

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (433)

Meteory – przepustka w świat drobnej materii w Układzie Słonecznym <i>Mariusz Wiśniewski</i>	str. 1
Czwarty okrąg <i>Michał Kieza</i>	str. 3
Liczba liczb <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 6
Jak złamałem system RSA <i>Juliusz Szczęsny Batura</i>	str. 8
Zadania	str. 9
Mały skok <i>Krzysztof Turzyński</i>	str.10
Wyniki olimpiad 2009/2010	str.11
Informatyczny kącik olimpijski (31): Diamenty <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.15
Rezonans parametryczny <i>Grzegorz Derfel</i>	str.16
Poznajemy właściwości tarcia. Część II: Wyznaczamy współczynniki tarcia <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Aktualności	str.20
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz w niebo: Ogólna teoria względności	str.24
Czerwiec	str.24
Zobaczyć przestrzennie <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze:
Gry

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartoł, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja „Delta”, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl, tel. 22-55-44-402.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-785 Warszawa, ul. Broniewskiego 8A (tel. 22-639-73-67)

internet: www.amos.waw.pl , e-mail: biuro@amos.waw.pl

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy miesiące.** Cena jednego numeru w 2010 roku wynosi 4 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2010 r. wynosi 8 zł. W przypadku życzenia dostawy priorytetowej odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP SA I O/W-wa, nr 11 1020 1013 0000 0502 0004 0584

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

internet www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Cena prenumeraty w 2010 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują jednostki kolportażowe „RUCH” SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania prenumeraty: do 5. każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-5328-731 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -734, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Oddziału lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), infolinia 800-1200-29.

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto SWIFT banku: PKOPPLPWWA4; w USD PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508; w EUR PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1978 0000 0443 0511; kserokopię polecenia przelewu należy przesłać faksem pod numer +48-22-5328-731.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (streszczenia, artykuły archiwalne, linki itd.):
<http://www.mimuw.edu.pl/delta>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Meteory – przepustka w świat drobnej materii w Układzie Słonecznym

Mariusz WIŚNIEWSKI*

Około 5 miliardów lat temu z wielkiego obłoku pyłu i gazu narodził się nasz Układ Słoneczny. W wyniku łączenia się drobin materii w coraz to większe ciała powstały planety i ich księżyce. Nie cała materia została związana w tych ciałach. W przestrzeni otaczającej Słońce pozostały miliony planetoid, komet oraz niezliczona ilość głazów, kamyków, piasku, aż po drobny pył.

Materia, z której zbudowane są niewielkie obiekty Układu Słonecznego, jest bardzo zróżnicowana, a jej skład uzależniony jest od odległości od Słońca. W obszarze położonym wewnątrz orbity Jowisza znajdują się przeważnie obiekty skaliste. Poruszają się one na ogół w pasie planetoid, a nieliczne z nich zapędzają się w okolice Ziemi. Im dalej od Słońca, tym częściej spotkać można ciała zbudowane głównie z mieszaniny lodu, pyłu i gruzu. Lód przetrwał tu od czasów powstania Układu Słonecznego, gdyż w dużych odległościach od Słońca promieniowanie naszej gwiazdy jest za słabe, by spowodować jego odparowanie.

Ważnym czynnikiem wpływającym na formowanie się Układu Słonecznego był Jowisz, najbardziej masywna z planet. To za jego sprawą powstał pas planetoid pomiędzy orbitami Marsa i Jowisza. Reszta drobnych ciał została wypchnięta aż za orbitę Neptuna, tworząc zewnętrzny pas planetoid, zwany pasem Kuipera. Najdalej położonym skupiskiem obiektów należącym do naszego układu planetarnego jest obłok Oorta. Przypuszcza się, że jest on głównym źródłem komet, które niespodziewanie pojawiają się na naszym niebie.

Drobna materia wypełniająca Układ Słoneczny to nie tylko ślad po dysku protoplanetarnym otaczającym młode Słońce. W przestrzeni międzyplanetarnej możemy natknąć się na drobiny, które opuściły powierzchnię większych ciał, takich jak komety czy planetoidy. Drobiny te zwykle poruszają się po orbitach zbliżonych do tych, jakie miały ich ciała macierzyste. Tworzą zwarte strumienie opasujące Słońce eliptycznymi wstęgami.

Istnieje kilka sposobów, które umożliwiają małym fragmentom związanej materii powrót do przestrzeni międzyplanetarnej. W przypadku komet odpowiedni proces jest bardzo spektakularny. Kometa zbliżająca się do Słońca wystawiona jest na coraz silniejsze promieniowanie. W pewnym momencie lód, z którego zbudowana jest kometa, zaczyna parować, a powstająca para wodna wydostaje się na powierzchnię komety w postaci gejzerów. Ciśnienie gazów jest wystarczające, by z komety wyrzucone zostały również drobinki pyłu, zwłaszcza że grawitacja na powierzchni małej komety jest niewielka, więc mała jest też prędkość wystarczająca do ucieczki z takiej komety.

Innym sposobem na pokonanie grawitacji jest wyrzut materii podczas zderzenia dwóch planetoid. W jego wyniku powstaje zazwyczaj niewielki krater na powierzchni, lecz, jeśli zderzające się ciała są porównywalnej wielkości, może dojść nawet do ich całkowitego rozpadu i powstania chmury drobnych obiektów. Od niedawna wiadomo jednak, że niewielkie planetoidy przypominają bardziej luźne zlepki kamieni i pyłu. Amortyzuje to uderzenia i, wbrew naszym dawnym wyobrażeniom, zwykle dochodzi do niegroźnego zlepiania się ciał w jedno. Obserwuje się też wiele planetoid podwójnych, które łagodnie zbliżyły się do siebie, a obecnie stykają się.

Najbardziej zaskakującym sposobem na opuszczenie planetoidy przez drobinę materii jest wyrzucenie jej pod wpływem rotacji. Sondy kosmiczne wysłane do badania planetoid zaobserwowały toczenie się głazów po ich powierzchni. Dla niewielkich, szybko rotujących planetoid siła odśrodkowa może minimalnie przewyższać siłę grawitacji.

Ziemia porusza się wśród planetoid oraz w gęszczu drobin o bardzo różnorodnej historii i rozmiarach. Każdego dnia nieustannie bombardowana jest przez materię kosmiczną. Przelot drobin materii, zwanych meteoroidami, przez atmosferę powoduje rozgrzanie na ich trasie powietrza do temperatur wystarczających do jonizacji atomów. Część trajektorii meteoroidu w atmosferze jest zatem widoczna jako świecąca smuga, zwana meteorem. Tylko dla bardzo dużych obiektów możemy dostrzec światło pochodzące bezpośrednio od ich rozgrzanej materii. Jej skład chemiczny można wtedy określić na podstawie obserwowanego widma.

Atmosfera ziemską stanowi zatem gigantyczny detektor materii międzyplanetarnej. Obserwując ślad nakreślony w przestrzeni przez przelatujące ziarnko piasku, jesteśmy w stanie powiedzieć, skąd ono do nas przyleciało, jaka była jego historia, a nawet czy zobaczymy więcej jemu podobnych.

Meteory obserwowano od niepamiętnych czasów. Mimo to aż do XIX wieku nie wiadomo, jaka jest prawdziwa natura tego zjawiska. Przełomem w badaniach nad meteorami była noc z 12 na 13 listopada 1833 roku. Wystąpił wówczas ogromny deszcz meteorów. Po raz pierwszy zauważono, że wszystkie meteory wylaływały z jednego miejsca na niebie, znajdującego się w gwiazdozbiórze Lwa. Wyjaśnienie zjawiska jako pierwszy podał Denison Olmsted. Wykazał, że zrzutowanie na sferę niebieską równoległych torów meteoroidów daje złudzenie, że wybiegają one z jednego miejsca, zwanego radiantem. Roje noszą nazwy od gwiazdozbiórów, w których znajduje się ich radiant, stąd meteory o radiantem w gwiazdozbiórze Lwa nazywamy Leonidami. Szybko okazało się, że to nie pierwsze takie zjawisko, a wzmogłą aktywność Leonidów

*Pracownia Komet i Meteorów

obserwowano również w latach 902, 934, 967, 1037, 1202, 1366, 1533 i 1799. Na przełomie 1865 i 1866 roku Wilhelm Tempel i Horace P. Tuttle odkryli kometę, która porusza się po orbicie prawie takiej samej jak Leonidy. Jasne stało się, że roje meteorów tworzone są przez komety. Wkrótce także inne komety powiązane zostały z obserwowanymi na niebie rojami meteorów.

Niebo „meteorowe” dynamicznie się zmienia. Świadczy o tym chociażby fakt, że wzmożona aktywność Leonidów obserwowana była tylko w niektórych latach. Zmiany w ilości obserwowanych meteorów występują dla wszystkich źródeł. Niektóre z nich znikają, inne nagle pojawiają się, nigdy wcześniej nieobserwowane. Dzieje się tak za sprawą ewolucji orbit meteoroidów oraz ich ciał macierzystych.

Głównym czynnikiem powodującym zmianę orbity meteoroidów jest wpływ grawitacyjny planet, a w szczególności Jowisza. Oprócz tego na drobiny materii działają efekty niegravitacyjne. Radialnie od Słońca skierowana jest siła związana z ciśnieniem promieniowania. Ma ona szczególnie duże znaczenie dla bardzo małych drobin, o dużym stosunku powierzchni do masy. Małe drobin są wywiewane ze strumienia meteoroidów niczym liście na wietrze. Na średniej wielkości drobin działa efekt Poyntinga–Robertsona. Poruszając się po swojej orbicie, rozpraszają one na wszystkie strony promieniowanie słoneczne, co powoduje ich spowalnianie i, co za tym idzie, zacieśnianie się ich orbit. Dla nieco większych obiektów występuje efekt Yarkovsky’ego, polegający na zmianie ich prędkości orbitalnych. W trakcie ruchu orbitalnego meteoroidy obracają się także wokół swej osi. Powierzchnia ciała znajdująca się po stronie dziennej jest nagrzewana, a następnie stygnie, kiedy znajdzie się po stronie nocnej. Emisja fotonów podczas stygnięcia w zależności od kierunku rotacji powoduje przyspieszenie bądź spowalnianie ciała w jego ruchu orbitalnym. Wszystkie te efekty sprawiają, że różne drobin, opuszczające kometę bądź planetoidę, będą miały w przyszłości różne orbity.

Badania nad wpływem efektów niegravitacyjnych na meteoroidy nie byłyby możliwe bez obserwacji meteorów. Dzięki wyznaczaniu poziomu aktywności rojów możliwe jest porównywanie teoretycznych modeli ewolucji strumieni drobin materii wyrzucanych przez komety z faktycznym ich zachowaniem się.

Na podstawie obserwacji meteorów można również poznać rozmiary drobin tworzących strumienie. Im obiekt wpadający w atmosferę jest większy oraz im szybciej się porusza, tym jaśniejszy pozostawia po sobie ślad. Dowiadujemy się w ten sposób, jakie cząstki są wyrzucane z jąder kometarnych, gdy strumień pochodzi od komety, lub jakie cząstki uciekają z powierzchni planetoid. Tak poznajemy szczegóły procesów erozji tego typu obiektów.

Obserwując meteory, można również badać skład chemiczny materii kosmicznej. Duże odłamki, płonące w atmosferze, w wyświecanym blasku ujawniają linie widmowe pierwiastków, z jakich są zbudowane. Największe z nich mają szansę przedrzeć się przez

atmosferę i spaść na powierzchnię Ziemi. Takie kamienie z kosmosu nazywane są meteorytami. Badania nad składem i strukturą meteorytów przyczyniają się do lepszego zrozumienia historii Układu Słonecznego.

Kolekcje meteorytów zgromadzone w muzeach, ośrodkach badawczych i u kolekcjonerów wciąż wielokrotnie przewyższają masą i różnorodnością próbki dostarczone podczas wypraw księżycowych oraz misji sond kosmicznych. Informacja o składzie obiektu w połączeniu z ustaleniem orbity, po jakiej poruszało się ciało, pozwala zajrzeć w najdalsze zakątki układu planetarnego bez ruszania się z Ziemi.

Meteority dzielimy na cztery główne grupy. Chondryty są pierwotną materią ocalałą z czasów powstawania Układu Słonecznego i charakteryzują się małą gęstością. Achondryty to materia pochodząca z powierzchni planetoid, składająca się głównie z pozlepianego gruzu. Meteority żelazne powstały w jądrach dużych planetoid, a zbudowane są z kryształów żelaza i niklu. Wreszcie meteority żelazno-kamienne powstały najprawdopodobniej z mieszaniny materiału z jądra i płaszcza większych planetoid. Budowa materii meteoroidu ma wpływ na jego zachowanie się podczas lotu w atmosferze. Meteority o zwartej budowie świecą jednolicie przez większość swojego lotu. Mają też największą szansę na wylądowanie na Ziemi, gdyż meteoroidy o luźnej konsystencji ulegają szybkiemu rozpadowi na drobne kawałki, czyli fragmentacji. Materia kometarna charakteryzuje się występowaniem wielu gwałtownych pojaśnień podczas lotu. Niestety, ze względu na dominującą zawartość lodu oraz duże prędkości wejścia w atmosferę szansa na uzyskanie tej materii ze spadku jest praktycznie zerowa.

Badaniami meteorów zajmuje się wiele ośrodków na świecie, między innymi NASA oraz ESA. W Polsce zainteresowani tematyką meteorów skupieni są wokół Pracowni Komet i Meteorów (PKiM). Stowarzyszenie to prowadzi projekt o nazwie Polish Fireball Network (PFN), czyli Polska Sieć Bolidowa, którego celem jest obserwacja zjawisk mogących zakończyć się spadkiem meteorytów, oraz znalezieniem tych meteorytów. Oprócz tego kamery pracujące w ogólnopolskiej sieci rejestrują setki słabych zjawisk. Do obserwacji wykorzystywany jest specjalnie przygotowany sprzęt fotograficzny oraz czułe kamery wideo. Na podstawie obserwacji przeprowadzane są szczegółowe analizy zachowania się rojów meteorów.

Obserwacje mające na celu określenie intensywności strumieni meteorów wykonywane są przede wszystkim technikami wizualnymi i radiowymi. Wciąż najdoskonalszym detektorem meteorów jest ludzkie oko. Standardowe metody prowadzenia obserwacji wizualnych oraz analizowania danych pozwalają na ich porównywanie z wynikami uzyskiwanymi przez inne grupy badaczy oraz z wynikami z lat wcześniejszych. Stosowanie nasłuchu radiowego umożliwia wykonywanie obserwacji niezależnie od pogody i pory dnia. Niestety, proste obserwacje radiowe nie pozwalają określić pochodzenia poszczególnych rejestrowanych zjawisk.

Każdy może włączyć się do działań prowadzonych przez Pracownię Komet i Meteorów. Wartościowe naukowo obserwacje wizualne nie wymagają żadnych nakładów finansowych, a jedynie poświęcenia kilku godzin i spędzenia ich pod rozgwieżdżonym niebem. Udział w projekcie PFN wymaga już pewnych nakładów, koniecznych do uruchomienia stanowiska obserwacyjnego umożliwiającego automatyczne zbieranie danych. Czekają też na chętnych wiele materiałów do przeanalizowania.

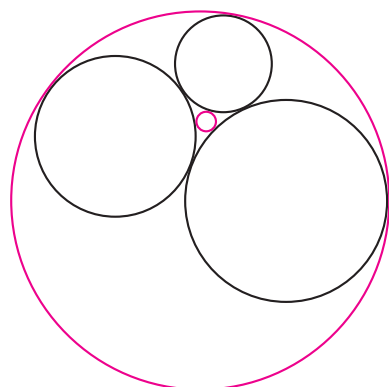
Dobrym punktem startu może być udział w Projekcie Perseidy 2010, organizowanym przez PKiM. Tegoroczne maksimum roju Perseidów wystąpi w okolicach sierpniowego nowiu Księżyca. Nasz satelita nie będzie więc przeszkadzał podczas obserwacji i na ciemnym niebie zobaczymy setki meteorów należących do tego roju.

Z tej okazji w Urzędowie w dniach 7–21 sierpnia zorganizowane zostanie dwutygodniowe spotkanie, którego celem będzie obserwacja tego największego wakacyjnego roju meteorów. Uczestnicy spotkania zapoznają się z metodami prowadzenia obserwacji oraz sposobem analizy zebranych wyników. Udział w spotkaniu jest bezpłatny. Dodatkową atrakcją spotkania będzie Ogólnopolski Zlot Miłośników Astronomii (OZMA), który w tym roku zawita do Urzędowa w dniach 12–15 sierpnia.

Więcej informacji o meteorach, działalności Pracowni Komet i Meteorów, oraz sposobach prowadzenia obserwacji i możliwościach współpracy można znaleźć na stronie www.pkim.org. Zachęcamy do kontaktu z Pracownią poprzez adres e-mail pkim@pkim.org.

Czwarty okrąg

Michał KIEZA



Rys. 1

Załóżmy, że mamy dane trzy okręgi parami styczne oraz czwarty styczny do każdego z nich (istnieją dwa takie okręgi – jeden z nich jest zazwyczaj styczny wewnątrz, a w szczególnym przypadku może okazać się prostą). Przez b_i dla $i = 1, 2, 3, 4$ oznaczmy kolejno ich krzywizny (krzywizna okręgu jest co do wartości bezwzględnej równa odwrotności promienia). W naszej sytuacji przyjmujemy, że krzywizny pierwszych trzech są dodatnie, a krzywizna czwartego okręgu jest dodatnia w przypadku, gdy jest on styczny zewnętrznie do pozostałych trzech, ujemna, jeśli jest styczny wewnętrznie, oraz równa 0, jeśli zdegeneruje się on do prostej. Wówczas zachodzi równość

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2.$$

Zależność tę odkrył w 1643 roku Kartezjusz i opisał ją w liście do księżniczki Elżbiety Czeskiej, córki Elżbiety Stuart i Fryderyka V. Rozwiązując równanie kwadratowe, możemy stąd łatwo obliczyć krzywiznę czwartego okręgu, znając krzywizny pozostałych trzech – większy z dwóch pierwiastków odpowiada wewnętrznemu okręgowi, a mniejszy zewnętrznemu. Czytelnik Wnikliwy zapewne widzi również, że jeśli będziemy znali wzory opisujące krzywizny obu dorysowanych okręgów w zależności od krzywizn pozostałych trzech, to dowiedzimy prawdziwości formuły Kartezjusza.

Fragment wiersza Fredericka Soddy'ego
The Kiss Precise:

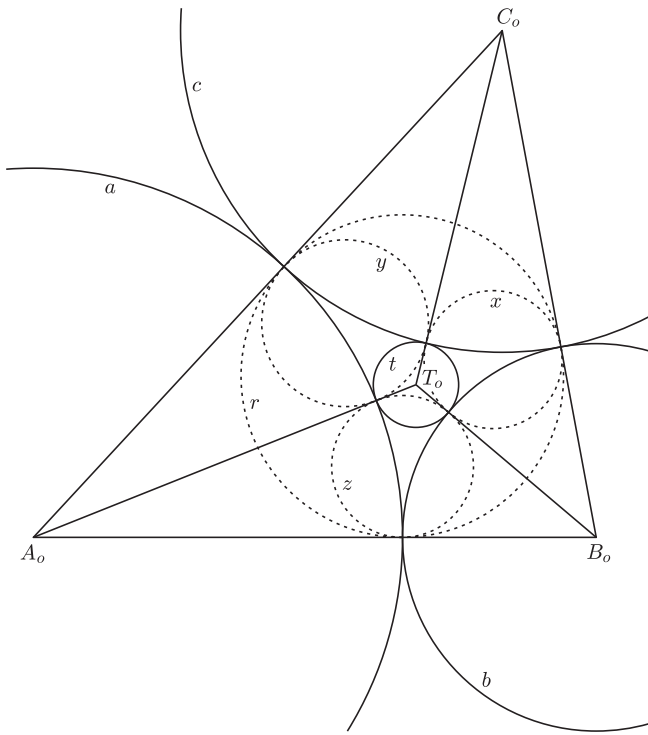
Four circles to the kissing come.
The smaller are the benter.
The bend is just the inverse of
The distance from the centre.
Though their intrigue left Euclid dumb
There's now no need for rule of thumb.
Since zero bend's a dead straight line
And concave bends have minus sign,
The sum of the squares of all four bends
Is half the square of their sum.

(*Nature* 137, 1021 (1936)).

Twierdzenie Kartezjusza odkrył na nowo w 1842 roku angielski matematyk Phillip Beecroft. Żeby było zabawniej, twierdzenie zostało jeszcze raz odkryte w 1936 roku przez Fredericka Soddy'ego (skądinąd laureata Nagrody Nobla w dziedzinie chemii za teorię rozpadu atomu i prace nad izotopami). Na jego cześć dwa okręgi styczne do danych trzech są nazywane okręgami Soddy'ego. Soddy był tak zafascynowany pięknem owej zależności, że ujął ją w swoim wierszu *The Kiss Precise*, a ponadto uogólnił ten wynik na przestrzeń. Rok później Thorold Gosset podał uogólnienie na dowolny wymiar – jeśli mamy w przestrzeni n -wymiarowej $n + 2$ sfery $(n - 1)$ -wymiarowe, to zachodzi analogiczna zależność ze stałą $1/n$.

W literaturze istnieje kilka różnych dowodów formuły Kartezjusza albo, równoważnie, wzoru na krzywiznę czwartego okręgu, jednakże wszystkie wymagają mniej lub bardziej żmudnych rachunków. W tym miejscu chciałbym przedstawić rozumowanie, które właściwie bez żadnych rachunków pozwala wyznaczyć krzywiznę czwartego okręgu w zależności od krzywizn trzech pozostałych. Posłużymy się w tym celu inwersją. Krótko przypomnijmy zatem definicję i potrzebne własności.

Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu r to przekształcenie, które każdemu punktowi $P \neq O$ przyporządkowuje punkt P' leżący na półprostej OP i spełniający warunek $OP \cdot OP' = r^2$. Można próbować wyobrażać sobie inwersję jako próbę wykonania symetrii względem okręgu. Ponieważ całą nieskończoną część płaszczyzny na zewnątrz okręgu trzeba po przekształceniu zmieścić wewnątrz, więc obszary leżące daleko od zera przy inwersji są ściskane – im dalej, tym mocniej.



Rys. 2

Z definicji wynika natychmiast, że inwersja jest przekształceniem odwrotnym do siebie samej. Ponadto przekształca proste i okręgi na proste i okręgi, w szczególności okręgi przechodzące przez środek inwersji na proste (i odwrotnie). Można również udowodnić, że inwersja zachowuje kąty między krzywymi (zachęcam Czytelników do samodzielnego sprawdzenia tego faktu).

Przyjmijmy, że mamy dane trzy okręgi parami styczne zewnętrznie, o promieniach a, b, c i środkach odpowiednio A_o, B_o, C_o , oraz czwarty okrąg styczny do nich zewnętrznie, leżący w obszarze wyznaczonym przez punkty styczności pierwszych trzech, o promieniu t i środku T_o (rozważenie przypadku, w którym czwarty okrąg jest styczny wewnętrznie do pozostałych, pozostawiam Czytelnikowi). Przez o będziemy oznaczać okrąg o promieniu o , a jego krzywiznę będziemy oznaczać wielką literą O (co – mam nadzieję – nie doprowadzi do nieporozumień). Punkty styczności okręgów b, c, t leżą na bokach trójkąta $B_oC_oT_o$ i są punktami styczności okręgu o promieniu x , wpisanego w trójkąt $B_oC_oT_o$. To samo stwierdzamy dla okręgów o promieniach y, z, r wpisanych odpowiednio w trójkąty $A_oC_oT_o, A_oB_oT_o, A_oB_oC_o$ (rys. 2). Wszystkie rekwiizyty już są przygotowane, czas rozpocząć przedstawienie.

Rozważmy inwersję o środku w punkcie styczności okręgów a i b i promieniu 1 i popatrzmy na obrazy okręgów a, b, c, t, r, z w tym przekształceniu (przyjmijmy, że o^* jest obrazem okręgu o). Wówczas okręgi a i b przejdą na dwie proste równoległe a^* i b^* , odległe od środka inwersji odpowiednio o $\frac{1}{2a}$ i $\frac{1}{2b}$, gdyż w takich odległościach leżą obrazy końców średnic tych okręgów zawierających środek inwersji. Okręgi c i t przejdą na dwa okręgi styczne zewnętrznie do siebie i styczne do a^* i b^* (c^* będzie bliżej środka inwersji niż t^*), a więc ich obrazy będą miały równe promienie. Okrąg z musi przejść na prostą przechodzącą przez punkty styczności a^* i b^* z t^* oraz odległą od środka inwersji o $\frac{1}{2z}$. Podobnie okrąg r musi przejść na prostą przechodzącą przez punkty styczności a^* i b^* z c^* oraz odległą od środka inwersji o $\frac{1}{2r}$. Proste r^* i z^* są prostopadłe do prostych a^* i b^* . Skoro okręgi c^* i t^* mają równe promienie, to czworokąt wyznaczony przez proste a^*, b^*, r^*, z^* jest kwadratem. W takim razie

$$(1) \quad \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2r}, \quad \text{czyli w języku krzywizn} \quad A + B = Z + R.$$

Okrąg r jest styczny wewnętrznie do x, y, z , więc jego krzywizna jest ujemna.

Rozumując podobnie dla punktu styczności okręgów b i c , dostaniemy

$$(2) \quad B + C = X + R,$$

a rozważając inwersję o środku w punkcie styczności b i t i przyglądając się obrazom okręgów b, t, a, c, x, z , otrzymamy

$$(3) \quad X + Z = B + T.$$

Dodając (1), (2), (3) stronami, otrzymamy

$$(4) \quad T = A + B + C - 2R.$$

Pozostaje wyrazić R w zależności od A, B, C . Łącząc wzór Herona ze wzorem na pole w zależności od obwodu i promienia okręgu wpisanego (zob. *Delta* 4/2009, *Dziesięć wzorów na pole trójkąta*), dostaniemy

$$\sqrt{abc(a+b+c)} = (a+b+c)r,$$

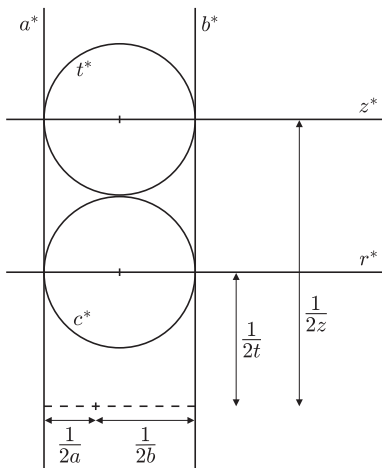
skąd w języku krzywizn mamy

$$R^2 = AB + BC + CA.$$

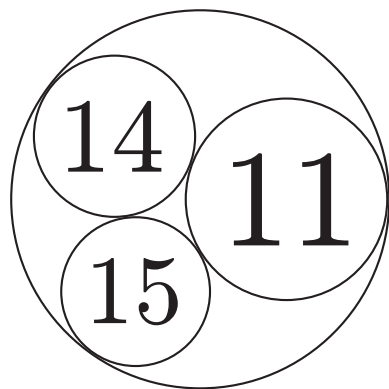
Uwzględniając, że $R < 0$ i wstawiając do (4), dostaniemy

$$T = A + B + C + 2\sqrt{AB + BC + CA}.$$

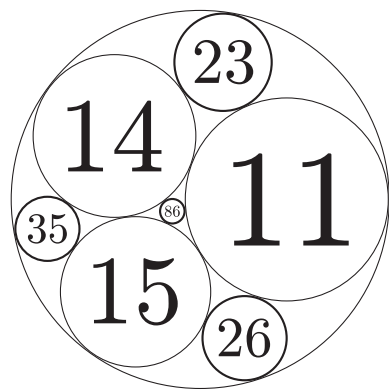
W drugim przypadku przed pierwiastkiem jest znak minus. Dowód jest więc zakończony.



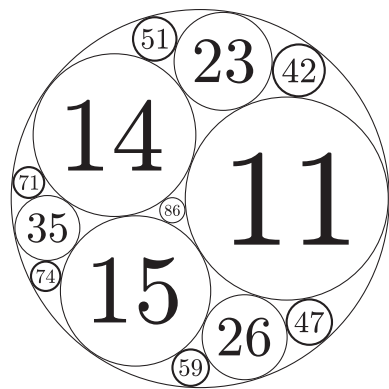
Rys. 3



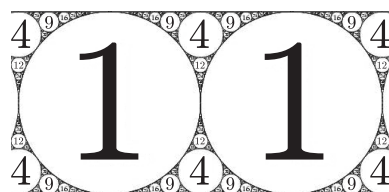
Rys. 4



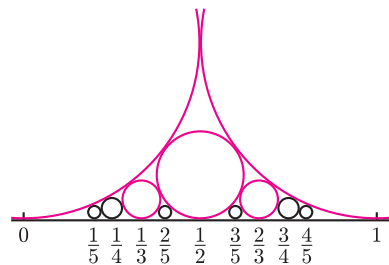
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Z twierdzeniem Kartezjusza i okręgami Soddy'ego wiąże się także inny problem – tzw. pakowanie Apoloniusza. Załóżmy, że mamy dany jeden duży okrąg oraz trzy okręgi parami styczne zewnętrznie oraz styczne wewnętrznie do pierwszego. Konstruujemy ciąg okręgów w następujący sposób: wybieramy dowolnie trzy okręgi i rysujemy czwarty styczny do każdego z nich (rys. 4–6, największy okrąg ma krzywiznę -6). Okazuje się, że jeśli pierwsze cztery okręgi miały krzywizny będące liczbami całkowitymi, to wszystkie skonstruowane okręgi też będą miały krzywizny całkowite.

Na wstępie zauważmy, że jeśli w początkowej sytuacji wytniemy z największego okręgu koła ograniczone przez pozostałe trzy okręgi, to otrzymamy w wyniku cztery obszary, każdy ograniczony przez trzy łuki. Kolejny okrąg rysujemy w jednym z tych obszarów – będzie styczny do jego brzegów, czyli do dokładnie trzech okręgów na rysunku. Analogicznie, w kolejnych krokach nie możemy dodać okręgu stycznego do więcej niż trzech narysowanych okręgów. Za każdym razem dorysowanie okręgu powoduje powstanie trzech nowych obszarów, w których możemy dodawać okręgi. Każdy obszar będzie ograniczony przez trzy łuki.

Udowodnimy przez indukcję, że po każdym wykonanym kroku krzywizny wszystkich okręgów są całkowite oraz dla każdej trójki okręgów parami stycznych co najmniej jeden z okręgów Soddy'ego znajduje się już na rysunku. Bazę indukcyjną mamy za darmo. Załóżmy, że po pewnej liczbie kroków krzywizny wszystkich narysowanych okręgów są całkowite i dla każdej trójki okręgów parami stycznych istnieje co najmniej jeden z okręgów Soddy'ego. Chcemy dorysować okrąg s_1 styczny do trzech parami stycznych okręgów k_1, k_2, k_3 , czyli jeden z okręgów Soddy'ego tej trójki. Z założenia indukcyjnego wynika, że s_2 , drugi okrąg Soddy'ego tej trójki, został już narysowany. Z formuły Kartezjusza i wzorów Viète'a wynika, że suma krzywizn okręgów s_1 i s_2 jest równa podwojonej sumie krzywizn okręgów k_1, k_2, k_3 . Ponieważ z założenia indukcyjnego krzywizny okręgów k_1, k_2, k_3 i s_2 są całkowite, więc krzywizna okręgu s_1 też jest całkowita. Aby dokończyć krok indukcyjny, wystarczy jeszcze zauważyć, że dla każdej trójki spośród czterech okręgów k_1, k_2, k_3, s_1 istnieje co najmniej jeden z okręgów Soddy'ego; dla pozostałych trójek okręgów parami stycznych gwarantuje nam to założenie indukcyjne. Dowód jest więc zakończony.

Ronald Graham podał bardzo prosty algorytm generowania czwórek okręgów, od których można rozpocząć opisaną powyżej konstrukcję. Zaczynamy od analizy wyjściowej sytuacji: oznaczymy początkową czwórkę krzywizn przez (b_1, b_2, b_3, b_4) i przyjmijmy, że okrąg o krzywiznie b_4 jest styczny wewnętrznie do okręgów o krzywiznach równych pozostałym trzem liczbom (czyli $b_4 < 0$, pozostałe dodatnie). Bez utraty ogólności możemy założyć, że $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Dokonując zamiany zmiennych

$$b_1 = d_1 - b_4, \quad b_2 = d_2 - b_4, \quad b_3 = -2m + d_1 + d_2 - b_4$$

(wtedy $d_1 \leq d_2$), sprowadzamy formułę Kartezjusza do postaci

$$b_4^2 + m^2 = d_1 d_2 \quad \text{oraz} \quad b_4 < 0 \leq 2m \leq d_1 \leq d_2 \quad (\text{bo } d_1 - 2m = b_3 - b_2 \geq 0).$$

Stąd natychmiast wynika nierówność $m \leq |b_4|/\sqrt{3}$. Teraz możemy próbować znaleźć przykłady odpowiednich czwórek liczb całkowitych. Podstawiając za b_4 kolejne liczby całkowite ujemne, otrzymujemy dla każdej z nich skończenie wiele możliwych wartości m . Musimy jedynie sprawdzić, dla jakich par b_4 i m istnieje rozkład na czynniki d_1 i d_2 , spełniający odpowiednie nierówności, co jest dobrym zadaniem dla komputera.

Na internetowej stronie *Delty* można znaleźć przykłady różnych konfiguracji. Jedna z nich zwróci uwagę teoriolicezbowców – są to bowiem okręgi Forda (a dokładniej, te styczne do prostej – rys. 7–8). Ich krzywizny są kwadratami kolejnych liczb naturalnych, a punkty styczności do prostej odpowiadają kolejnym wyrazom ciągu tzw. ułamków Fareya. Warto wspomnieć również, że Rademacher użył ich jako drogi całkowania w swoich pracach dotyczących funkcji partycji obliczających, na ile sposobów liczba n może być zapisana jako suma liczb całkowitych dodatnich nie większych niż n .

Lamigłówki liczbowe od zawsze cieszyły się dużą popularnością. Tym razem proponujemy Czytelnikom jeszcze jedno zadanko z tej serii.

Liczbę całkowitą dodatnią nazywamy *palindromiczną*, jeżeli jej zapis dziesiętny przeczytany normalnie i wspak brzmi tak samo – przykładami takich liczb są 5, 22 i 21 312. Ile jest liczb palindromicznych w przedziale [285 924, 84 633 902]?

Rozwiązanie: Przyjemne uproszczenie stanowi podział naszego problemu na dwa: wystarczy zliczyć liczby palindromiczne w przedziałach [1, 84 633 902] i [1, 285 923], a następnie obliczyć różnicę wyników.

Zacznijmy od pierwszego z tych przedziałów. Klucz do rozwiązania zadania stanowi sprytnie pogrupowanie wszystkich liczb całkowitych dodatnich nieprzekraczających 84 633 902, na przykład na następujące kategorie:

[1-9]	[1-7]*****
[1-9]*	8[0-3]*****
[1-9]**	84[0-5]****
[1-9]***	846[0-2]****
[1-9]****	8463[0-2]***
[1-9]*****	84633[0-8]**
[1-9]*****	8463390[0-2]

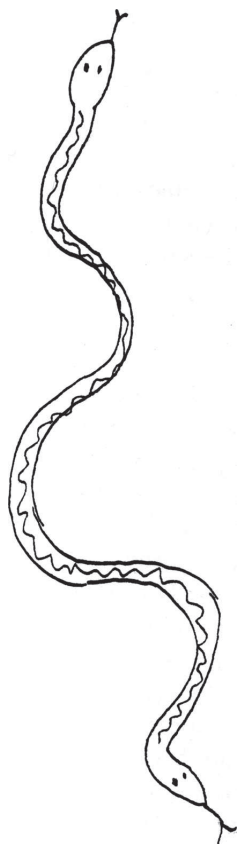
Znaczenie kategorii wyjaśnijmy na przykładzie: 846[0-2]**** oznacza wszystkie liczby całkowite dodatnie, których zapis dziesiętny zaczyna się od cyfr 846, po czym następuje jakakolwiek z cyfr 0, 1, 2, a dalej jeszcze cztery dowolne cyfry. Zwróćmy uwagę na to, że wśród kategorii brakuje ośmiocyfrowej zakończonej pojedynczą gwiazdką. Dodajmy także, że pierwsze siedem kategorii (wraz z zerem) można by łącznie opisać jednym oznaczeniem *****, ale wówczas stracilibyśmy tę miłą własność naszych kategorii, że każda z nich zaczyna się od niezerowej cyfry. Spróbujemy teraz zliczyć liczby palindromiczne poszczególnych kategorii.

Pierwsze siedem kategorii odpowiada liczbom jedno-, dwu-, ..., aż do siedmiocyfrowych. Wszystkie liczby jednocyfrowe są palindromiczne, natomiast wśród liczb dwucyfrowych tylko takie postaci AA spełniają ten warunek – łącznie mamy $2 \cdot 9 = 18$ takich liczb. Wśród liczb trzy- i czterocyfrowych dowolny układ pierwszych dwóch cyfr niezaczynający się od zera wyznacza jednoznacznie liczbę palindromiczną (odpowiednio ABA i ABBA), co razem daje $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$ liczb palindromicznych. Podobnie, wśród liczb pięcio- i sześciocyfrowych mamy łącznie $2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 1800$ liczb palindromicznych, a wśród siedmiocyfrowych – 9000 tychże. Naliczyliśmy już razem 10 998 liczb palindromicznych.

Kolejne kategorie wyglądają nieco ciekawiej. W pierwszych czterech mamy zawsze kilka mniej lub bardziej precyzyjnie określonych cyfr, po których następuje co najmniej połowa liczby wypełniona gwiazdkami. To oznacza, że możemy te początkowe cyfry przepisać na koniec reprezentacji (oczywiście w odwróconej kolejności), w wyniku czego w środku pozostanie pewna parzysta liczba gwiazdek g reprezentująca dowolną g -cyfrową liczbę palindromiczną (potencjalnie zaczynającą się od zera), których to liczb jest $10^{g/2}$. Dzięki temu spostrzeżeniu możemy już całkiem łatwo porachować liczby palindromiczne tych kategorii: [1-7]*****[1-7] daje $7 \cdot 10^3 = 7000$ liczb palindromicznych, 8[0-3]****[0-3] 8 – 400 liczb, 84[0-5]**[0-5] 48 – 60 liczb, a 846[0-2][0-2] 648 – 3 liczby palindromiczne, razem 7463.

W ostatnich trzech kategoriach mamy jednoznacznie wyznaczoną pierwszą połowę liczby; musimy jedynie sprawdzić, czy możemy do niej dopasować drugą – jeśli tak, to do wyniku dochodzi nam dokładnie jedna liczba palindromiczna. Widzimy, że jest to możliwe jedynie w przypadku kategorii 84633[0-8]**, w którym otrzymujemy liczbę palindromiczną 84 633 648.

Łącznie naliczyliśmy $10\,998 + 7\,463 + 1 = 18\,462$ liczby palindromiczne nieprzekraczające naszej górnej granicy. Jak Czytelnik, być może, zechce



Rozwiązanie zadania M 1281.

Każdemu polu P szachownicy przyporządkujemy parę liczb (x, y) , gdzie x jest numerem wiersza, a y numerem kolumny pola P – zatem $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Zauważmy, że jeśli żadne dwie wieże nie biją się, to suma współrzędnych wszystkich pól, na których one stoją, wynosi $2(1 + 2 + \dots + 9) = 90$. Gdyby więc po przestawieniu wież żadne dwie znów się nie bily, to suma współrzędnych wszystkich pól, na których znajdują się wieże, musiałaby pozostać niezmienną.

Tymczasem przestawienie wieży ruchem konika szachowego zmienia sumę współrzędnych jej pola o ± 1 lub ± 3 . Zatem, gdy przestawimy wszystkie 9 wież, suma współrzędnych ich pól zmieni się o liczbę nieparzystą, a więc nie pozostanie niezmienną. Wobec tego po przestawieniu wszystkich wież pewne dwie będą się bily.



Rozwiązanie zadania M 1280.

Dla $n = 2$ teza jest spełniona. Przyjmijmy więc, że $n > 2$. Wówczas

$$n^n - n^2 + n - 1 = (n-1) \cdot (n^2(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) + 1).$$

$$n^2(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) + 1 \equiv 0 \pmod{n-1}.$$

Ale $n \equiv 1 \pmod{n-1}$, więc $n^k \equiv 1 \pmod{n-1}$.

$$\text{Stąd } n^2(n^{n-3} + n^{n-4} + \dots + n + 1) + 1 \equiv 1 \cdot (n-2) + 1 = n-1 \equiv 0 \pmod{n-1}.$$

sam sprawdzić, w przedziale $[1, 285\,923]$ są, ni mniej ni więcej, jak 1 284 liczby palindromiczne, co pozwala wyznaczyć liczbę liczb palindromicznych w oryginalnym przedziale z zadania: $18\,462 - 1\,284 = 17\,178$.

Gdyby teraz przyszło nam rozwiązać serię podobnych łamigłówek, tylko dotyczących innych przedziałów, to umielibyśmy się z nimi całkiem łatwo uporać... albo, jeszcze lepiej, zaprzac do tego komputer i napisać odpowiedni program. Zauważmy, że w przypadku przedziałów $[a, b]$, dla których $b \leq 10^8$, moglibyśmy w tym programie w ogóle nie stosować żadnych sztuczek związanych z kategoriami, tylko dla każdej liczby z rozważanego przedziału sprawdzić, czy jest palindromiczna. W ten sposób mamy do przejścia nie więcej niż b liczb, przy czym koszt sprawdzenia każdej zależy od długości jej zapisu dziesiętnego, co daje złożoność czasową tego rozwiązania $O(b \log b)$ – w tym artykule używamy logarytmów dziesiętnych. Przykładowo, taki program, dla przedziału z powyższej łamigłówki, na moim komputerze oblicza wynik mniej więcej w minutę.

Gdyby przyszło nam zmierzyć się z przedziałem, w którym b byłoby rzędu 10^{14} , to moglibyśmy zastosować inne podejście siłowe, tym razem przeglądając wszystkie liczby palindromiczne nieprzekraczające b . Faktycznie, zauważmy, że liczby palindromiczne można generować, wybierając na wszystkie sposoby cyfry z pierwszej połówki (te w drugiej są wówczas wyznaczone jednoznacznie). Na podstawie wcześniejszych rozważań wiemy zaś, że liczb palindromicznych co najwyżej k -cyfrowych jest (dla uproszczenia – w przypadku k parzystego) $2 \cdot 9 \cdot (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{(k-2)/2})$, która to liczba jest rzędu $10^{k/2} = \sqrt{10^k} \approx \sqrt{b}$. Uwzględniając koszt wygenerowania pojedynczej liczby palindromicznej, otrzymujemy oszacowanie na złożoność czasową takiego algorytmu: $O(\sqrt{b} \log b)$.

Jednak jeśli prawy koniec naszego przedziału zbliżyłby się do 10^{18} (okolice górnej granicy typów całkowitych 64-bitowych), przewaga opisanej metody podziału na kategorie nad pozostałymi stałaby się istotna. Nie jest to dziwne: mamy około $2 \log b$ kategorii do przejścia, z czego każdą obsługujemy w czasie proporcjonalnym do długości jej zapisu dziesiętnego (przyjmując stały koszt wykonywania działań na liczbach), co daje złożoność czasową zaledwie $O(\log^2 b)$. Zauważmy, że – w przeciwieństwie do dwóch poprzednich metod – mamy tu złożoność wielomianową względem długości zapisu dziesiętnego liczby b , co w przypadku naprawdę dużych liczb jest wysoce pożądane. W takim przypadku możemy powiedzieć, że otrzymaliśmy rozwiązanie wielomianowe względem rozmiaru wejścia, które przecież jest zapisem dziesiętnym liczb.

Oprócz zmian końców rozważanych przedziałów, moglibyśmy wziąć pod uwagę także inne (podobne lub ogólniejsze) klasy zliczanych liczb. Zauważmy, że dla każdej z nich wystarczyłoby wymyślić metodę sprawdzania, ile liczb danej kategorii należy do danej klasy. Na koniec pozostawiamy Czytelnikowi trzy tego typu zadania, z których każde dotyczy wyłącznie liczb parzystej długości, czyli składających się z dwóch takiej samej długości połówek.

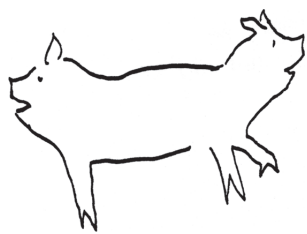
Jak sprawdzić, ile liczb danej kategorii (np. 84[0-5]*****) jest:

- (a) liczbami *podwójnymi*, które składają się z dwóch kolejno zapisanych takich samych fragmentów, np. 345345?
- (b) (dla miłośników matematyki) liczbami *permutacyjnymi*, których pierwsza połówka zawiera wyłącznie różne cyfry, a druga – permutację cyfr z pierwszej połówki, np. 345453?
- (c) (dla miłośników informatyki) liczbami *o równych sumach*, w których sumy cyfr z obydwu połówek są równe, np. 235424?

W przypadku naszej przykładowej kategorii poprawnymi odpowiedziami są:

- (a) 60, (b) 840, (c) 34661.

Czytelników o zacięciu programistycznym zachęcamy do implementowania swoich rozwiązań na komputerze, a w ogóle wszystkich Czytelników – do samodzielnego wymyślania innych, podobnych (albo i zupełnie innych!) łamigłówek.



Rozwiązanie zadania F 766.

Para znajdująca się pod tłokiem będzie stopniowo skraplana. Jej ciśnienie na początku i na końcu kondensacji będzie wynosiło $2p$. Nad tłokiem ciśnienie lekko się zmniejszy:

$$p_1 = p \frac{V}{V_1} = p \frac{V}{V + 3V/4} = \frac{4}{7}p.$$

Z warunku równowagi tłoka:

$$p_1 S + mg = 2pS$$

wynika, że

$$m = \frac{10}{7} \frac{pS}{g}.$$

Jak złamałem system RSA

Juliusz Szczęsny BATURA

Jakiś czas temu usłyszałem w radiu ogólnikową wiadomość o systemie szyfrującym RSA. Jego niezawodność, jak wtedy rozumiałem, polegała na tym, że jeśli znamy iloczyn $e = p \cdot q$ dwóch liczb pierwszych p i q , bardzo trudno jest odnaleźć czynniki p i q , oczywiście przy założeniu, że są to bardzo duże liczby. To mnie zaintrygowało, bo w tym akurat czasie bawiłem się *mnożeniem trapezowym* liczb naturalnych: jeśli k i n są liczbami naturalnymi, to przez ich *iloczyn trapezowy* rozumiem liczbę $k \# n$ równą sumie k kolejnych liczb naturalnych, wśród których największą jest n . Nazwę uzasadniają przykładowe diagramy 1 i 2. Ulegając tej konwencji, tradycyjne mnożenie liczb naturalnych nazwalibyśmy *prostokątnym*, a odpowiednikiem tradycyjnego kwadratu liczby naturalnej n jest tu n -ta liczba trójkątna

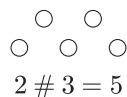


Diagram 1

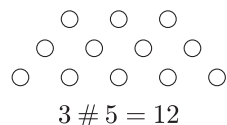


Diagram 2

$$n \# n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mniejsza o powody, dla których takie iloczyny mnie zaciekały. Łatwo zauważyć, że każda liczba nieparzysta w sensie tradycyjnym jest w „sensie trapezowym” parzysta, bo

$$2k + 1 = k + (k + 1) = 2 \# (k + 1).$$

W szczególności więc nieparzyste liczby pierwsze w sensie tradycyjnym nie są *pierwszymi* ze względu na mnożenie trapezowe.

Zauważmy dalej, że każdy iloczyn dwóch liczb naturalnych można w specyficzny sposób przedstawić za pomocą trzech liczb trójkątnych. Mamy mianowicie, dla $p < q$,

$$\begin{aligned} p \cdot q &= \frac{p(p+1)}{2} + \frac{(q-1)q}{2} - \frac{(q-p-1)(q-p)}{2} = \\ &= (1 + 2 + \dots + p) + (1 + 2 + \dots + (q-1)) - (1 + 2 + \dots + (q-p-1)). \end{aligned}$$

Sprawdzenie tej równości pozostawiam Czytelnikom, ale przypuszczam, że zrezygnują z tego sprawdzenia, jeśli tylko uważnie przyjrzą się diagramom 3 i 4. Otóż dla $n = 24 = 4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$ mamy

$$\begin{aligned} 4 \cdot 6 &= (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 1 = \\ &= \frac{4(4+1)}{2} + \frac{5(5+1)}{2} - \frac{(6-4-1)(6-4)}{2}. \end{aligned}$$

W tym przypadku iloczyn ma więcej niż jeden rozkład na odpowiednią sumę trzech liczb trójkątnych. Liczba takich rozkładów zależy od ilości dzielników. Jeżeli zatem mamy do czynienia z iloczynem dwóch liczb pierwszych $e = p \cdot q$, analogiczny rozkład na sumę trzech liczb trójkątnych będzie jeden i tylko jeden, na przykład, gdy $e = 3 \cdot 7$, otrzymujemy diagram 5, co ilustruje rozkład

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - (1 + 2 + 3).$$

Ogólnie, dla iloczynu dwóch różnych liczb pierwszych p i q ($p < q$) prawdziwy i jednoznaczny jest wzór:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= t_1 + t_2 - t = \\ &= (1 + 2 + \dots + p) + (1 + 2 + \dots + (q-1)) - (1 + 2 + \dots + (q-p-1)) = \\ &= \frac{p(p+1)}{2} + \frac{(q-1)q}{2} - \frac{(q-p-1)(q-p)}{2}. \end{aligned}$$

Ten rozkład na sumę trzech liczb trójkątnych w moich rozważaniach stał się podstawą ataku na system RSA. Rozkład na iloczyn czynników jest równoważny ze znalezieniem odpowiednich liczb trójkątnych.

Ponieważ p i q , jako liczby pierwsze większe od 2, są liczbami nieparzystymi, więc odpowiednio $q-1$ jest liczbą parzystą, a $q-p-1$ nieparzystą. Zapiszmy więc $q-p-1 = 2y-1$, skąd otrzymujemy

$$t = \frac{(q-p-1)(q-p)}{2} = \frac{(2y-1) \cdot 2y}{2} = 2y^2 - y.$$

Zatem t należy do zbioru $T = \{1, 6, 15, 28, 45, \dots\} = \{2r^2 - r : r \in \mathbb{N}\}$, czyli do podzbioru zbioru wszystkich liczb trójkątnych zawierającego co drugą liczbę.

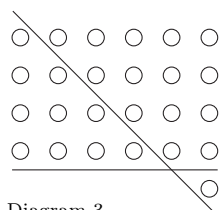


Diagram 3

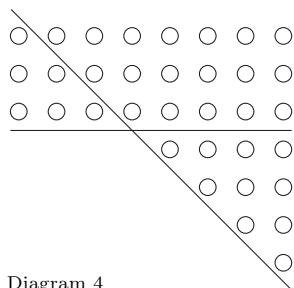


Diagram 4

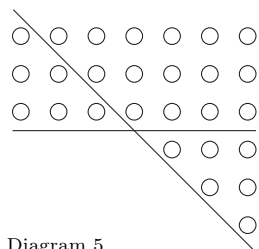


Diagram 5

Dalsze moje „skomplikowane” rozważania dotyczące znalezienia rozkładu liczby $e = pq$ w postaci $t_1 + t_2 - t$, gdzie t_1, t_2, t są liczbami trójkątnymi, „zniszczył” profesor Andrzej Schinzel, którego poprosiłem o uwagi. Odpowiedział, że przecież

$$e = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} - \frac{(q-p-1)(q-p)}{2} = \left(\frac{q+p}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-p}{2}\right)^2.$$

Jeśli teraz przyjmiemy

$$q + p = 2x, \quad q - p = 2y,$$

to otrzymamy układ

$$\begin{cases} 2y^2 - y = t, \\ x^2 - y^2 = e. \end{cases}$$

Pierwsze z równań nieznacznie ogranicza obszar poszukiwań, drugie zaś prowadzi do algorytmu rozkładu znanego od dawna jako algorytm Fermata. Algorytm polega na podstawianiu kolejnych wartości w miejsce y i badaniu, czy $e + y^2$ jest kwadratem. Jest jasne, że jeśli liczby p i q różnią się niewiele, to stosując ten algorytm, szybko znajdziemy rozkład liczby e (zauważmy, że drugie z równań nie odgrywa praktycznie żadnej istotnej roli). Od dawna jednak wiadomo, że takich par liczb p i q nie należy brać jako podstawę systemu RSA. A trzeba wiedzieć, że liczby pierwsze brane jako p i q w bezpiecznych systemach są ogromne. Do ich zapisu w systemie dziesiętnym trzeba użyć setek cyfr.

Można zażartować, że jeszcze tym razem system RSA oparł się mojemu atakowi. Mówiąc poważnie, jeśli weźmiemy pod uwagę to, że NSA (National Security Agency – Narodowa Agencja Bezpieczeństwa Stanów Zjednoczonych), zwana też No Such Agency („Nie Ma Takiej Agencji”), systematycznie zatrudnia tysiące matematyków, to można przypuszczać, że wszystkie nieskomplikowane ataki na ten system zostały już wyczerpująco przebadane i mnie, skromnemu grafikowi i nauczycielowi wychowania plastycznego, choć po studiach matematycznych sprzed 30 lat, nic już do znalezienia nie zostało.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 765. W cylindrycznym naczyniu przykrytym tłokiem znajduje się na początku $\nu = 1$ mol pary wodnej o temperaturze T i ciśnieniu p . Ciśnienie nasyconej pary wodnej przy takiej samej temperaturze wynosi $2p$. Następnie tłok przesuwa się tak, że objętość pod nim zmniejsza się czterokrotnie. Znaleźć masę skondensowanej wody, jeśli temperatura nie zmieniła się. Masa molowa wody $\mu = 0,018$ kg/mol. Rozwiązanie na str. 23

F 766. W połowie długości poziomej rurki, zatkanej z dwóch stron, znajduje się tłok o powierzchni S . Po jego obu stronach znajduje się para wodna o ciśnieniu p . W takiej samej temperaturze para ta kondensuje się przy ciśnieniu $2p$. Rurkę postawiono pionowo i tłok opadł na wysokość czterokrotnie mniejszą od wyjściowej. Znaleźć masę tłoka. Tarcie tłoka o ścianki zaniedbać, temperatura po obu jego stronach jest taka sama. Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Waldemar POMPE

M 1279. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ (rysunek). Punkt M jest środkiem boku AB . Wykazać, że

$$\frac{CM}{AB} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

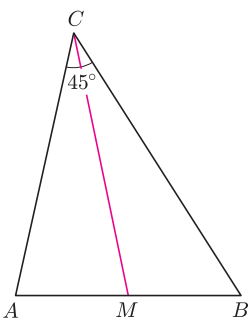
Rozwiązanie na str. 24

M 1280. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ liczba $n^n - n^2 + n - 1$ jest podzielna przez $(n - 1)^2$.

Rozwiązanie na str. 7

M 1281. Na szachownicy 9×9 ustawiono 9 wież w taki sposób, że żadne dwie nie biją się. Następnie każdą wieżę przestawiono na inne pole ruchem konika szachowego. Wykazać, że po tym przestawieniu pewne dwie wieże biją się.

Rozwiązanie na str. 6





mała delta

Mały skok

Był piękny słoneczny dzień. „Nie ma co się wystawiać na ultrafiolet”, pomyślał Grześ i podszedł do regału z książkami. Bez wahania sięgnął po swoją ulubioną książkę – *Małego Księcia*. Już miał otworzyć podniszczony częstym użytkowaniem tom i oddać się przyjemności lektury, kiedy wzrok jego padł na zdobięcą okładkę rysunek. Przedstawiał on chłopca – tytułowego bohatera – na jego planecie. „Jakaś podejrzanie mała ta planeta”, pomyślał Grześ. „Przecież gdyby Mały Książę podskoczył, to przyciąganie grawitacyjne czegoś tak niewielkiego nie zdołałoby go sprowadzić z powrotem na jej powierzchnię.”

Patrząc na okładkę, Grześ oszacował promień planety Małego Księcia na jakieś trzy metry, po czym sięgnął do tablic astronomicznych. „Jeżeli ta planeta ma gęstość taką jak Ziemia, to jej masa powinna wynosić...” Po wpisaniu odpowiednich formuł w okienku kalkulatora wyskoczyła liczba odpowiadająca z grubsza sześciuset tonom. Następnie Grześ przeprowadził mały eksperyment, stwierdzając, że potrafi bez specjalnego wysiłku podskoczyć, muskając framugę drzwi, co dawało wysokość skoku 30 centymetrów. Teraz wystarczyło już tylko pamiętać o zasadzie zachowania energii, mówiącej w tym przypadku, że energia kinetyczna Grzesia na poziomie podłogi musi być równa energii potencjalnej Grzesia w najwyższym punkcie podskoku i zastosować wzór $E_P = mgh$ na energię potencjalną w polu grawitacyjnym na powierzchni Ziemi. Po wykonaniu wszystkich obliczeń Grześ oszacował przypuszczalną energię kinetyczną Małego Księcia („... taki chudy jest na tym obrazku, będzie mieć ze czterdzieści kilo...”) na początku podskoku na 120 dżuli.

Tu Grześ utknął w swoich obliczeniach. Nie zważając na ultrafiolet, pobiegł więc czym prędzej do Oli, która nie tylko pamiętała każde słowo z lekcji fizyki, ale także fizykę lubiła i chętnie o niej opowiadała.

– To bardzo proste – powiedziała Ola i narysowała na kartce papieru kilka kresek układających się w diagram taki jak na rysunku obok. – Energia potencjalna małego ciała o masie m w polu grawitacyjnym czegoś tak okrągłego jak planeta o masie M wynosi $E_P = -GMm/r$, gdzie r jest odległością małego ciała od środka planety, a G to tak zwana stała grawitacji. To jest ta gruba linia.

– A $E_P = mgh$? – zapytał niepewnie Grześ.

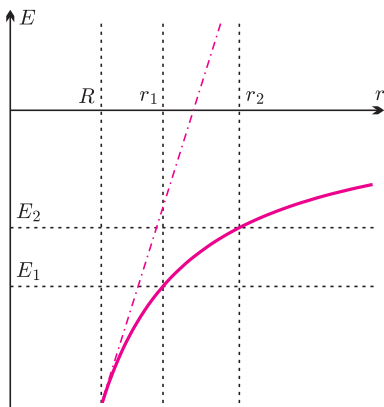
– To proste – odparła Ola. – Na powierzchni Ziemi trudno wykonać ruch w pionie o więcej niż kilkanaście kilometrów, a to jest bardzo mało w porównaniu z promieniem Ziemi. Linie krzywą można wtedy przybliżyć za pomocą prostej. O tej, z kropek i kresek.

– Ale mgh jest dodatnie – zaprotestował słabo Grześ, – a to twoje nie jest.

– To dlatego, że w fizyce ważne są różnice energii potencjalnej – oświadczyła niezbita z tropu Ola. – Zwykle wygodnie jest przyjąć, że energia potencjalna jest równa zero w jakimś wygodnym miejscu. Dla $E_P = mgh$ jest to powierzchnia Ziemi lub w ogóle jakaś pozioma powierzchnia. Dla mojego wzoru energia potencjalna dąży do zera przy bardzo dużych r . To oznacza, że ciało, które ma energię mniejszą od zera, może się oddalić od planety tylko na pewną maksymalną odległość, na przykład ciało o energii E_1 na moim rysunku na odległość r_1 , zaś... Czekaaj, gdzie lecisz?!

Ale Grześ już nie słyszał. Pobiegł do domu, znalazł w tablicach wartość G , wpisał dane do kalkulatora i... no tak, jego podejrzenia były słuszne, energia potencjalna Małego Księcia na powierzchni jego planety nie wynosiła (z minusem) nawet tysięcznej części dżula. „Mały, niewinny podskok i wylatuje w czarną czeluść kosmosu”, zmartwił się Grześ. „No chyba że byłaby to gwiazda neutronowa...”

Małą Deltę przygotował Krzysztof TURZYŃSKI



Olimpiada

LIII Olimpiada Astronomiczna 2009/2010

Wybór zadań

Druga seria zadań zawodów I stopnia

1. W marcu 2009 roku na orbicie wokółsłonecznej została umieszczona sonda Kepler, której zadaniem jest poszukiwanie planet obiegających inne gwiazdy. Oblicz czas trwania przejścia planety wielkości Ziemi na tle tarczy gwiazdy o promieniu Słońca, w sytuacji, gdy planeta obiega macierzystą gwiazdę w odległości 1 AU, a przejście zachodzi wzdłuż cięciwy odległej od środka tarczy gwiazdy o połowę jej promienia.

2. Cefeida klasyczna o okresie zmian jasności równym 41 dni ma jasność obserwowaną 8,7 magnitudo. Oceń średnią wartość ekstynkcji międzygwiazdowej w kierunku tej gwiazdy, jeśli skądinąd wiadomo, że gwiazda jest odległa od nas o 2 kpc.

Zadania zawodów II stopnia

1. Zaplanuj utworzenie sieci złożonej z trzech satelitów, które powinny okrążyć Ziemię po okręgach z możliwie najkrótszymi okresami obiegu. Jak powinny poruszać się te satelity, by w dowolnym momencie co najmniej jeden z nich znajdował się nad horyzontem astronomicznym dla obserwatora umieszczonego w dowolnym miejscu strefy międzyzwrotnikowej?

Oblicz tę minimalną wartość okresu obiegu, przyjmując jako dane liczbowe: a) okres obiegu satelity geostacjonarnego $T = 23^h 56^m$; b) prędkość liniową satelity geostacjonarnego $v = 3,08$ km/s; c) promień Ziemi $R = 6380$ km; d) nachylenie równika ziemskiego do ekliptyki $\varepsilon = 23,5^\circ$. W obliczeniach można pominąć wpływ refrakcji atmosferycznej.

2. Równanie ekliptyki we współrzędnych równikowych (α, δ) ma postać $\delta = \arctg(\sin \alpha \operatorname{tg} \varepsilon)$, gdzie ε jest

kątem nachylenia równika niebieskiego do płaszczyzny ekliptyki. Znajdź analogiczną zależność, która będzie równaniem równika niebieskiego we współrzędnych horyzontalnych (A, h), dla szerokości geograficznej ($0^\circ, 90^\circ$). Zinterpretuj przypadki dla szerokości geograficznych $\varphi = 0^\circ$ oraz $\varphi = 90^\circ$.

Zadania zawodów III stopnia

1. Aparatura planetarium odtworzy wygląd sfery niebieskiej z pewnego miejsca na Ziemi, podczas jednej nocy bieżącego roku, w momencie górowania Słońca w Greenwich. Mając do dyspozycji kalendarz astronomiczny Planetarium Śląskiego, dla prezentowanej sytuacji, z możliwie największą dokładnością, określ: a) datę, b) godzinę według prawdziwego lokalnego czasu słonecznego, c) długość geograficzną miejsca obserwacji, d) szerokość geograficzną miejsca obserwacji. Uzyskane wyniki uzasadnij i oceń ich dokładność.

(Aparatura planetarium odtwarzała wygląd nieba z wszystkimi widocznymi gołym okiem ciałami niebieskimi z okolic Pekinu w dniu 23.09.2010 r.)

2. Czerwone olbrzymy w końcowym etapie swego życia odrzucają znaczną część atmosfery. Uważa się, że przyczyną zjawiska jest rekombinacja wodoru dostarczająca energii. Warstwa, w której zjawisko to zachodzi, może oderwać się od gwiazdy. Uważa się, że następuje to wtedy, gdy energia termiczna wodoru tworzącego atmosferę gwiazdy jest bliska 1/3 energii jonizacji wodoru, czyli około 4,5 eV, a rozważana warstwa jest w odpowiedniej odległości od środka gwiazdy. W jakiej temperaturze to zachodzi? Jaki wynika stąd maksymalny promień czerwonego olbrzyma o masie 0,8 masy Słońca?

Końcowa klasyfikacja zawodów finałowych LIII Olimpiady Astronomicznej

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. Damian Puchalski (Toruń) | 10. Jerzy Knopik (Łódź) |
| 2. Przemysław Mróz (Warszawa) | 11. Marek Mysior (Kamienna Góra) |
| 3. Jakub Bartas (Pszczyna) | 12. Michał Głanowski (Wadowice) |
| 4. Maksymilian Sokołowski (Krosno) | 13. Grzegorz Jakubiak (Radom) |
| 5. Jakub Pająk (Słupsk) | 14. Jakub Zakrzewski (Radzyń Podlaski) |
| 6. Krzysztof Będkowski (Szczecin) | 15. Jakub Zaborowski (Szczecin) |
| 7. Adam Tomaszewski (Gdynia) | 16. Jakub Klencki (Łódź) |
| 8. Mateusz Dryzek (Kraków) | 17. Miłosz Jakubek (Kołobrzeg) |
| 9. Tomasz Kępa (Łódź) | 18. Jeremi Piotrowski (Gdańsk) |

59. Olimpiada Fizyczna



W dniach 9–13 kwietnia br. odbył się w Warszawie finał 59. Olimpiady Fizycznej. Do tegorocznych zawodów trzeciego stopnia zakwalifikowało się 51 zawodników w tym dwie kobiety. W sobotę 10 kwietnia zawodnicy w dwóch turach rozwiązywali dość trudne zadanie z optyki, które polegało na wyznaczeniu współczynnika załamania nieznanego materiału zamkniętego w ramce fotograficznej. Tylko ośmiu zawodników uzyskało za to zadanie nie mniej niż połowę możliwych do uzyskania punktów. W tej grupie byli prawie wszyscy, którzy później uzyskali tytuł laureata.

Trzy zadania teoretyczne, które zawodnicy rozwiązywali w niedzielę 11 kwietnia też nie okazały się łatwe. Zadanie T-1, w którym zawodnicy musieli przeanalizować wpływ ciśnienia światła słonecznego na statek kosmiczny z rozkładanym żaglem poprawnie rozwiązało jedynie dwóch zawodników. Jednak żaden z nich nie otrzymał za swoje rozwiązanie maksymalnej liczby punktów.

Podobnie było z zadaniem T-2 z elektrostatyki. W tym przypadku dwa najlepsze rezultaty to odpowiednio 20 i 15 punktów. Następni zawodnicy uzyskali nie więcej niż 7 punktów za to zadanie. Zadanie T-2 okazało się najtrudniejsze w zestawie olimpijskim. Średnia liczba punktów otrzymanych za to zadanie wyniosła jedynie 2,8 na 20 możliwych!

Zadanie T-3 było bardzo podchwytliwe. Na pierwszy rzut oka wydawało się prostym zadaniem z mechaniki – kula toczy się bez poślizgu w kierunku ściany ze znaną prędkością i należy wyznaczyć jej prędkość końcową po odbiciu po odpowiednio długim czasie. Tylko czterech zawodników zauważyło, że podczas odbicia od ściany kula „podskoczy” i znalezienie jej prędkości końcowej wcale nie jest takie proste. To oni jako jedyni zdobyli za to zadanie nie mniej niż połowę możliwych do zdobycia punktów.

Na podstawie uzyskanych ocen Komitet Główny Olimpiady Fizycznej, stosując regułę regulaminową, wyłonił spośród finalistów ośmiu laureatów, czterech z warszawskiego XIV Liceum im. Stanisława Staszica, dwóch z Krakowa (jeden z II Liceum im. Jana III Sobieskiego i jeden

z V Liceum im. Augusta Witkowskiego) i po jednym z Poznania (VIII Liceum im. Adama Mickiewicza) i Katowic (XVIII Liceum Ogólnokształcące). Zwyciężył **Adam Ścibior** z Poznania. W tym roku mieliśmy do czynienia z sytuacją dość niezwykłą. Najlepszych dwóch zawodników uzyskało w finale tę samą liczbę 55 punktów. W takim przypadku, zgodnie z regulaminem Olimpiady, o kolejności decyduje wynik uzyskany podczas drugiego stopnia zawodów. Podobnie sytuacja rozstrzygnęła się na III i IV miejscu – tam zawodnicy uzyskali w finale po 49 punktów.

Nagrodę dla zwycięzcy 59. Olimpiady Fizycznej ufundowała firma Teleoptics z Warszawy, a dla zawodnika, który najlepiej rozwiązał zadanie doświadczalne, firma Comef z Katowic. Jak zawsze nagrody książkowe dla wszystkich finalistów ufundowało Wydawnictwo Naukowe PWN oraz Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Wszystkim sponsorom bardzo dziękujemy za wsparcie i podniesienie atrakcyjności nagród dla najlepszych młodych fizyków w kraju.

Pierwszych pięciu laureatów będzie reprezentowało Polskę na 41. Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej, która w tym roku odbędzie się w dniach 17–25 lipca br. w Chorwacji. Trzymamy za Was kciuki!

Treści zadań wraz z wzorcowymi rozwiązaniami z tegorocznej edycji Olimpiady Fizycznej można znaleźć na stronie Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej <http://www.kgof.edu.pl/>

Tomasz SOWIŃSKI

Laureaci w kolejności zajętych miejsc

1. Adam Michał ŚCIBIOR

VIII Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza w Poznaniu; nauczyciel: mgr Jacek Gierszewski

2. Michał Jan MIŚKIEWICZ

XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie; nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska

3. Michał Jan PACHOLSKI

XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie; nauczyciel: mgr Robert Stasiak

4. Krzysztof Maciej LIS

XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie; nauczyciel: mgr Robert Stasiak

5. Mateusz Szymon MACHALICA

XVIII Liceum Ogólnokształcące w Katowicach; nauczyciel: dr Anna Jacher-Cebula

6. Piotr SUWARA

XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie; nauczyciel: mgr Stanisław Lipiński

7. Damian Zbigniew TRYBEK

V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie; nauczyciel: dr Dagmara Sokołowska

8. Piotr Krzysztof SIERANT

II Liceum Ogólnokształcące im. Jana III Sobieskiego w Krakowie; nauczyciel: mgr Grzegorz Knapik



XVII Olimpiada Informatyczna

W dniach od 13 do 16 kwietnia 2010 r. w Sopocie odbyły się zawody III stopnia XVII Olimpiady Informatycznej. W finale wzięło udział 87 zawodników, którzy w ciągu dwóch dni mieli do rozwiązania w sumie sześć zadań programistycznych.

Tegoroczna Olimpiada ma dwóch zwycięzców, którzy uzyskali taką samą liczbę punktów w finale. Łącznie Komitet Główny przyznał 38 tytułów laureata i wyróżnił tych spośród pozostałych zawodników, którzy uzyskali co najmniej 200 punktów. Oto nagrodzeni zawodnicy (w nawiasach liczba zdobytych punktów na 600 możliwych, szkoła oraz opiekun naukowy):



laureaci I miejsca

1.–2. Adrian Jaskółka (440, I LO im. Adama Mickiewicza, Białystok, opiekun naukowy: Ireneusz Bujnowski)

Jan Kanty Milczek (440, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

3. Igor Adamski (400, V Liceum Ogólnokształcące, Kraków, o.: Lech Duraj, Andrzej Dyrek, Adam Polak)

4. Anna Piekarska (370, Zespół Szkół nr 14, Wrocław, o.: Przemysław Uznański)

laureaci II miejsca

5. Michał Zgliczyński (350, V Liceum Ogólnokształcące, Kraków, o.: Lech Duraj, Andrzej Dyrek, Adam Polak)

6. Dawid Dąbrowski (346, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

7. Łukasz Jocz (342, I LO im. Adama Mickiewicza, Białystok, o.: Ireneusz Bujnowski)

8. Grzegorz Milka (341, II LO im. Mikołaja Kopernika, Kędzierzyn-Koźle, o.: Patryk Flegel)

9.–11. Łukasz Kalinowski (340, I LO im. Cypriana Kamila Norwida, Bydgoszcz, o.: Piotr Dobosiewicz, Mariusz Blank)

Jakub Pachocki (340, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

Janusz Wróbel (340, Zespół Szkół nr 14, Wrocław, o.: Przemysław Uznański)

12. Krzysztof Leszczyński (332, I LO im. Marii Konopnickiej, Suwałki, o.: Piotr Leszczyński)

13. Adam Obuchowicz (326, I LO im. Edwarda Dembowskiego, Zielona Góra)

14. Alan Kutniewski (323, XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin, o.: Czesław Drozdowski)

15. Maciej Piekarz (319, V Liceum Ogólnokształcące, Kraków, o.: Lech Duraj, Andrzej Dyrek, Adam Polak)

16.–17. Michał Makarewicz (310, I LO im. Adama Mickiewicza, Białystok, o.: Ireneusz Bujnowski)

Karol Pokorski (310, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Henryk Pokorski)

laureaci III miejsca

18. Grzegorz Prusak (303, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 12, Poznań)

19.–20. Grzegorz Guśpiel (300, V Liceum Ogólnokształcące, Kraków, o.: Lech Duraj, Andrzej Dyrek, Adam Polak)

Wojciech Lis (300, I Liceum Ogólnokształcące, Chorzów, o.: Marcin Kościelnicki)

21. Paweł Walczak (299, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

22. Michał Krasnoborski (292, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

23.–24. Maciej Borsz (290, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 6, Bydgoszcz, o.: Małgorzata Piekarska, Marek Cygan)

Paweł Lipski (290, Liceum „Filomata”, Gliwice, o.: Tomasz Kociumaka)

25. Szymon Sidor (288, III LO im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

26. Stanisław Barzowski (280, Gimnazjum nr 24 w ZSO nr 1, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

27.–28. Krzysztof Pszeniczny (277, Gimnazjum i Liceum im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek, Rzeszów, o.: Grzegorz Owsiany)

Tomasz Wiatrowski (277, V Liceum Ogólnokształcące, Kraków, o.: Lech Duraj, Andrzej Dyrek, Igor Adamski)

29.–30. Jan Marcinkowski (270, Zespół Szkół nr 14, Wrocław, o.: Przemysław Uznański)

Piotr Szeffler (270, ZS UMK Gimnazjum i Liceum Akademickie, Toruń, o.: Anna Kwiatkowska)

31. Kamil Salaś (264, II Liceum Ogólnokształcące, Kraków, o.: Witold Jarnicki, Jakub Adamek, Adam Polak, Michał Bejda)

32.–34. Bartłomiej Dudek (260, Zespół Szkół nr 14, Wrocław, o.: Przemysław Uznański)

Michał Łowicki (260, III Liceum Ogólnokształcące, Wrocław, o.: Jakub Łopuszański)

Adam Nieżurawski (260, XIV Liceum Ogólnokształcące, Warszawa)

35. Krzysztof Król (244, Zespół Szkół nr 14, Wrocław, o.: Przemysław Uznański)

36.–37. Marcin Smulewicz (240, LO im. Bolesława Prusa, Skierniewice)

Piotr Suwara (240, XIV Liceum Ogólnokształcące, Warszawa, o.: Joanna Śmigiełska)

38. Jan Wietrzykowski (229, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 3, Poznań, o.: Marcin Szubert)

finaliści z wyróżnieniem

Dariusz Bukowski (ZS nr 14, Wrocław), Krzysztof Feluś (V LO, Kraków), Maciej Matraszek (XIV LO, Warszawa), Franciszek Boehlke (XIII LO, Szczecin), Wojciech Łopata (V LO, Kraków), Wojciech Marczenko (XXVII LO, Warszawa), Michał Zajac (V LO, Kraków)

Zadania oraz inne informacje można znaleźć pod adresem <http://www.oi.edu.pl>, natomiast na stronie <http://www.oi.edu.pl/oig> można znaleźć wyniki finału IV Olimpiady Informatycznej Gimnazjalistów.



LXI Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1517 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 533 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego 117 uczniów. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 23 kwietnia br. w Stalowej Woli postanowił przyznać 18 osobom tytuł laureata i nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia oraz wyróżnił 15 zawodników. Ponadto 4 osoby otrzymały nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie jednego z zadań z finału.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali laureatom i wyróżnionym uczniom w przygotowaniach do zawodów.

Laureatami LXI OM zostali (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 punktów możliwych):

Nagroda stopnia pierwszego

Damian Orlef (36) uczeń klasy drugiej III Liceum Ogólnokształcącego w Zabrzcu. Nauczyciele zawodnika: Michał Rał i Roman Drohojowski.

Nagroda stopnia drugiego

Michał Miśkiewicz (24) uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski.

Michał Zając (24) uczeń klasy pierwszej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie. Nauczyciel zawodnika: Jacek Dymel.

Filip Borowiec (23) uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Stefana Żeromskiego w Kielcach. Nauczycielka zawodnika: Maria Stańczykowska.

Szymon Kanonowicz (23) uczeń klasy trzeciej Zespołu Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Zbigniew Bobiński i Adam Makowski.

Michał Matusiak (23) uczeń klasy drugiej Zespołu Szkół i Placówek Oświatowych, V Liceum Ogólnokształcącego w Bielsku-Białej. Nauczyciele zawodnika: Krzysztof Krawet i Tomasz Szymczyk.

Piotr Suwara (23) uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Jerzy Konarski, Wojciech Martys i Edward Stachowski.

Nagroda stopnia trzeciego

Wojciech Nadara (21) uczeń klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie. Nauczyciele zawodnika: Tomasz Żukowski i Konrad Pióro.

Łukasz Rajkowski (20) uczeń klasy trzeciej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie.

Nauczyciele zawodnika: Wiktor Bartol, Jerzy Bednarczuk i Edward Stachowski.

Szymon Kubicius (19) uczeń klasy drugiej Liceum Ogólnokształcącego Towarzystwa Ewangelickiego w Cieszynie. Nauczyciel zawodnika: Tomasz Głajcar.

Maciej Dulęba (18) uczeń klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu. Nauczyciel zawodnika: Stanisław Buś.

Piotr Jaszkowski (18) uczeń klasy trzeciej I Liceum Ogólnokształcącego im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim. Nauczyciel zawodnika: Paweł Kwiatkowski.

Teodor Jerzak (18) uczeń klasy pierwszej IV Liceum Ogólnokształcącego im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Wiesław Gajdek.

Rafał Chojna (17) uczeń klasy trzeciej Prywatnego Liceum Ogólnokształcącego im. Królowej Jadwigi w Lublinie. Nauczyciele zawodnika: Zbigniew Karczmarczyk, Robert Winiarczyk i Maciej Kołodziejczyk.

Mateusz Skomra (17) uczeń klasy trzeciej Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie. Nauczyciel zawodnika: Mariusz Kraus.

Roman Stasiński (17) uczeń klasy drugiej II Publicznego Liceum Ogólnokształcącego z Oddziałami Dwujęzycznymi im. Marii Konopnickiej w Opolu. Nauczyciele zawodnika: Maria Romanowska i Krzysztof Sobków.

Piotr Derkowski (16) uczeń klasy drugiej I Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Kluczborku. Nauczyciel zawodnika: Piotr Pawlikowski.

Łukasz Patyna (16) uczeń klasy drugiej Zespołu Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Maria Kobus i Zbigniew Bobiński.



V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1121 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 622 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego 161 uczniów. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów na posiedzeniu w dniu 20 marca br. postanowił przyznać 100 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia. Tytuł laureata pierwszego stopnia otrzymali:

Łukasz Bożyk – uczeń klasy drugiej Gimnazjum Dwujęzycznego nr 59 w Warszawie. Nauczycielki zawodnika: Danuta Kędziorek i Joanna Sadlej.

Arkadiusz Kwapiszewski – uczeń klasy trzeciej Gimnazjum nr 16 w ZSO nr 7 w Szczecinie. Nauczyciele zawodnika: Beata Bogdańska, Łukasz Maczan i Aleksandra Porazik.

Barbara Mroczek – uczennica klasy trzeciej Gimnazjum Przymierza Rodzin w Warszawie. Nauczyciel zawodniczki: Wojciech Guzicki.

Paweł Nałęcz-Jawecki – uczeń klasy trzeciej Społecznego Gimnazjum nr 1 w Warszawie. Nauczycielka zawodnika: Danuta Józwicka-Lamparska.

Kamil Rychlewicz – uczeń klasy drugiej Publicznego Gimnazjum nr 8 w Łodzi. Nauczyciel zawodnika: Przemysław Pawlak.

Tomasz Syposz – uczeń klasy trzeciej Gimnazjum nr 49 z Oddziałami Dwujęzycznymi w ZS nr 14 we Wrocławiu. Nauczyciel zawodnika: Stanisław Buś.

Mateusz Zieliński – uczeń klasy trzeciej Gimnazjum Akademickiego w ZS UMK w Toruniu. Nauczyciele zawodnika: Zbigniew Bobiński i Danuta Rozpłoch-Nowakowska.



Zadania oraz pełne wersje komunikatów z obu olimpiad można znaleźć na stronach www.om.edu.pl oraz www.omg.edu.pl

Informatyczny kącik olimpijski (31): Diamenty

Zadanie, któremu przyjrzymy się tym razem, nosi nazwę *Diamenty*.

Mając danych n diamentów, z których i -ty ma masę m_i i wartość w_i (wyrażone liczbami całkowitymi), należy z nich wybrać dokładnie k diamentów i_1, i_2, \dots, i_k o najlepszym współczynniku wartości, który wyraża się wzorem:

$$\frac{w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_k}}{m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_k}}.$$

Pierwszymi przychodzącymi do głowy rozwiązaniami są algorytmy zachłanne: brać k o największej wartości, albo o najlepszym stosunku $\frac{w_i}{m_i}$, albo jeszcze wedle jakiegoś innego kryterium. Pomysły te są niepoprawne, czego sprawdzenie pozostawiam Czytelnikowi. To, który diament opłaca się wziąć, zależy bowiem od uprzednio wybranych diamentów. Nie działa także (choć trudniej wskazać kontrprzykład – jak?) pomysł, aby po każdym kolejno wybranym j -tym diamencie aktualny współczynnik

$$\frac{w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_j}}{m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_j}}$$

był najlepszy z możliwych.



Aby uzyskać poprawne rozwiązanie, można natomiast użyć programowania dynamicznego. Wystarczy dla każdej liczby diamentów d i każdej ich masy m obliczać maksymalną łączną wartość odpowiadającą temu zestawowi parametrów, dodając po jednym diamencie do zbioru już przetworzonych. Jeśli t jest tablicą wyników przed dodaniem i -tego diamentu, to wyniki t' po dodaniu tegoż diamentu są następujące:

$$t'[d][m] = \max(t[d][m], t[d-1][m-m_i] + w_i),$$

przy czym należy pamiętać, że drugi człon bierzemy pod uwagę tylko, gdy $d-1$ i $m-m_i$ są nieujemne. Po przetworzeniu wszystkich diamentów wynikiem jest największa z liczb postaci $\frac{t[k][i]}{i}$. Niestety, to rozwiązanie istotnie zależy od łącznej masy M wszystkich diamentów i ma złożoność czasową $O(n \cdot k \cdot M)$, czyli $O(n^2 \cdot M)$.

W tym miejscu chciałbym zachęcić Czytelnika do zastanowienia się, przed przeczytaniem reszty artykułu, jak lepiej rozwiązać ten problem. Nie jest bowiem łatwo o dobry pomysł na poprawienie tego wyniku.

W rozwiązaniu zastosujemy kluczowe spostrzeżenie, że można do wyznaczenia wartości żadanego współczynnika wykorzystać wyszukiwanie binarne. Aby tak zrobić, musimy mieć sposób na sprawdzanie, czy wybierając k diamentów, możemy uzyskać współczynnik nie mniejszy od danego. Konkretnie, dla danego x , chcemy umieć stwierdzić, czy istnieją takie diamenty, że

$$\frac{w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_k}}{m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_k}} \geq x.$$

Na pierwszy rzut oka nie wydaje się to łatwiejsze niż wyjściowy problem, ale faktycznie jest. Możemy przecież teraz pomnożyć obie strony przez mianownik, aby pozbyć się niewygodnego dzielenia! Otrzymujemy kolejno równoważne warunki:

$$w_{i_1} + w_{i_2} + \dots + w_{i_k} \geq (m_{i_1} + m_{i_2} + \dots + m_{i_k}) \cdot x, \\ (w_{i_1} - m_{i_1}x) + (w_{i_2} - m_{i_2}x) + \dots + (w_{i_k} - m_{i_k}x) \geq 0.$$

Sprowadziliśmy zatem nasz warunek do takiego, który jesteśmy w stanie łatwo sprawdzić. Wystarczy, że obliczymy dla każdego diamentu

$$u_i = w_i - m_i x$$

i zdecydujemy, czy wśród liczb u_i jest k takich, których suma jest nieujemna. Jak to sprawdzić? Wystarczy wziąć k największych liczb u_i i sprawdzić, czy ich suma jest nieujemna (gdyż jest to największa możliwa do uzyskania suma). Warto zaznaczyć, że te k największych liczb u_i niekoniecznie reprezentuje diamenty, które maksymalizują współczynnik wartości, a jedynie takie, które dowodzą, że da się osiągnąć pewien końcowy współczynnik.

W ten sposób możemy wyszukać ten współczynnik z pewną dokładnością, ale jak dowiedzieć się, które diamenty wchodzi w skład najlepszego zestawu? Wystarczy zastosować ten sam schemat dla x równego największemu znalezionemu współczynnikowi i wybrać te k diamentów, które odpowiadają k największym liczbom u_i . Owe diamenty dają wynik co najmniej x , a więc dokładnie tyle, ile chcemy.

Na koniec zastanówmy się jeszcze nad złożonością takiego rozwiązania. Niewątpliwie, w każdym kroku wyszukiwania binarnego należy posortować n liczb, a więc taki krok będzie miał złożoność $O(n \log n)$. Ile jednak takich kroków będzie? Poszukiwania rozpoczynamy od przedziału długości W (suma wszystkich wartości diamentów), natomiast kontynuujemy je tak długo, aż długość przedziału spadnie poniżej najmniejszej możliwej odległości między dwoma różnymi wynikami, czyli najmniejszej liczby, o którą mogą różnić się ułamki o mianownikach nie większych niż M , która to liczba jest rzędu $O(\frac{1}{M^2})$. Ostatecznie rozwiązanie ma złożoność czasową $O(\log(M^2W) \cdot n \log n)$, czyli równoważnie $O(n \log n \cdot (\log M + \log W))$.

Tomasz KULCZYŃSKI

Rezonans parametryczny

*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Grzegorz DERFEL*

Kiedy, jako dziecku, pokazano mi, że bez niczyjej pomocy mogę rozhuścić się na huśtawce, zmieniając jedynie rytmicznie pozycję ciała, byłem zachwycony tym tajemniczym zjawiskiem, dającym mi w cudowny sposób samowystarczalność podczas tej zabawy. Później, gdy już liźnąwszy nieco fizyki, poznałem to zjawisko jako szczególny przypadek rezonansu parametrycznego, nie przestało wydawać mi się fascynujące. Rezonans parametryczny jest bowiem niezwykle interesującym przypadkiem drgań wymuszonych. Występuje w rozmaitych układach fizycznych i prowadzi do zaskakujących i złożonych zjawisk, z których wiele jest badanych współcześnie i ma znaczenie praktyczne. Huśtawka lub wahadło to najpopularniejsze przykłady układów, w których ten efekt można łatwo zaobserwować.

Rezonans parametryczny polega na wzbudzeniu niestabilności układu drgającego i wzroście amplitudy jego drgań w wyniku okresowej zmiany parametrów tego układu, a nie w wyniku działania zewnętrznej okresowej siły, jak to ma miejsce w przypadku zwykłego rezonansu.

Najprostszym rozważanym układem jest oscylator harmoniczny opisany ogólnym równaniem $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$, uwzględniającym zależność częstości własnej od czasu w sposób wyrażony wzorem $\omega^2(t) = \omega_0^2[1 + f(t)]$, gdzie $f(t)$ jest funkcją okresową o okresie $T_p = 2\pi/\omega_p$. Równanie w tej postaci znane jest jako równanie Hilla. Jeśli $f(t) = A \sin(\omega_p t + \phi)$, otrzymuje się równanie Mathieu

$$(*) \quad \ddot{x} + \omega_0^2[1 + A \sin(\omega_p t + \phi)]x = 0.$$

Mimo pozornej prostoty równania Hilla nie jest znane jego ogólne rozwiązanie. Rozwiązania równania Mathieu wyrażają się przez dość egzotyczne funkcje, zwane funkcjami Mathieu, a otrzymane wyniki przewidują nieograniczony wzrost amplitudy. Rozważa się także wersje obu równań uwzględniające siłę oporu proporcjonalną do prędkości:

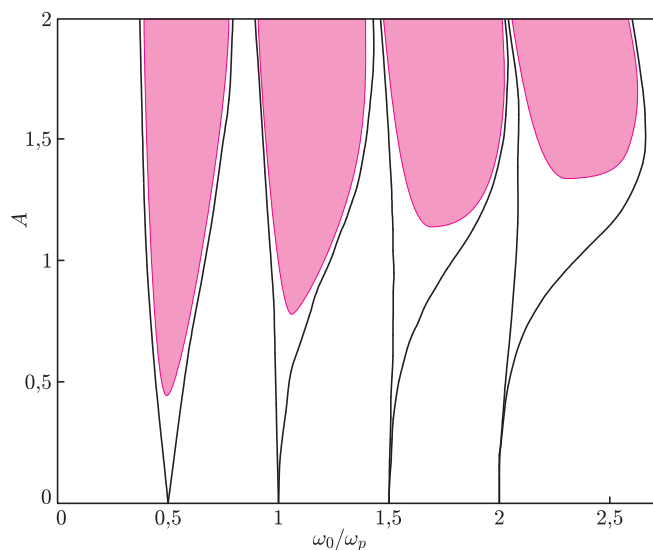
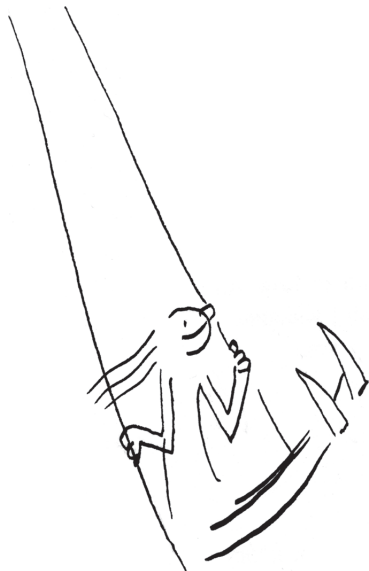
$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2[1 + f(t)]x = 0 \quad \text{oraz} \quad \ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2[1 + A \sin(\omega_p t + \phi)]x = 0.$$

Zaskakujące jest to, że rozwiązania otrzymane po uwzględnieniu siły oporu także przewidują nieograniczony wzrost amplitudy. Aby uzyskać opis realistycznego zachowania ze skończoną amplitudą, trzeba uwzględnić fakt, że rzeczywisty układ fizyczny przejawia właściwości nieliniowe.

Dla obu wymienionych równań istnieje trywialne rozwiązanie $x = 0$ oznaczające bezruch układu. Jednak okresowa zmiana parametrów o odpowiedniej częstości i wielkości powoduje, że stan ten jest niestabilny, tzn. jego małe zaburzenie zapoczątkowuje ruch drgający o narastającej amplitudzie.

Zmiana parametrów odbywa się dzięki pracy sił zewnętrznych. Praca ta zamienia się na energię drgań wzbudzonych w układzie. Ten przekaz energii jest analogiczny do wykonywania pracy nad układem przez zewnętrzną siłę wymuszającą drgania w przypadku zwykłego rezonansu.

Rezonans parametryczny rozumiany jako utrata stabilności przez nieruchomy układ, czyli wzbudzenie narastających drgań, jest najbardziej efektywny, gdy częstość zmian parametrów, ω_p , i częstość własna układu, ω_0 , pozostają w relacji $\omega_p = 2\omega_0/k$, gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$. Oznacza to, że jeśli ta równość jest spełniona, to do wzbudzenia drgań układu wolnego od tarcia wystarczy dowolnie mała amplituda zmian parametru. W bardziej realistycznym przypadku układu doznającego oporów niezbędne jest przekroczenie krytycznej amplitudy zmian. Zmiany o minimalnej amplitudzie wystarczającej do wzbudzenia drgań mają wówczas częstość nieco wyższą od $2\omega_0/k$. Ze wzrostem tarcia rezonanse powstałe przy dużym k zanikają. Rysunek obok przedstawia te relacje dla oscylatora opisanego równaniem Mathieu, za pomocą wykresów



na płaszczyźnie $(\omega_0/\omega_p, A)$. Widoczne są obszary zwane jęzorami niestabilności, wyznaczające wartości amplitudy i częstości zmian, przy których stan bezruchu traci stabilność. Cienkie krzywe startujące z punktów $(k/2, 0)$ dotyczą przypadku bez tarcia. Obszary zacieniowane odpowiadają układowi doznającemu oporów. Ze wzrostem amplitudy jęzory poszerzają się, co oznacza, że im większe są zmiany parametru, tym mniej ściśle musi być dopasowana ich częstość do częstości własnej układu. Przy małych amplitudach zmian parametru wzbudzone drgania mają częstość bliską częstości własnej układu.

Wahadło matematyczne lub fizyczne jest wygodnym obiektem, na przykładzie którego można zademonstrować różne sposoby wywoływania rezonansu parametrycznego.

Częstość własna wahadła matematycznego zależy od jego długości l i od przyspieszenia grawitacyjnego g . Możemy modulować okresowo oba te parametry.

Spektakularnym przykładem rezonansu parametrycznego wahadła o zmiennej długości, obowiązkowo wymienianym w publikacjach poświęconych temu zagadnieniu, jest ceremonia wprawiania w ruch wielkiej kadzielnicy w średniowiecznej katedrze w Santiago de Compostela w Hiszpanii. Kadzielnica ta, zwana „O Botafumeiro”, ma masę około 60 kg i zawieszona jest na linie przerzuconej przez blok umocowany pod sklepieniem katedry na wysokości około 20 m. Kilku mężczyzn pociąga za linę i popuszcza ją rytmicznie. Wahadło, jakim jest kadzielnica na linie, zostaje w ten sposób skracane o około 1,5 m, gdy mija położenie równowagi, a wydłużane na powrót, gdy osiąga maksymalne wychylenie. Po siedemnastu okresach (co zajmuje ok. 80 s) wahadło wychyla się o ponad 80° , a kadzielnica dotyka niemal sufitu. Sześćdziesięciokilogramowa masa pędząca z prędkością 50 km/h półtora metra nad podłogą kościoła robi wrażenie! Komputerowe eksperymenty z kadzielnicą można przeprowadzić, korzystając z symulacji zamieszczonej na stronie internetowej <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/botafumeiro.html>.

Praca wykonana przy skracaniu liny podczas przelotu kadzielnicy przez punkt równowagi nad posadzką kościoła związana jest z przeciwdziałaniem jej ciężarowi i sile odśrodkowej. Zwiększa ona energię potencjalną układu. Gdy lina jest popuszczana, ludzie dzierżący linę wykonują pracę ujemną. Ma ona mniejszą wartość bezwzględną, gdyż przy małej prędkości i znacznym wychyleniu mniejsze są siła odśrodkowa i składowa siły ciężkości. Powstały w ten sposób ubytek energii wahadła jest więc mniejszy od poprzedniego zysku i w konsekwencji w ciągu każdej połówki okresu wahadło nabywa energię. Podobne operowanie liną, ale przesunięte w czasie o połowę okresu zmienności wywieranej siły, tłumi wychylenia i jest użyteczne przy hamowaniu ruchu kadzielnicy.

Drugi ze sposobów realizacji rezonansu parametrycznego wahadła to modulacja efektywnego przyspieszenia grawitacyjnego g_{ef} , wywołana przez okresową zmianę wysokości jego punktu zawieszenia. Na wahadło działa

wtedy okresowa siła bezwładności skierowana pionowo w górę lub w dół, która dodaje się do siły ciężkości: $g_{ef} = g + a \sin(\omega_p t + \phi)$, gdzie a jest amplitudą przyspieszenia punktu zawieszenia. Jeśli $a > g$, to efektywne przyspieszenie bywa zwrócone do góry. Wahadło tak pobudzone może wykonywać różne rodzaje ruchów – oprócz okresowych drgań także obroty w jednym kierunku, kombinacje obu ruchów oraz ruchy chaotyczne.

Gdy wahadło zmierza ku położeniu równowagi, punkt zawieszenia porusza się poniżej położenia środkowego. Jego przyspieszenie ma zwrot do góry, a więc na obciążnik wahadła działa siła bezwładności skierowana w dół. Jej składowa prostopadła do nici zwrócona jest ku położeniu równowagi, a więc rozpędza wahadło, dostarczając mu energii kinetycznej. W kolejnej ćwiartce okresu, gdy wahadło oddala się od położenia równowagi, przyspieszenie punktu zawieszenia ma zwrot w dół. Składowa prostopadła siły bezwładności zwrócona jest teraz od położenia równowagi, a więc także zwiększa energię wahadła, podnosząc je wyżej.

Warto tu wspomnieć o osobliwym zachowaniu sztywnego wahadła (którego masa skupiona jest na końcu pręta, a nie nici), które ma miejsce w wyniku oscylacji punktu zawieszenia o dostatecznie dużej częstości i amplitudzie. W tych warunkach górne położenie równowagi zyskuje stabilność. Wychylone z tego położenia wahadło wykonuje wokół niego stosunkowo powolne drgania na tle szybkich oscylacji punktu zawieszenia.

Przykładem dobrze opisywanym za pomocą wahadła fizycznego jest wspomniana na wstępie huśtawka. Aby ją silnie rozhuścić, pochylamy się do przodu, gdy jest wychylona w przód, a odchylamy się do tyłu w jej tylnym skrajnym położeniu. W ten sposób zmieniamy parametry decydujące o częstości drgań własnych wahadła fizycznego, jakie tworzymy wraz z huśtawką: jego moment bezwładności i położenie jego środka ciężkości. Częstość tych zmian jest równa częstości wahnięć huśtawki: $\omega_p = \omega_0$, tj. $k = 2$. Ważna jest synchronizacja naszych ruchów z ruchem huśtawki.

Przy wychyleniu naszego ciała w przód lub w tył środek ciężkości wahadła przemieszcza się w taki sposób, że składowa siły ciężkości prostopadła do linii łączącej punkt zawieszenia ze środkiem ciężkości zwiększa się nieco w porównaniu z wartością, jaką by miała, gdybyśmy siedzieli nieruchomo. Ten przyrost siły wystarcza nie tylko do podtrzymania małych wahnięć, kompensując wpływ tarcia, ale także do wydatnego zwiększenia amplitudy.

Rezonans parametryczny wykryto w układach fizycznych o różnej naturze. Można go zaobserwować np. w obwodach RLC, w plazmie poddanej działaniu zewnętrznych pól, w laserach i przy wzbudzaniu fal na powierzchni cieczy. Rozważa się go w kosmologicznych modelach opisujących krację cząstek elementarnych oraz interpretując oscylacje neutrin. Zjawiska mechaniczne opisane tutaj (w których, zresztą, rezonans parametryczny został odkryty) mają tę zaletę, że można je łatwo odtworzyć w codziennych warunkach, do czego zachęcam.

Poznajemy właściwości tarcia. Część II: Wyznaczamy współczynniki tarcia

Stanisław *BEDNAREK*

Kontynuujemy doświadczenia dotyczące tarcia. Ich główny cel to wyznaczenie współczynnika tarcia dla różnych materiałów. Poznamy również dodatkowe czynniki, od których zależy siła tarcia. Do naszych doświadczeń użyjemy opisanego w poprzednim artykule siłomierza. Potrzebne nam będą także: płaska, sztywna płytką z dowolnego materiału o rozmiarach około 50×15 cm, kilka książek lub grubszych zeszytów do podparcia płytki, arkusz papieru ściernego, kawałek tkaniny o rozmiarach zbliżonych do papieru ściernego, kilka okrągłych ołówków lub kredek, olej, duży arkusz folii lub ceraty, taśma klejąca oraz dostęp do tablic matematyczno-fizycznych.

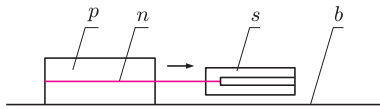
Na początek powtórzmy doświadczenie z poprzedniego artykułu, w którym badaliśmy zależność siły tarcia od wielkości powierzchni przy użyciu jednego kartonika wypełnionego piaskiem (rys. 1). Zmierzymy wartość siły tarcia tego kartonika o powierzchnię stołu. Wiemy już, że nie zależy ona od wielkości trących się powierzchni, a więc kartonik możemy położyć na dowolnej ściance. Zapiśzemy otrzymany wynik pomiaru. Wiemy także, iż wartość siły tarcia jest wprost proporcjonalna do wartości siły nacisku. Dlatego można wprowadzić bardziej uniwersalną wielkość fizyczną charakteryzującą tarcie, która będzie zależna tylko od rodzaju trących się powierzchni. Tą wielkością jest współczynnik tarcia. Wyraża się on następującym wzorem:

$$(1) \quad f = \frac{T}{N}.$$

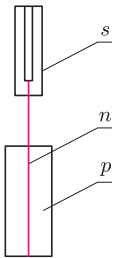
We wzorze (1) f oznacza współczynnik tarcia, T – wartość siły tarcia \mathbf{T} , a N – wartość siły nacisku. Wartość siły tarcia już znamy. Wartość siły nacisku kartonika na stół jest równa ciężarowi kartonika. Żeby wyznaczyć ten ciężar, przywiązujemy kartonik do wolnego końca gumki naszego siłomierza trzymanego w pozycji pionowej i odczytujemy jego wskazanie (rys. 2). Następnie podstawiamy obie wartości do wzoru (1) i obliczamy ich iloraz. Jeżeli mamy obszerne tablice matematyczno-fizyczne lub fizyczne, to możemy spróbować porównać otrzymany wynik z wartością podaną w tablicach dla pary trących się materiałów: papier i drewno. Wartość tablicowa może jednak różnić się dość znacznie od otrzymanego przez nas wyniku, ponieważ są różne rodzaje papieru i różne gatunki drewna o różnym sposobie wykończenia, a więc i różnych gładkościach powierzchni.

Powyższe doświadczenie i obliczenia warto powtórzyć dla innych kombinacji trących się powierzchni. W tym celu zmierzmy siłę tarcia kartonika przesuwanego, na przykład, po papierze ściernym oraz po tkaninie, które mocujemy taśmą klejącą do powierzchni stołu przykrytego folią lub ceratą. Na pewno dla kombinacji kartonik–papier ścierny otrzymamy większą wartość współczynnika tarcia. Warto tutaj dodać, że podawane w tablicach wartości współczynników tarcia podczas przesuwania ciał zawierają się w granicach od około 0,01 do 100. Najmniejszą wartość współczynnika tarcia wykazuje stop boru, glinu i magnezu, tylko 0,02. Stal przesuwana po lodzie ma współczynnik tarcia około 0,14. Większe wartości współczynników tarcia występują podczas przesuwania cegły po cegle i betonu po betonie (ok. 0,65). Dla przesuwania gumy po betonie współczynnik tarcia wynosi około 1,5. O największych wartościach współczynnika tarcia, dochodzących do 100, napiszemy więcej za miesiąc.

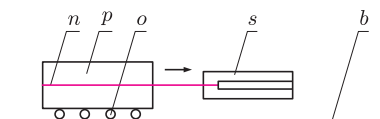
Dotychczas zajmowaliśmy się tzw. tarcie suche, czyli takim, w przypadku którego między trącymi się powierzchniami nie ma cieczy. Możemy posmarować olejem powierzchnię folii lub ceraty przykrywającej stół i przesuwać po niej kartonik, mierząc wartość siły tarcia. Po wykonaniu obliczeń dla tej sytuacji otrzymamy zapewne mniejszą wartość współczynnika tarcia niż dla tarcia suchego.



Rys. 1. Układ do wyznaczenia siły tarcia kartonika od napojów o stół; s – siłomierz, p – kartonik wypełniony piaskiem, n – nitka, b – powierzchnia stołu.



Rys. 2. Sposób wyznaczenia ciężaru kartonika od napojów; s – siłomierz, p – kartonik wypełniony piaskiem, n – nitka.



Rys. 3. Układ do badania tarcia tocznego; p – kartonik od napojów wypełniony piaskiem, n – nić, o – okrągły ołówek lub kredek, s – siłomierz, b – powierzchnia stołu.



Badany w tym doświadczeniu rodzaj tarcia, w którym między trącymi się powierzchniami znajduje się ciecz, nazywany jest tarciem mokrym albo tarciem ze smarowaniem. Smarowanie jest jednym ze sposobów zmniejszania tarcia. Sposób ten znany był już w starożytnym Egipcie, gdzie podczas transportu ciężkich bloków skalnych, używanych do budowy piramid, wylewano olej pod płozy sań, na których znajdowały się bloki. Dziś różnego rodzaju oleje i smary używane są powszechnie.

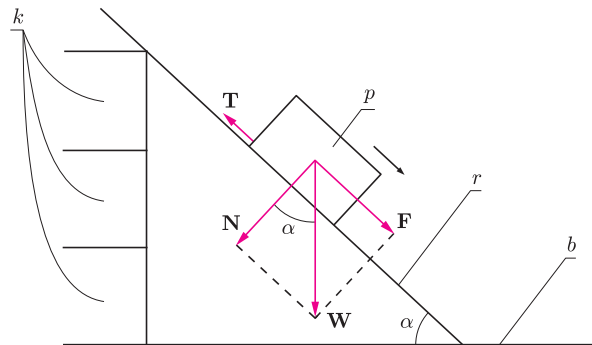
W naszych dotychczasowych doświadczeniach dotyczących tarcia jedno ciało przesuwało się po drugim. W takich przypadkach mówimy o tarcu posuwistym albo, rzadziej, suwliwym. Często jednak występują takie sytuacje, w których jedno ciało toczy się po drugim. Wtedy również ma miejsce tarcie i nazywa się ono tarciem tocznym. Tarcie toczne możemy zbadać w układzie przedstawionym na rysunku 3. W tym celu na stole układamy w odstępach 1–2 cm kilka okrągłych ołówków lub kredek, a na nich kładziemy kartonik, który ciągniemy za pomocą siłomierza z przywiązaną nitką.

Mierzmy wartość siły tarcia tocznego i zapisujemy wynik. Wartość siły nacisku w tym przypadku jest także równa ciężarowi kartonika i poprzednio już ją zmierzaliśmy. Obliczamy iloraz wartości tych sił i otrzymujemy wartość współczynnika tarcia tocznego. Jaka jest ta wartość w porównaniu z obliczoną poprzednio wartością współczynnika tarcia posuwistego kartonika po czystej powierzchni stołu? Zapewne dla tarcia tocznego ta wartość jest mniejsza. Dlatego też dla zmniejszenia strat energii w wyniku tarcia stosuje się różnego rodzaju łożyska toczne, np. kulkowe lub wałeczkowe, w których tarcie posuwiste zastąpiono tarciem tocznym. Żeby jeszcze bardziej zmniejszyć tarcie i zapobiec szybkiemu zużywaniu trących się elementów, łożyska te są smarowane. W naszym układzie doświadczalnym możemy wyznaczyć współczynnik tarcia tocznego ze smarowaniem, wykonując poprzednio opisane doświadczenie na kawałku powierzchni stołu posmarowanej olejem. Wartości współczynników tarcia tocznego są znacznie mniejsze niż tarcia poślizgowego. W sprzyjających warunkach, np. podczas toczenia się kulki stalowej po smarowanej powierzchni stalowej, współczynnik tarcia tocznego może wynosić tylko 0,00001.

Nasze dotychczasowe doświadczenia dotyczyły tarcia podczas ruchu ciał. Takie tarcie nazywa się tarciem kinetycznym, ale, jak już wspomniano w poprzednim artykule, tarcie występuje również między spoczywającymi ciałami. Tarcie to nazywane jest tarciem spoczynkowym lub statycznym. Zajmiemy się teraz wyznaczeniem współczynnika tego tarcia. W tym celu skorzystamy z płaszczyzny nachylonej pod pewnym kątem do poziomu, nazywanej w fizyce równią pochyłą (rys. 4). Płaską i sztywną płytkę kładziemy na stole, a na niej w pobliżu krótszego boku umieszczamy kartonik od napojów wypełniony piaskiem.

Powoli podnosimy krótszy bok płytki, czyli równi pochyłej, po stronie leżącego kartonika i obserwujemy jego zachowanie. Stwierdzamy, że przy odpowiednio

małym kącie nachylenia równi α kartonik pozostaje w spoczynku. Jeżeli jednak zwiększymy ten kąt powyżej wartości granicznej α_g , to kartonik zacznie się zsuwać. Właśnie ten graniczny kąt nachylenia równi pochyłej odpowiada maksymalnej wartości siły tarcia statycznego. Ustalamy maksymalne nachylenie równi, przy którym kartonik jeszcze się nie zsuwa, przez podłożenie odpowiednio grubego stosu książek lub zeszytów. Mierzmy linijką odległość górnego brzegu równi od stołu oraz odległość w poziomie między górnym i dolnym brzegiem równi. Stosunek tych dwóch wielkości jest tangensem granicznego kąta nachylenia α_g .



Rys. 4. Układ do badania tarcia przy użyciu równi pochyłej; p – kartonik od napojów wypełniony piaskiem, r – równia pochyła, b – powierzchnia stołu, k – książka, \mathbf{W} – ciężar kartonika, \mathbf{N} – siła nacisku kartonika na równię, \mathbf{F} – siła ściągnięcia kartonika z równi, \mathbf{T} – siła tarcia, α – kąt nachylenia równi.

W celu wyprowadzenia wzoru na współczynnik tarcia ciała umieszczonego na równi pochyłej rozłożmy ciężar kartonika \mathbf{W} na składową prostopadłą do równi, czyli siłę nacisku \mathbf{N} ($N = W \cos \alpha$), oraz składową równoległą do równi \mathbf{F} ($F = W \sin \alpha$), która dąży do ściągnięcia kartonika w dół. Wykorzystajmy definicję współczynnika tarcia (1) dla $F = T$, co pozwoli nam obliczyć współczynnik tarcia statycznego f_s dla ciała leżącego na równi pochyłej:

$$(2) \quad f_s = \operatorname{tg} \alpha_g.$$

Warto również położyć płytkę poziomo na stole i w poprzednio opisany sposób wyznaczyć dla pary materiałów płytka-kartonik współczynnik tarcia kinetycznego, którego wartość jest nieco mniejsza od wartości współczynnika tarcia statycznego. Wskutek niewielkiej dokładności naszego siłomierza różnica ta może być jednak trudna do wykrycia. Dlatego dla zwiększenia dokładności należy kilka razy powtórzyć pomiary w obu doświadczeniach i obliczyć wartości średnie. Możemy także posmarować płytkę olejem i spróbować wyznaczyć współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego ze smarowaniem.

Samoelektryzowanie się pyłu

Na zdjęciu obok widać erupcję wulkanu Chaitén w południowym Chile, który zdawał się wygasły przez prawie 10 tysięcy lat, by w katastroficzny dla pobliskiego miasta o tej samej nazwie sposób przebudzić się 2 maja 2008 roku. Nie mniej spektakularne są wyładowania rozświetlające noc.

A nam brakuje pokory wobec sił natury. Czyż nie jesteśmy przekonani, że choć (jeszcze) nie potrafimy zapanować nad żywiołami, to przecież świetnie je, przynajmniej jako ludzkość, rozumiemy? Nie musimy już odwoływać się do gromowładnego Zeusa, żeby opisać piorun. Czyż nie wiemy, jak on powstaje?

A jednak. Nadal nie do końca wiadomo, w jaki sposób elektryzują się drobiny. Zjawisko jest dość powszechne. Elektryzują się kryształki lodu w chmurach burzowych, pyły wulkaniczne w czasie erupcji wulkanów, piasek podczas burz piaskowych (zdjęcie poniżej), pył węglowy w kopalniach, toner w drukarkach itp. Niekoniecznie wszystkie te zjawiska mają wspólne wytłumaczenie. Może być ich wiele.

Niedawno ukazała się praca [1], która może być istotnym przyczynkiem do zrozumienia niektórych z tych zjawisk. Autorzy próbują znaleźć odpowiedź na dwa pytania: W jaki sposób drobiny izolatora przenoszą olbrzymie ładunki? W jaki sposób drobiny identycznego materiału mogą się wzajemnie elektryzować? Przecież nieustannie się zderzając, powinny się neutralizować.

Według autorów jest dokładnie na odwrót. Drobiny, zderzając się, ładują się zamiast się neutralizować, pod warunkiem, że chmura znajduje się w silnym polu elektrycznym. Mała, swobodnie unosząca się cząstka dielektryka polaryzuje się w obecności zewnętrznego pola elektrycznego. Jeżeli dwie takie drobiny zderzą się mniej więcej wzdłuż kierunku zewnętrznego pola, to mogą wzajemnie zneutralizować ładunki znajdujące się na stykających się w trakcie zderzenia fragmentach ich powierzchni, ale to, paradoksalnie, prowadzi do naelektryzowania cząstek, a nie neutralizacji. Można to wyjaśnić następująco. Przed zderzeniem były one tylko dipolami elektrycznymi, a po zderzeniu, które zneutralizowało jedną stronę każdego z dipoli, każda z cząstek ma niezerowy ładunek. Autorzy argumentują dalej, że po rozłączeniu cząstki ulegną ponownej



polaryzacji. W konsekwencji każde zderzenie cząstek przyczynia się do rozwarstwienia ładunku w chmurze.

Czy ten prosty mechanizm rzeczywiście działa? Autorzy przekonują o tym za pomocą symulacji oraz pomysłowego eksperymentu w małej skali.

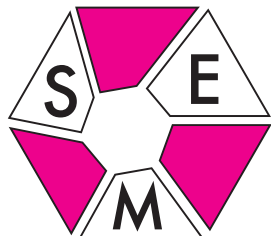
Proponowane podejście ma sprawdzalne przewidywania, jeżeli chodzi o wielkość efektu oraz jego zależność od takich parametrów, jak średnia prędkość cząstek, ich koncentracja itp. Model przewiduje, że średnie naelektryzowanie pojedynczej cząsteczki będzie największe dla pośrednich gęstości. Dla małych zderzenia będą zbyt rzadkie, a dla dużych, na skutek skończonej sprężystości drobin, spada ich średnia prędkość. Przedstawione w pracy wyniki symulacji potwierdzają przewidywany obraz.

Jednakże w symulacji użyte są te same uproszczenia co przy budowie modelu analitycznego. W celu sprawdzenia ich poprawności autorzy przeprowadzili eksperyment ze szklanymi kulkami o średnicy 1,6 mm. Kulki zostały umieszczone w pojemniku umożliwiającym wdmuchiwanie powietrza od dołu. Za każdym razem strumień powietrza był zwiększany tylko do momentu uzyskania „poruszenia-fluidyzacji” cząstek w pojemniku. Następnie przykładano do metalowych płyt umieszczonych pod i nad pojemnikiem różnicę potencjałów 30 kV, uzyskując natężenie pola około 300 kV/m. Ponieważ bezpośredni pomiar ładunku kulek nie był możliwy, z konieczności zadowolono się zliczaniem unoszących się kulek w wybranym okienku na zdjęciach poklatkowych. Ponownie uzyskano dobrą zgodność między eksperymentem, symulacją i modelem analitycznym.

Cytowana praca na pewno udowadnia, że zderzenia drobin, zamiast do neutralizacji ładunku, mogą prowadzić do jego wzrostu. Mechanizm ten wyjaśnia również transport ładunku wewnątrz chmury. Nie wiadomo jednak, skąd miałyby się brać niezbędne pole elektryczne. Naturalna różnica potencjałów między jonosferą a powierzchnią Ziemi, według autorów, nie wystarcza. Mechanizm ten nie tłumaczy wszystkich rodzajów elektryzowania. W szczególności sposób różnicowania ładunku w chmurach burzowych jest inny, bo rozłożenie ładunku ma przeciwny znak, ale o tym, jak widać, innym razem.

Piotr ZALEWSKI

[1] T. Pähz, H. J. Herrmann i T. Shinbrot, *Why do particle clouds generate electric charges?*, Nature Physics, 11/04/2010, doi:10.1038/nphys1631



20. marca 2010 odbyło się doroczne Walne Zgromadzenie członków SEM. Omawiano działalność Stowarzyszenia w ubiegłym roku i dyskutowano o planach na przyszłość. Walne Zgromadzenie postanowiło rozszerzyć o jedną osobę skład Zarządu SEM i wybrało do pełnienia tej funkcji Barbarę Roszkowską-Lech.

W tym samym dniu odbyły się też zawody finałowe V Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Wzięło w nich udział 160 uczniów. Mieli oni do rozwiązania 5 zadań w ciągu 3 godzin.

Uroczyste zakończenie tej edycji OMG odbyło się następnego dnia. Uczestniczył w nim m.in. wicemister Edukacji Narodowej, Zbigniew Włodkowski. Komitet Główny OMG postanowił przyznać:

- tytuł laureata I stopnia 7 uczniom;
- tytuł laureata II stopnia 13 uczniom;
- tytuł laureata III stopnia 28 uczniom;
- tytuł laureata IV stopnia 52 uczniom;

Wielu uczniów, którzy brali udział w OMG, odnosi sukcesy w Olimpiadzie Matematycznej. Wśród finalistów aktualnej edycji Olimpiady znalazło się 56 finalistów poprzednich czterech edycji OMG.

Zadania z finału V OMG i szkice ich rozwiązań przygotowane przez Komisję Zadaniową Komitetu Głównego (także listę finalistów i nagrodzonych uczniów) można znaleźć na stronie www.omg.edu.pl

Spójrzmy na zadanie 1:

Dane są takie liczby całkowite $a, b, c > 1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a - 1, b - 1, c - 1$ jest większy od 1. Udowodnij, że liczba $abc - 1$ jest złożona.

Zadanie to można rozwiązać nieco inaczej niż w „firmowym” szkicu, posługując się kongruencjami, które szeroko są omówione w dodatku do broszury *I Olimpiada Gimnazjalistów*. Przypomnijmy, że dla danej liczby naturalnej $n > 1$ i danych liczb całkowitych a, b , zapis $a \equiv b \pmod{n}$ oznacza, że liczba $a - b$ jest podzielna przez n . To właśnie jest określenie kongruencji liczb a, b względem n (lub, jak się na ogół mówi, modulo n). Jest więc to jakby równość tych liczb, gdy uwzględnia się tylko podzielność przez n (dokładniej, jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$, to liczby a i b przy dzieleniu przez n dają jednakowe reszty). Ta specyficzna „równość” ma wiele własności podobnych do zwykłej równości. By rozwiązać zadanie 1, wystarczy wiedzieć, że jeśli $a \equiv b \pmod{n}$ oraz $c \equiv d \pmod{n}$, to $ac \equiv bd \pmod{n}$. Załóżmy, że n jest największym wspólnym dzielnikiem danych w zadaniu liczb $a - 1, b - 1, c - 1$. Używając kongruencji, możemy napisać, że $a \equiv 1 \pmod{n}$, $b \equiv 1 \pmod{n}$, $c \equiv 1 \pmod{n}$. Teraz korzystając ze wspomnianej wyżej własności, otrzymujemy $abc \equiv 1 \pmod{n}$. W efekcie $abc - 1$ jest podzielne przez n i już.

Patrząc na to rozwiązanie wnikliwiej, dość łatwo dostrzeżemy, że jest ono właściwie takie samo, jak rozwiązanie „firmowe”. Niemniej jednak, gdy ktoś potrafi posługiwać się kongruencjami, może zaoszczędzić sobie rachunków.

Zadanie to można uogólnić następująco: Dane są takie liczby całkowite a_1, a_2, \dots, a_n , większe od 1, że największy wspólny dzielnik liczb $a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$ jest większy od 1. Udowodnić, że liczba $a_1 a_2 \dots a_n - 1$ jest złożona. Dowód z pomocą kongruencji nie powinien nikomu sprawić kłopotów.

A oto zadanie 4:

Danych jest pięć dodatnich liczb rzeczywistych. Wykaż, że spośród tych liczb można wybrać takie dwie liczby a, b , dla których

$$0 \leq \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} < \frac{1}{4}.$$

Zadanie to można rozwiązać, odwołując się do tzw. Zasady Szufladkowej Dirichleta, o której jest mowa w dodatku do tej samej broszury. Głosi ona rzecz oczywistą – jeśli umieścimy 5 królików w 4 klatkach, to w którejś z tych klatek muszą znaleźć się przynajmniej dwa króliki. Przypomnijmy, że po pewnych przeformułowaniach, o jakich można przeczytać w rozwiązaniu „firmowym”, sprowadza się ono do wykazania, że jeśli dane są liczby $1 > y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_5 > 0$, to różnica między dwiema spośród liczb y_1, y_2, \dots, y_5 jest nieujemna i jednocześnie mniejsza od $1/4$. Te liczby to będą nasze „króliki”. „Klatkami” będą odcinki $(0, 1/4]$, $(1/4, 1/2]$, $(1/2, 3/4]$, $(3/4, 1)$. Mamy więc 5 królików w 4 klatkach. Zatem przynajmniej dwa króliki muszą być w jednej z tych klatek. Wszystkie klatki mają szerokość $1/4$, więc dwa króliki siedzące w jednej klatce siedzą w odległości nie większej niż $1/4$. Chyba już widać, że to jest rozwiązanie.

Warto więc zaglądać do broszur OMG.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Zadania z fizyki nr 500, 501

Redaguje Jerzy B. BROJAN

500. Naderer i Fedal grają w tenisa, a za ich plecami kibice mierzą odstępy czasu między uderzeniami, posługując się mikrofonami podłączonymi do zegarów elektronicznych. Po meczu trwa wymiana opinii:

– Muszę przyznać, że ten twój Fedal wali jak z armaty! Czas lotu piłki po jego uderzeniu jest o całe 20% krótszy od lotu po uderzeniu Naderera!

– Miło mi to słyszeć, ale chyba się pomyliłeś! To po uderzeniu Naderera czas lotu piłki jest o 15% krótszy!

Ile wynosi prędkość piłki po uderzeniu jednego i drugiego gracza?

501. Obrys taboretu jest sześcianiem o boku 60 cm, blat jest cienkim jednorodnym kwadratem, nogi są cienkie i jednakowe, ich łączna masa jest równa masie blatu, a współczynnik tarcia o podłogę wynosi 0,4. Odchylono taboret na dwóch nogach od pionu prawie do punktu równowagi nietrwalej i puszczono, po czym opadł do normalnej pozycji. Reakcja podłogi wzdłuż osi pionowej jest niesprężysta. Czy po opadnięciu nastąpi oderwanie się od podłogi tych nóg, które dotychczas jej dotykały? O ile przesunął się taboret po opadnięciu? Wystarczy ocena przybliżona.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2010

Przypominamy treść zadań:

492. Pociąg o masie 500 ton został rozpędzony na drodze 300 m od spoczynku do prędkości 20 m/s przez lokomotywę, której moc była stała. Oblicz wartość tej mocy.

493. Siłomierz waży 1 N i daje dokładne wskazania, gdy jest w pozycji poziomej. Gdy zawieszono go za jeden koniec, wskazanie siłomierza było równe F_1 , a gdy za drugi, wskazanie było równe F_2 . Czy zawsze musi być spełnione równanie $F_1 + F_2 = 1$ N?

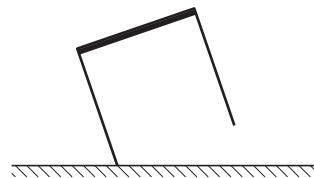
w którym sprężyna ma ciężar P skupiony w jej środku jako punkt materialny, natomiast pozostałe składniki ciężaru siłomierza pomińmy. Jeśli dla każdej z połówek podzielonej sprężyny zależność wydłużenia x od siły F jest opisana funkcją f (funkcję odwrotną oznaczmy jako g), to w przypadku zawieszenia siłomierza pionowo wydłużenie jednej ze sprężynek jest równe $f(P)$, a drugiej – równe zero. Łączne wydłużenie $f(P)$ jest takie samo, jak dla poziomo ustawionego siłomierza, w którym wydłużenie każdej ze sprężynek jest równe $f(P)/2$, czyli wskazanie siłomierza wynosi $g(f(P)/2)$. Podane równanie sprowadza się więc do warunku

$$P = 2g(f(P)/2).$$

Jest on spełniony, gdy zależność siły od wydłużenia jest proporcjonalna (prawo Hooke'a), jednak w innych przypadkach – nie. Z praktycznego punktu widzenia nieliniowa skala siłomierza byłaby, co prawda, dziwna, ale wykluczyć jej nie można.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2010



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
488 ($WT = 1,00$) i 489 ($WT = 2,98$)
z numeru 12/2009

Krzysztof Magiera	Łosiów	42,20
Michał Koźlik	Gliwice	32,92
Jerzy Witkowski	Radlin	24,98

492. Z bilansu energii wynika równanie $Pt = \frac{1}{2}mv^2$,
czyli

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}.$$

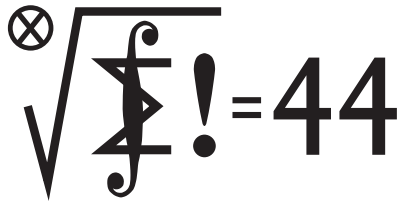
Całkując, wyznaczamy zależność drogi od czasu

$$s = \sqrt{\frac{2P}{m}} \frac{2}{3} t^{3/2}.$$

Po wyeliminowaniu z tych równań czasu t otrzymujemy
wynik

$$P = \frac{mv^3}{3s} = 4,4 \text{ MW}.$$

493. Rozważmy typowy siłomierz, którego wskazanie pochodzi z wydłużenia sprężyny. Oczywiście jest, że podane równanie jest spełnione dla nieważkiej sprężyny (wtedy pozostałe elementy siłomierza można przedstawić jako dwa ciężarki dołączone do jej końców). Rozpatrzmy zatem najprostszy przypadek przeciwny,

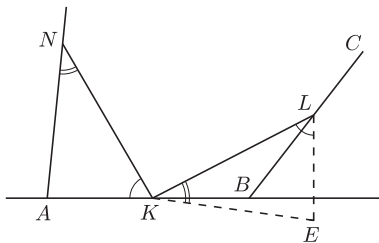


Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2010

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
587 ($WT = 2,67$) i 588 ($WT = 1,30$)
z numeru 10/2009

Tomasz Tkocz	Rybnik	47,10
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,46
Witold Bednarek	Łódź	40,89
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,58
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,27

Tomasz Tkocz drugi raz zalicza
czterdzieści cztery punkty (jak widać,
z niezłym nadstatkiem).



Zadania z matematyki nr 603, 604

Redaguje Marcin E. KUCZMA

603. Na niektórych polach kwadratowej planszy o parzystych wymiarach $n \times n$ stoją pionki. Co sekundę jeden z pionków przechodzi na wolne pole sąsiednie (tj. mające wspólny bok z polem, na którym ten pionek stał). Po pewnym czasie wszystkie pionki znalazły się na swoich wyjściowych pozycjach. Okazało się ponadto, że każdy pionek wykonał n^2 ruchów i odwiedził wszystkie pola planszy. Dowieść, że był moment, w którym żaden pionek nie stał na swoim polu wyjściowym. Czy mogło się zdarzyć, że był dokładnie jeden taki moment?

604. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych x_1, \dots, x_n , spełniające układ równań

$$x_1 + \dots + x_n = n, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = n^2$$

oraz nierówności $x_i \leq 2$ dla $i = 1, \dots, n$.

Zadanie 604 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2010

Przypominamy treść zadań:

595. Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ odłożono odcinki AK, BL, CM, DN jednakowej długości. Dowieść, że jeżeli czworokąt $KLMN$ jest kwadratem, to także czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

596. Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n obliczyć największy wspólny dzielnik liczb $u = (n+1)^m - n$ oraz $v = (n+1)^{m+2} - n$.

595. Z punktu L prowadzimy półprostą, przecinającą prostą AB prostopadle, i odkładamy na niej odcinek LE długości $|LE| = |LB|$. Odległość punktu L od prostej AB nie przekracza $|LB|$, więc odcinek LE ma punkt wspólny z prostą AB , wobec czego

$$(1) \quad |\sphericalangle LKE| \geq |\sphericalangle LKB|.$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $AB \perp BC$, czyli punkt E pokrywa się z B .

Skoro $KLMN$ jest kwadratem, mamy równości

$$|LK| = |KN| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ELK| = |\sphericalangle AKN|.$$

Łącząc je z równością $|LE| = |LB| = |KA|$ widzimy, że trójkąt ELK przystaje do AKN . Zatem $|\sphericalangle LKE| = |\sphericalangle KNA|$, skąd wobec (1) otrzymujemy nierówność $|\sphericalangle KNA| \geq |\sphericalangle LKB|$. Przesuwając cyklicznie oznaczenia wierzchołków czworokątów $ABCD$ i $KLMN$ dostajemy ciąg nierówności

$$|\sphericalangle KNA| \geq |\sphericalangle LKB| \geq |\sphericalangle MLC| \geq |\sphericalangle NMD| \geq |\sphericalangle KNA|.$$

Wszystkie one muszą być równościami.

Równość w (1) oznacza, że $AB \perp BC$ oraz $E = B$. Tak więc trójkąt BLK przystaje do AKN , zatem $|NA| = |KB|$. Przez cykliczną analogię wnosimy, że kolejne boki czworokąta $ABCD$ są prostopadłe, zaś odcinki NA, KB, LC, MD mają równe długości. To znaczy, że $ABCD$ jest kwadratem.

596. Przypuśćmy, że $\text{NWD}(u, v) = d > 1$. Spełnione są kongruencje

$$(2) \quad (n+1)^m \equiv n \quad \text{oraz} \quad (n+1)^{m+2} \equiv n \pmod{d}.$$

Wynika z nich, że liczba d nie ma wspólnego dzielnika pierwszego ani z liczbą $(n+1)^m$, ani z n . Odejmując związki (2) otrzymujemy zależność $(n+1)^{m+2} - (n+1)^m \equiv 0 \pmod{d}$, czyli

$$(n+1)^m n(n+2) \equiv 0 \pmod{d}.$$

Czynniki $(n+1)^m$ oraz n są względnie pierwsze z d , wobec czego $n+2 \equiv 0$, czyli $n \equiv -2 \pmod{d}$. Pierwsze równanie (2) mówi teraz, że $(-1)^m \equiv -2 \pmod{d}$. To zaś oznacza, że m jest liczbą parzystą i że $d = 3$; a ponadto $n \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Wykazaliśmy więc, że jedynymi możliwymi wartościami $\text{NWD}(u, v)$ są liczby 1 i 3; oraz, że jeśli nie są spełnione warunki

$$(3) \quad m \equiv 0 \pmod{2}, \quad n \equiv 1 \pmod{3},$$

to $\text{NWD}(u, v) = 1$. Na odwrót, jeżeli warunki (3) są spełnione, to z określenia liczb u, v dostajemy $u \equiv 2^m - 1 \equiv 0 \equiv v \pmod{3}$, więc $\text{NWD}(u, v) = 3$.



Rozwiązanie zadania F 765.

Przy zmianie objętości z V do $V/2$ para zwiększa ciśnienie, ale nie ulega kondensacji. Dalej następuje skraplanie, przy czym ciśnienie pary wodnej pozostaje stałe i równe $2p$. Zatem skropi się połowa pary wodnej w naczyniu, czyli $m = 0,5\mu\nu = 9$ g.

Patrz w niebo: Ogólna teoria względności

Nagrody Nobla z astronomii nie przyznaje się. Niemniej kilka razy odstąpiono od tej zasady i np. w roku 1993 nagrodę tę otrzymali Joseph Taylor i Russell Hulse za odkrycie w 1974 roku podwójnej gwiazdy neutronowej. Obiekt ten stwarzał okazję do sprawdzenia pewnych efektów przewidywanych przez ogólną teorię względności. Jeden ze składników układu podwójnego jest pulsarem, a wieloletnie monitorowanie jego pulsów pokazało, że okres obiegu gwiazd składowych skraca się, co dowodzi zacieśniania się orbit gwiazd w tempie 3 m rocznie. Fizycznym powodem tego zjawiska byłaby utrata energii układu przez wypromieniowanie fal grawitacyjnych. Oceny mas gwiazd i tempa utraty energii każą wierzyć, że gwiazdy nie spadną wzajem na siebie przed upływem 320 mln lat, a aktualny przebieg zacieśniania się orbit doskonale zgadza się z teorią.

Na początku XXI wieku odkryto inny tego rodzaju układ, który stał się jeszcze lepszym laboratorium fizycznym. Jego symbol katalogowy to PSR J0737-3039, a leży on w Wielkim Psie. Gwiazdy składowe dzieli odległość 800 000 km (podwojona odległość Księżyca od Ziemi), obiegają się w czasie 2,4 h, a orbity zacieśniają się w tempie 20 m rocznie, przez co układ ma przed sobą jeszcze co najmniej 85 mln lat. Monitorowanie jego pulsów doprowadziło ponadto do stwierdzenia przesuwania się pericentrum jednej gwiazdy względem drugiej z prędkością 17° na rok, czyli cztery razy szybciej niż dla pulsara Hulse'a-Taylora, a 150 000 razy szybciej niż porusza się perihelium Merkurego wokół Słońca. Jeszcze jeden przewidywany relatywistyczny efekt mógłby przejawiać się w „niebezpiecznie” krótkim czasie. Mianowicie okres precesji osi pulsara oceniono na 75 lat, wskutek czego strumień promieniowania radiowego mógłby rychło przestać trafiać w Ziemię. Te bardzo subtelne przewidywania mają ogromne znaczenie dla stanu fizyki w ogóle. Dopóki bowiem zgadzają się z obserwacjami, w fizyce panuje ogólna radość i spokój, gdy natomiast przestaną zgadzać się z obserwacjami choćby w jednym punkcie, trzeba będzie poważnie to przeanalizować i może poszukać słabych stron teorii względności. Jak dotąd, uczeni nie mają motywacji, aby to robić, a w każdym razie obecnie mało jest badaczy chętnych do rozwijania teorii ogólniejszych, znacznie trudniejszych matematycznie – i co najmniej tak samo dobrze jak ogólna teoria względności zgadzających się z danymi obserwacyjnymi.

Tomasz KWAST



Czerwiec

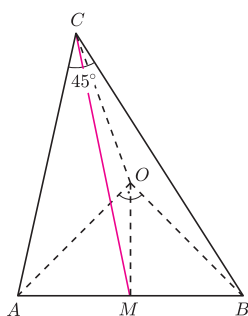
W najdłuższe teraz noce w pobliżu zenitu widzimy okazały gwiazdozbiór Wolarza, a na zachód od niego leżą dwa niepozorne gwiazdozbiory: Psy Gończe i Warkocz Bereniki. Najjaśniejsza gwiazda w Psach Gończych, Serce Karola (nazwę tę nadał gwieździe Halley na cześć króla Karola II), ma jasność 2,9 mag, inne gwiazdy w obu gwiazdozbiorach są jeszcze słabsze. Tak więc obserwator z lornetką nie dojrzy tam łatwo wiele interesującego, za to z większym teleskopem, a tym bardziej z astrografem – owszem. Bowiem na obszarze obu tych gwiazdozbiorów znajduje się mnóstwo galaktyk, z których najjaśniejsze mają około 8 mag. Słynna piękna galaktyka spiralna Wir (M51) w Psach Gończych wcale nie jest tu najjaśniejsza, choć nie ulega wątpliwości, że najefektowniejsza – ale dopiero na zdjęciu. Jej jasność wynosi 10,1 mag, a odległość 7 Mpc. Wiele tysięcy galaktyk w Warkoczku Bereniki tworzy obfitą gromadę, najbliższą Ziemi regularną gromadę galaktyk. Jej centrum leży w odległości niemal 100 Mpc.

Wenus jest w Raku i wieczorem zachodzi wkrótce po Słońcu. Mars jest we Lwie i widać go w pierwszej połowie nocy. Jowisz jest w Rybach i widać go w drugiej połowie krótkiej nocy. Saturn jest w Pannie i widać go wieczorem niewiele dłużej od Marsa. Nów Księżyca wypada 12 VI, a pełnia 26 VI, kiedy to nastąpi częściowe zaćmienie Księżyca, ale w Europie będzie akurat koło południa. Zakryć jasných gwiazd w czerwcu nie będzie, przewidywalnych rojów meteorów też nie. Właściwie będzie nawet gorzej, bo 21 VI nastąpi przesilenie letnie, zatem w zasadzie rozpocznie się lato, ale dni zaczną się już skracać. Pocięcha w tym, że jeszcze przez kwartał będą dłuższe od nocy. Miłych wakacji!

T. K.



Rozwiązanie zadania M 1279.
Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC .



Wówczas $AO = BO = CO$ oraz $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Wobec tego

$$OM = \frac{1}{2}AB \quad \text{oraz} \quad OC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

Zatem na mocy nierówności trójkąta otrzymujemy

$$CM \leq CO + OM = \frac{\sqrt{2}}{2}AB + \frac{1}{2}AB,$$

skąd teza.

W poprzednim *deltoide* zaprezentowano kilka zadań z geometrii płaskiej, rozwiązanych poprzez „wyjście w przestrzeń”. Oto garść kolejnych przykładów na to, że warto płaskie rysunki postrzegać jako ilustracje sytuacji trójwymiarowych.

1. Rysunek 1 przedstawia definicję *liczb szóstkowych*. Sformułuj wzór ogólny na h_n oraz wzór na sumę $h_1 + h_2 + \dots + h_n$.

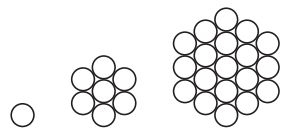
2. W pudełku w kształcie sześciokąta foremego o boku długości n układamy romby o boku długości 1 i kącie 60° (rys. 2). Każdy z rombów ma krótszą przekątną równoległą do któregoś z boków sześciokąta, można zatem wyróżnić trzy *orientacje* rombów. Wykaż, że przy każdym wypełnieniu pudełka zawsze jest tyle samo rombów każdej z trzech orientacji.

3. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P w jego wnętrzu. Punkty X, Y, Z są obrazami punktu P w symetriach odpowiednio względem środków odcinków BC, AC, AB . Wykaż, że proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie.

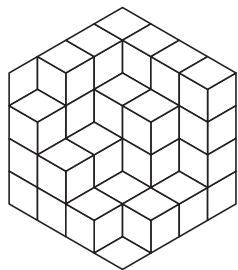
4. Okręgi O_1, O_2, O_3 wszystkie mają promień r i przecinają się odpowiednio: O_1 z O_2 w punktach C i P , O_1 i O_3 w punktach B i P , O_2 i O_3 w punktach A i P . Udowodnij, że okrąg opisany na trójkącie ABC również ma promień r .

Rozwiązania

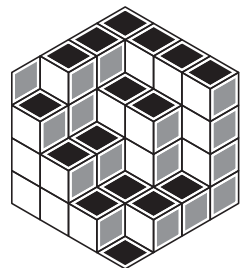
R1. Spójrzmy na rysunek 1 przestrzennie (rys. 3).



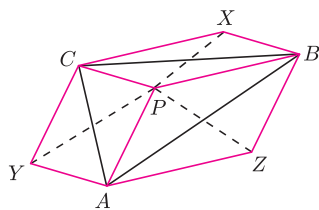
Rys. 1. Liczby szóstkowe: $h_1 = 1, h_2 = 7, h_3 = 19, \dots$



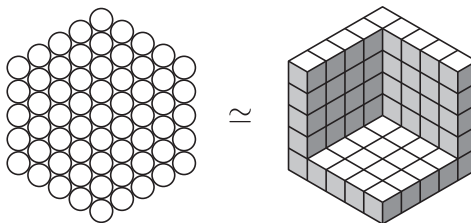
Rys. 2. Francuskie słodczyki *calissons* mają kształt zbliżony do takich rombów i bywają sprzedawane w sześciokątnych pudełkach.



Rys. 4. *Calissons* przestrzennie.



Rys. 5



Rys. 3. Liczby szóstkowe przestrzennie.

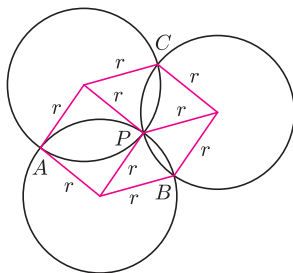
Czy teraz widać, że $h_n = n^3 - (n - 1)^3$ oraz że $h_1 + h_2 + \dots + h_n = n^3$? \square

R2. Romby o jednej orientacji pokolorujemy na czarno, o drugiej na szaro, o trzeciej pozostawmy białe (rys. 4). Następnie spójrzmy na rysunek 4 przestrzennie, raz „z góry”, raz „z lewej”, a raz „z prawej” strony. \square

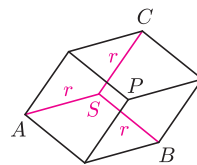
R3. Punkty P, A, Z, B tworzą równoległobok, bo środek boku AB jest zarazem środkiem odcinka PZ (rys. 5). Podobnie $PBXC$ i $PCYA$ są równoległobokami. Kolorowa część rysunku 5, widziana przestrzennie, to pewien równoległoscian. Odcinki AX, BY i CZ przecinają się w jednym punkcie jako jego przekątne.

Dla punktu P na zewnątrz trójkąta ABC rozwiązanie jest analogiczne. \square

R4. Narysujmy promienie okręgów ze środków do punktów A, B, C, P . Wszystkie są równe, więc otrzymane trzy czworokąty są rombami (rys. 6).



Rys. 6



Rys. 7

Patrząc przestrzennie na utworzoną przez nie figurę, można dostrzec równoległoscian. Ma on ósmy, niezaznaczony dotychczas wierzchołek, nazwijmy go S (rys. 7). Wracając do sytuacji płaskiej, na rysunku 7 widzimy, że $SA = SB = SC = r$. Punkt S jest więc środkiem okręgu o promieniu r , opisanego na trójkącie ABC . Dla punktu P na zewnątrz trójkąta ABC rozwiązanie jest analogiczne. \square

Zachęcam, by dowieść dodatkowo, że punkt P jest ortocentrum trójkąta ABC .

Bibliografia

[1] Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words*, Math. Assoc. America, 1997.
[1] www.cut-the-knot.org