikony.

Przejdźmy do omówienia najciekawszych zadań.

Zadanie 548 $[M(a, b) = |\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq a, y \leq b, x \perp y\}| \text{ dla } a, b \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \Rightarrow M(a, b) = \sum_{r \geq 1} [a/r][b/r]\mu(r) \text{ (}\mu - \text{funkcja Möbiusa)}]$ (współczynnik trudności $WT = 2,24$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 10$).
Chociaż treść mogła wyglądać odstraszająco, zadanie okazało się niezbyt trudne. Większość rozwiązań (w tym i autorskie, i firmowe) polegała na standardowym użyciu wzoru włączeń i wyłączeń. Jednak najbardziej eleganckie rozwiązanie przedstawił **Jacek Jendrej**:

Dopuszczając w określeniu M rzeczywiste wartości a, b , widzimy, że dla $d \in \mathbb{N}$ jest dokładnie $M(a/d, b/d)$ par $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ spełniających warunki $x \leq a, y \leq b, NWD(x, y) = d$. Zatem

$$[a][b] = \sum_{d \geq 1} M\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right).$$

Stąd wobec znanej tożsamości $\sum_{r|m} \mu(r) = 0$ dla $m > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \mu(r) &= \sum_{r \geq 1} \mu(r) \sum_{d \geq 1} M\left(\frac{a}{rd}, \frac{b}{rd}\right) = \\ &= \sum_{m \geq 1} M\left(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}\right) \sum_{r|m} \mu(r) = M\left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1}\right) = M(a, b). \end{aligned}$$

Niech I, J będą środkami okręgów wpisanych w $\triangle ABC$ i $\triangle AMN$. Okrąg o środku J i średnicy AI (przechodzący przez P, Q) przecina odcinek MN w punkcie R , symetrycznym do P względem MJ oraz symetrycznym do A względem NJ . Zatem dwusieczna MJ kąta KMN jest symetralną odcinka PR ; a wobec równości $|NR| = |NA| = |NK|$, dwusieczna kąta KNM jest symetralną odcinka KR . Należy więc dowieść, że środek okręgu KPR leży na PQ . Okaze się, że jest nim środek odcinka PL , gdzie $L = PQ \cap CK$. Wystarczy wykazać, że R leży na okręgu KLP , czyli że $|\sphericalangle KRP| = |\sphericalangle KLP|$ – to zaś wynika z prostego rachunku na kątach, który zostawimy Czytelnikowi.

Podobne rozwiązanie przysłał też **Janusz Olszewski** – dołączając do swojej pracy, dla pełniejszego obrazu, drugie rozwiązanie, analogiczne do firmowego. Inne prace z rozwiązaniem firmowym: **J. Bogdanowicz**, **T. Choczewski**, **K. Dorobisz**, **J. Jelisiejew**, **R. Pytlak**. Ponadto trzy rozwiązania rachunkowe (układ współrzędnych bądź trygonometria).

Zadanie 551 [Tancerz $i \in \langle 1; n \rangle$ trenował z tancerkami $j \in \langle i; 2i-1 \rangle$; ile możliwości skojarzenia r par?] ($WT = 4,00$; $LPR = 0$). Tak sformułowane (w wyniku wspomnianej pomyłki) zadanie wygląda raczej beznadziejnie. Dwaj uczestnicy przysłali listy zatytułowane *Komentarz zamiast rozwiązania*.

Niech $A = [a_{ij}]_{i \leq n, j \leq 2n-1}$ będzie macierzą incydencji ($a_{ij} = 1$ gdy tancerz i trenował z tancerką j ; poza tym $a_{ij} = 0$). Ile jest możliwości wybrania r jedynek, z których żadne dwie nie stoją w jednym wierszu ani kolumnie?

J. Olszewski zauważa, że w obrębie ustalonej podmacierzy R o wymiarach $r \times r$ liczba takich wyborów, oznaczana symbolem $\text{per}(R)$, jest dana wzorem jak w definicji $\det(R)$, po zastąpieniu wszystkich minusów plusami (podaje też odsyłacz do strony www.codeproject.com/KB/applications/RyserPermanent.aspx gdzie można znaleźć praktyczny algorytm obliczający $\text{per}(R)$). Szukana liczba jest więc równa $\sum_R \text{per}(R)$; sumowanie po wszystkich podmacierzach $r \times r$ macierzy A – nie jest to jednak „wynik”, w oczekiwanym znaczeniu: funkcja zmiennych n, r , dana jawnym wzorem algebraicznym.

J. Cisło zaś odsyła do książki V. Bryant, *Aspekty kombinatoryki*, gdzie w rozdziale 12 pokazana jest ogólna metoda generowania wielomianów tworzących dla ciągów wyrażających liczbę rozważanych wyborów (dla dowolnej macierzy zerowej).

Nie widać, żeby którakolwiek z tych metod prowadziła do wyniku w zwartej postaci.

Zadanie 558 [$m, n, x \in \mathbb{N}$; $n \mid 1 + x + \dots + x^{m-1}$; $m \mid 1 + x + \dots + x^{n-1}$; $m \perp n$; $m = ?$ $n = ?$] ($WT = 2,78$; $LPR = 6$). Wszystkie rozwiązania jak firmowe: **J. Jelisiejew**, **J. Jendrej**, **J. Olszewski**, **T. Warszawski**, **A. Woryna** oraz **K. Dorobisz** (autor zadania).

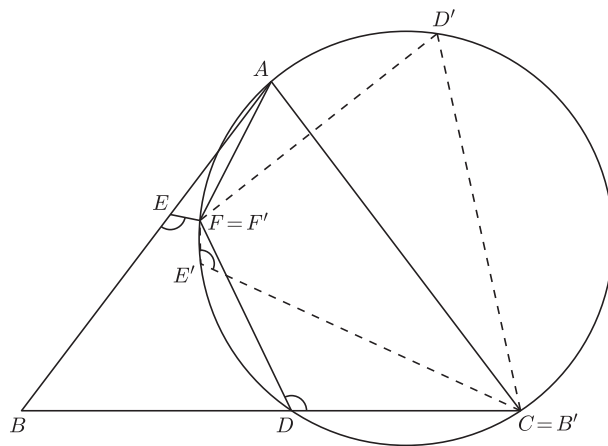
Zadanie 559 [Plansza $n \times n$; naprzemienne zajmowanie pól; pozycja zwycięska: zajęte cztery narożniki prostokąta; kto wygrywa?] ($WT = 2,42$; $LPR = 4(8?)$). Gdy n jest liczbą nieparzystą, wygrywa rozpoczynający; gdy parzystą – jego przeciwnik. Strategię opisaną w rozwiązaniu firmowym, z pełnym uzasadnieniem, znaleźli **M. Kasperski**, **W. Świeboda**, **A. Woryna**.

Inna skuteczna strategia polega na tym, by – w każdym ruchu, w którym nie da się od razu wygrać – zajmować pole środkowo-symetryczne do pola z ruchu przeciwnika. Dla n nieparzystych pierwszy gracz zajmuje na starcie pole centralne, po czym stosuje imitację symetryczną i wygrywa; dla n parzystych wygrywa tą metodą drugi gracz. Skuteczność dla n parzystego jest dość oczywista. Dla n nieparzystego – próba dowodu nie wprost prowadzi do rozważania

hipotetycznej (wyprodukowanej przez pierwszego gracza) trójki zajętych narożników prostokąta. Dokładniejszej analizy wymagają wówczas przypadki, gdy jeden z tych trzech narożników jest polem centralnym planszy, bądź też gdy dwa z nich leżą symetrycznie względem środka. Bardzo staranne rozwiązanie tą metodą przedstawił **K. Dorobisz**.

Jeszcze kilku uczestników podało rozwiązania zasadniczo poprawne (jedną lub drugą metodą), z mniejszą troską o szczegóły.

Zadanie 562 [$\triangle ABC$; $|AB| = |AC|$; punkt D na boku BC ; punkt F na okręgu ACD , wewnątrz $\triangle ABC$; punkt E na okręgu BDF , na boku $AB \Rightarrow |CD| \cdot |EF| + |DF| \cdot |AE| = |BD| \cdot |AF|$] ($WT = 2,68$; $LPR = 7$). Zgrabne rozwiązanie przedstawili **J. Cisło** i (bardzo podobnie) **T. Tkocz**.



Z warunków zadania łatwo wynika, że czworokąty $FDCA$ i $FEBD$ mają kąty odpowiednio równe. W okrąg ADC wpisujemy czworokąt $F'E'B'D'$ podobny do $FEBD$ (i tak samo zorientowany) tak, by $F' = F$. Ma on kąty takie, jak $FDCA$, a zatem $B' = C$ oraz $|AD'| = |DE'|$. Twierdzenie Ptolemeusza dla czworokątów $FE'DC$ i $FCD'A$ daje równości

$$\begin{aligned} |DF| \cdot |B'E'| - |CD| \cdot |E'F'| &= \pm |CF| \cdot |DE'|, \\ |AC| \cdot |D'F'| - |AF| \cdot |B'D'| &= \pm |CF| \cdot |AD'| \end{aligned}$$

(jednocześnie znak plus lub minus, zależnie od uporządkowania punktów na okręgu). Prawe strony są równe. W równości uzyskanej z przyrównania lewych stron można pominąć „prymy” (bo $F'E'B'D' \sim FEBD$); dzięki zależności $|AC| - |BE| = |AE|$, wychodzi równość z tezy.

A. Woryna wskazał liczne pary trójkątów podobnych, uzyskując również ładny dowód. **M. Kieza**, autor zadania, jest też autorem rozwiązania firmowego; takie samo znalazł **J. Olszewski**. Trygonometrycznie: **K. Dorobisz**, **P. Najman**.

Przewidywanie trzęsień ziemi...

... pozostaje w sferze życzeń. Choć coraz lepiej rozumiemy mechanizm ich powstawania, to nadal nie udaje się prognozować ani momentu, ani siły spodziewanej katastrofy.



Stosunkowo prosto można przeprowadzić doświadczenie, które obrazuje mechanizm powstawania trzęsień ziemi. Wystarczą dwie zapalniczki, palce i trochę wprawy. Chwytny zapalniczkę między opuszką kciuka i palca wskazującego, a następnie wciskamy między zapalniczkę i kciuk palec środkowy tak, aby zapalniczka była mocno dociśnięta do paznokcia tego palca (zobacz najniższe, czyli pierwsze zdjęcie sekwencji). Wykorzystując, jako podpórki, palec wskazujący drugiej ręki, kładziemy na pierwszej zapalniczce drugą zapalniczkę. Następnie zwiększamy docisk zapalniczki do paznokcia tak, żeby spowodować jej przesunięcie. Ważne, żeby przesunięcie wynikało z docisku do umieszczonego pod kątem do działającej siły paznokcia. Zapalniczka będzie przesuwana się skokami. Każdy skok będzie widoczny jako poderwanie końca drugiej zapalniczki. Przy odrobinie cierpliwości doczekamy się dużego wstrząsu. Zapalniczka gwałtownie odskoczy jak na zamieszczonej sekwencji zdjęć.

W przypadku trzęsień ziemi dwa fragmenty skorupy ziemskiej przesuwają się względem siebie właśnie w taki sposób, że nacisk buduje naprężenie, które rozładowuje się skokowo.

Pamiętam, że opisaną wyżej sztuczkę z zapalniczkami pokazywało się niewtajemniczonym jako dowód posiadania zdolności telekinezy. Rzeczywiście, przesunięcia dociskanej zapalniczki są trudne do zauważenia, podobnie jak fakt silnego dociskania tej zapalniczki do paznokcia.

Z trzęsieniami ziemi jest podobnie. Najczęściej nikt nie zdaje sobie sprawy z tego, że silne trzęsienie ziemi ma za chwilę nastąpić. Zdarza się, że wysyłane są sygnały ostrzegawcze, które rozumieją naukowcy (albo inne zwierzęta), ale nie jest to regułą. Nie każda seria sygnałów ostrzegawczych kończy się trzęsieniem ziemi. Pozostaje unikanie rejonów sejsmicznych lub tworzenie odpowiednio odpornych budowli w takich rejonach. Tylko nikt nie jest w stanie zbudować czegokolwiek odpornego na największe wstrząsy, które zdarzają się niezwykle rzadko (ludzkość nie pamięta żadnego takiego wydarzenia), ale to one wypiętrzają łańcuchy górskie.

Niestety, istotne postępy w przewidywaniu trzęsień są zauważalne w stopniu podobnym ruchom górotwórczym. Dlatego każdy nowy element układanki wzbudza duże zainteresowanie. W zeszłym roku udało się zrozumieć jeden z mechanizmów powodujących wstrząsy o małej sile. Po sprawdzeniu zapisów sejsmograficznych dotyczących kilkunastu największych katastrof, począwszy od trzęsienia ziemi o sile 7,3 w Landres (Kalifornia) w 1992 roku, okazało się, że wywołane powierzchniowe fale sejsmiczne wywołują niewielkie wstrząsy nawet po drugiej stronie planety. Na przykład, największe z ostatnich trzęsień ziemi, które w grudniu 2004 roku wywołało tsunami na Oceanie Indyjskim, wywołało wstrząsy, między innymi, na Alasce, w Kalifornii i w Ekwadorze. Efekt był obserwowany nie tylko w rejonach czynnych sejsmicznie, lecz również w obszarach uspionych, w których normalnie nie obserwuje się wzajemnego ruchu zetkniętych elementów skorupy ziemskiej. Może więc on mieć znaczenie również dla Polski. Przecież granica między największymi jednostkami geologicznymi Europy przebiega od Kołobrzegu po Przemyśl oraz wzdłuż Karpat.

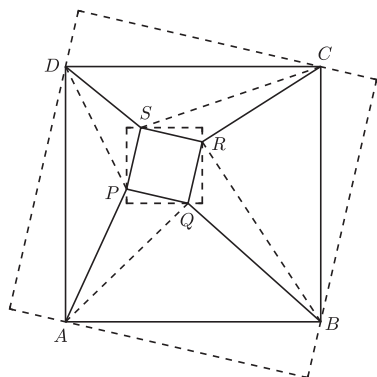
Piotr ZALEWSKI



Rozwiązanie zadania M 1232.

Oznaczmy przez $d(X, \ell)$ odległość punktu X od prostej ℓ , a przez $[\mathcal{F}]$ pole figury \mathcal{F} .

Poprowadźmy przez punkty P, Q, R, S proste równoległe do boków kwadratu $ABCD$, jak pokazano na rysunku.



Ponieważ figurą ograniczoną przez te proste jest kwadrat, więc

$$d(Q, AB) + d(S, CD) = d(P, DA) + d(R, BC).$$

Mnożąc tę równość stronami przez $a/2$, gdzie a oznacza długość boku kwadratu $ABCD$, uzyskujemy

$$(1) [ABQ] + [CDS] = [DAP] + [BCR].$$

Analogicznie, prowadząc proste równoległe do boków kwadratu $PQRS$ przez punkty A, B, C, D , dowodzimy, że

$$(2) [PQA] + [RSC] = [SPD] + [QRB].$$

Dodając stronami zależności (1) i (2), otrzymujemy tezę.



Rozwiązanie zadania F 734.

Zmiana temperatury prowadzi do zmiany długości jednolitego wahadła, co odbija się na dokładności odmierzanego czasu. W opisywanych zegarach, potencjalnie narażonych na duże wahania temperatury, dzięki tej specyficznej konstrukcji udaje się ominąć ten problem. Na przykład przy podwyższonej temperaturze długość wahadła rośnie. Ale ogrzana rtęć zwiększa objętość i podnosi się w górę wzdłuż rurki, co przy odpowiednio dobranej objętości rtęci i średnicy rurki pozwala zachować stałą odległość między punktem zaczepienia wahadła a jego środkiem masy. Bo to ta długość, a nie długość samego wahadła, określa okres drgań, a zatem i „chodzenie” zegara.

Patrz w niebo

Gwiazda o numerze katalogowym HD 209458 często jest opisywana jako przykład, czego można się dowiedzieć o obiekcie bezpośrednio niewidocznym, i to nawet przez wielkie teleskopy. Tym niewidocznym obiektem jest planeta obiegająca tę gwiazdę. Sama gwiazda jest podobna do Słońca, leży w odległości około 50 pc w Pegazie, a jej jasność wynosi 7 mag. O istnieniu planety wiadomo stąd, że co 3,5 dnia obserwuje się przygaśnięcia gwiazdy o 1,5% (w świetle widzialnym). Liczba ta sugeruje, że rozmiar planety wynosi 1,3 rozmiaru Jowisza, zarazem na podstawie zmian prędkości radialnej gwiazdy masa planety została oceniona na 2/3 masy Jowisza. Najciekawsze jednak jest to, że obserwacje w nadfiolecie (w szczególności w linii wodoru Lyman-alfa, prowadzone za pomocą teleskopu Hubble'a) dowodzą, że gwiazdę przesłania obiekt znacznie większy. Narzuca się, że jest nim obłok wodoru parującego z planety!

Prowadzi to do następujących wniosków szczegółowych. Gęstość i rozmiary obłoku dowodzą, że planeta traci 10 000 ton wodoru na sekundę. Gdyby tempo parowania miało być stałe w ciągu nawet miliardów lat życia planety, to utraciłaby ona zaledwie tysięczną część swojej początkowej masy. Badacze sugerują jednak, że oprócz wodoru planeta może (a właściwie nawet powinna) tracić również inne składniki, czego dotychczas nie zaobserwowano. Asymetria zaćmienia przez obłok wodoru dowodzi, że ciągnie się on za planetą na jej orbicie, czyli może przypominać warkocz komety. Specjaliści od modelowania atmosfer planetarnych posunęli się nawet do wysunięcia wniosku, że w górnej atmosferze planety przy HD 209458 dominują wiatry równoleżnikowe i potężne wiry przy biegunach!

Na poparcie tych wszystkich wniosków badacze nieustannie próbują zaobserwować światło gwiazdy odbite od planety – na razie bez rezultatu. Próbuje też zaobserwować linie (pasma) absorpcyjne np. tlenu węgla, którego obecność umożliwiłaby oszacowanie najniższej możliwej temperatury w atmosferze planety. Mimo negatywnych wyników obserwatorzy nie tracą nadziei – bądź co bądź planeta przesłania gwiazdę dwa razy na tydzień i nowe pomysłowe obserwacje można rozpocząć niemal w każdej chwili.

Tomasz KWAST

Luty

Zima w pełni, a zatem wieczorami nad południowym horyzontem widzimy w całej okazałości Oriona. Jest to, poza Wielką Niedźwiedzicą, najłatwiej rozpoznawalny gwiazdozbiór, a przynajmniej jego centralna część, przedstawiająca tułów mitologicznego myśliwego. Jego „pas” stanowią trzy gwiazdy o podobnych jasnościach, a w dodatku leżące z wysoką dokładnością na linii prostej, ściślej – na łuku koła wielkiego. W przestrzeni nie wyznaczają one żadnej prostej nawet w przybliżeniu, gdyż ich odległości od Ziemi są (od lewej) 450 (zeta), 500 (epsilon) i 250 pc (delta). W pobliżu zety leży słynna ciemna mgławica Koński Łeb – niestety, widoczna dopiero na zdjęciach z długą ekspozycją. Zwrot „w pobliżu” oznacza tu znowu położenie na niebie, bo jest ona odległa od nas o 120 pc, a więc w przestrzeni bynajmniej nie leży w pobliżu zety.

Wenus jest w Rybach i wieczorem zachodzi. Mars i Jowisz są w Koziorożcu, czyli blisko Słońca, zatem ich nie widać. Saturn jest we Lwie i widać go przez całą noc. Pełnia Księżyca wypada 9 II, a nów 25 II. Jak na najkrótszy miesiąc będzie wyjątkowo dużo zakryć, niestety żadne nie będzie widoczne w Polsce. I tak 17 II Księżyc zakryje Antaresa (co zobaczą mieszkańcy Azji, Indonezji, Australii), 22 II Merkurego (Japonia, Chiny, Syberia, Alaska), 23 II Jowisza (Filipiny, Chiny, Syberia) i 27 II Wenus (widoczne na Pacyfiku na południowy zachód od Chile). W dodatku podczas pełni będzie półcieniowe zaćmienie Księżyca, ale maksymalna faza nastąpi u nas za dnia. Merkury 13 II znajdzie się najbardziej na zachód od Słońca i można go szukać na wschodnim niebie przed wschodem Słońca. Oprócz zakrycia Antaresa 17 II Mars i Jowisz zbliżą się na 0°6', a 24 II Merkury i Jowisz również na 0°6'. Żadnych przewidywalnych rojów meteorów w lutym nie będzie.

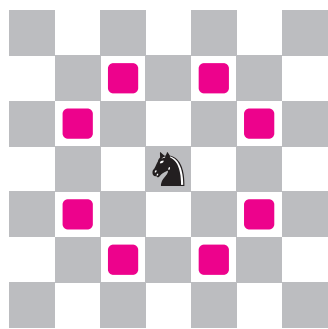
T. K.



Peter Gustaw Lejeune Dirichlet – matematyk niemiecki (1805–1859).

Więcej o ZSD:

- [1] K. Bankov, *Applications of the pigeon-hole principle*, The Math. Gazette 79 (V.1995), 286–292.
- [2] J. Jaszuńska, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, broszura I Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, 2008.
- [3] A. Mąkowski, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, Biblioteczka Delty, WSiP, Warszawa, 1980.
- [4] D. Ch. Musztari, *Przygotowanie do olimpiad matematycznych*, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna Adam, Warszawa, 2002.
- [5] J. Pochrybniak, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, <http://www.mimuw.edu.pl/kolkomat/materialy/dirichlet.pdf>.



Możliwe ruchy konika szachowego

Zasada szufladkowa Dirichleta (ZSD) głosi, że jeśli umieszczamy $n + 1$ królików w n szufladkach, to w co najmniej jednej szufladce muszą się znaleźć co najmniej dwa króliki. Łatwo to sprawdzić dla $n = 1$ (dwa króliki w jednej szufladce), $n = 2$ (trzy króliki w dwóch szufladkach), $n = 3 \dots$ Nietrudno też rozbudować do uogólnionej zasady szufladkowej Dirichleta (UZSD): jeśli umieszczamy $nk + 1$ królików w n szufladkach, to w co najmniej jednej szufladce musi się znaleźć co najmniej $k + 1$ królików. Oto kilka zastosowań ZSD w zadaniach geometrycznych.

1. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 2 wybrano pięć punktów. Udowodnij, że pewne dwa spośród nich są odległe o co najwyżej 1.

R. Dzielimy trójkąt na 4 małe trójkąciki, łącząc środki boków. W którymś z nich muszą być co najmniej dwa punkty i ich odległość nie przekracza 1. \square

2. Wykaż, że w każdym wielościanie pewne dwa wierzchołki mają tyle samo krawędzi.

R. Każdy z n wierzchołków ma co najmniej 3 i co najwyżej $n - 1$ krawędzi. Jest zatem $n - 3$ możliwych liczb krawędzi, więc z ZSD któreś dwa wierzchołki mają ich tyle samo. \square

3. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że środek któregoś z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym.

R. Każdy z danych pięciu punktów ma współrzędne jednego z czterech rodzajów: (P, P) , (P, N) , (N, P) lub (N, N) , gdzie P to liczba parzysta, a N – nieparzysta. Zatem z ZSD pewne dwa punkty A i B mają współrzędne tego samego rodzaju. Środek odcinka AB jest punktem kratowym, bo średnia arytmetyczna liczb o tej samej parzystości jest liczbą całkowitą. \square

4. Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw siedli przy stole w sposób losowy tak, że żaden z nich nie zajął odpowiedniego miejsca. Wykaż, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

R. Dla każdego ze 100 ambasadorów istnieje dokładnie jedno właściwe ustawienie stołu spośród 100 możliwych. Skoro wyjściowa sytuacja nie jest dobra dla nikogo, to któreś z pozostałych 99 ustawień musi być odpowiednie dla przynajmniej dwóch osób. \square

5. Wykaż, że w każdym wypukłym parzystokącie istnieje przekątna, która nie jest równoległa do żadnego z boków.

R. Skorzystamy z faktu, że n -kąć ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych (proszę sprawdzić!). Zatem $2k$ -kąć ma $k(2k - 3) = 2k(k - 2) + k$ przekątnych. Załóżmy, że każda z nich jest równoległa do któregoś z boków. Wtedy z UZSD do któregoś z $2k$ boków równoległych jest co najmniej $k - 1$ przekątnych. Końcami tych przekątnych oraz boków są różne wierzchołki wielokąta, jest ich łącznie co najmniej $2((k - 1) + 1) = 2k$. Wielokąć jest wypukły, więc aby wszystkie przekątne faktycznie były przekątnymi, musi istnieć jeszcze co najmniej jeden wierzchołek. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. \square

6. Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 koników szachowych. Czy można z nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa się nie atakują?

R. Konik stojący na czarnym polu nie atakuje żadnego z czarnych pól i analogicznie dla konika stojącego na białym polu (rysunek). Z UZSD, spośród 1999 skoczków co najmniej 1000 stoi na polach jednego koloru. Żadne dwa z nich się nie atakują. \square

*Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

Kilka zadań domowych:

7. Na płaszczyźnie narysowanych jest $2n + 1$ okręgów o promieniu $\sqrt{5}$ i o środkach w punktach kratowych. Wykaż, że można zetrzeć n spośród tych okręgów tak, aby wśród pozostałych żaden nie przechodził przez środek żadnego innego.

Wskazówka. Jak względem środka pojedynczego okręgu położone są wszystkie punkty kratowe, przez które on przechodzi? Skorzystaj z zadania 6.

8. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że pewne trzy z tych punktów tworzą trójkąt o obwodzie nie większym niż 3.

9. Na płaszczyźnie danych jest n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe. Wykaż, że wtedy pewne dwie z nich przecinają się pod kątem nie większym niż $\frac{180^\circ}{n}$.

10. Sześcian przecinamy płaszczyzną. Czy można w przekroju otrzymać czworokąt, który nie jest trapezem?