




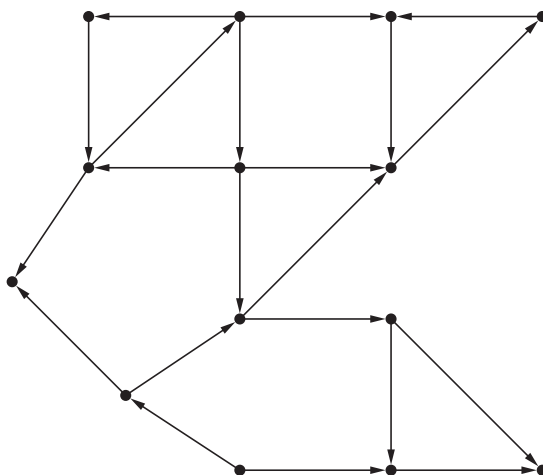




## SPIS TREŚCI NUMERU 8 (459)

O sierotce, co chciała się mózgiem elektronowym wyręczyć <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 1
Ucieczka <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 4
Efekty relatywistyczne w zasięgu ręki? <i>Piotr Zalewski</i>	str. 6
Eubulides, Richard, Gödel <i>Wiktor Bartol</i>	str. 8
Niemożliwy skrót <i>Damian Niwiński</i>	str.10
 Tajemnica dworu Edensville <i>Maria Donten-Bury</i>	str.12
O paradoksach w astronomii <i>Michał Bejger</i>	str.14
Ukryty pęd <i>Krzysztof Turzyński</i>	str.16
Normalna-nienormalna? 	str.17
Zadania	str.17
Aktualności	str.18
 Pospieście się! Spieszmy się? <i>Magdalena Fikus</i>	str.19
Informatyczny kącik olimpijski (53): Dziurawa szachownica <i>Tomasz Idziaszek, Paweł Parys</i>	str.20
 I Czesko-Polsko- -Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów <i>Filip Smentek</i>	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: O twarzy na Księżycu <i>Michał Bejger</i>	str.24
Niebo jak własna kieszeń: Sierpień	str.24
 Zabawy ze słowami <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

W następnym numerze rozwiążemy problem,



jak dorysować najmniejszą liczbę strzałek, by z każdego punktu można było dojechać do dowolnego innego.

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Urszula Swianiewicz, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Fran-Press:** [www.franpress.pl](http://www.franpress.pl), infolinia 801-679-466

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

### Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 03-236 Warszawa, ul. Annopol 17a. Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl)

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

# O sierotce, co chciała się mózgiem elektronowym wyręczyć,

czyli kolejność znowu ma znaczenie

Tomasz IDZIASZEK



Wyobraźmy sobie biedną sierotkę, której macocha nakazała oddzielić groch od fasoli. Chcąc nie chcąc, dziewczę siada w kącie izby przed pokaznym kopcem grochu pomieszanego z fasolą i zaczyna pracę. Praca jest niezwykle monotonna: sierotka bierze nasiono z górki i jeśli to fasola, odrzuca je na lewą stronę, a jeśli groch – na prawą; i tak w kółko. Sierotka jest całkiem porządną, więc aby nie rzucać nasionkami po całej izbie, ustaliła, że nasionka fasoli odkłada na lewą stronę lewą ręką, a nasionka grochu odkłada prawą ręką. Ponieważ na wybór ręki, którą sięgnie po kolejne nasionko, musi się zdecydować, zanim rozpozna jego rodzaj (w izbie jest dość ciemno), więc nierzadko będzie zmuszona do przełożenia nasionka z jednej ręki do drugiej, co, oczywiście, będzie spowalniać jej pracę.

Powiedzmy, że sierotka w większości przypadków wyciąga z górki nasionko fasoli (takie już ma szczęście). Zauważywszy to, może postąpić praktycznie i na początku zawsze wyciągać nasionka lewą ręką, tak by zminimalizować liczbę przełożeń nasionka z ręki do ręki, a gdy w kopczyku zostanie już w większości groch, to będzie wyciągać nasionka prawą ręką. Sierotka może mieć szczęście innego rodzaju, np. prawie zawsze co trzecie wyciągnięte nasionko to groch. W tej sytuacji mądre dziewczę stwierdza, że najbardziej opłacalny jest schemat: lewa ręka, lewa ręka, prawa ręka itd. Niestety, znając bajkowe realia, sierotka najpewniej będzie wyciągała nasionka w zupełnie losowej kolejności, zatem żadne wymyślne strategie nie pomogą jej w uniknięciu marnego losu i średnio co drugie nasionko będzie musiało zostać przełożone z ręki do ręki.

Czytelnik Postępowy od razu zauważy, że wszystkie kłopoty skończyłyby się, gdyby na miejscu sierotki postawić robota z chwytym ramieniem, fotokomórką i mózgiem elektronowym. Nie dość, że wykonałby on zadanie sprawniej i na pewno bezbłędnie, to nie rozwodziłby się długo nad wyborem strategii postępowania, a praca zajęłaby mu tyle samo czasu, niezależnie od kolejności, w jakiej wyciągałby ziarenka z górki.

I moglibyśmy zakończyć ten artykuł powyższym morałem, gdyby nie to, że nie jest on do końca prawdziwy. Okazuje się, że w świecie maszyn nie wszystko jest takie jasne i poukładane, a w elektronowym mózgu może kryć się coś ze sprytniej sierotki. Kto ciekaw, tego zapraszam do eksperymentu.

\* \* \*

Ponieważ nie wszyscy Czytelnicy dysponują odpowiednim sprzętem tudzież zapasem grochu i fasoli, więc eksperyment zasymulujemy na domowym komputerze, pisząc prosty program. Program będzie wczytywał z wejścia zero-jedynkowy ciąg, który kodować będzie rodzaje kolejnych nasionek. Zamiast sortowania, program będzie miał na celu policzenie nasionek, tzn. policzenie, ile zer i ile jedynek występuje w wejściowym ciągu. Jeśli te wartości będzie przechowywał na zmiennych  $x_0$  i  $x_1$ , to po każdorazowym wczytaniu nowego bitu  $b$  należy wykonać taki kod:

```
if b = 0 then  $x_0 := x_0 + 1$ 
else  $x_1 := x_1 + 1$ ;
```

Skompilujmy nasz program i uruchommy go dla różnych ciągów zero-jedynkowych równej długości, w których dokładnie połowa bitów to zera. Wydawałoby się, że czas działania naszego programu musi być zawsze taki sam, w końcu wykonamy dokładnie tyle samo operacji porównań i dodawania, co więcej, wartości zmiennych  $x_0$  i  $x_1$  zwiększymy tyle samo razy. Okazuje się jednak, że na moim komputerze dla ciągu  $B_1 = 0^{n/2}1^{n/2}$  długości  $n = 10^7$ , w którym pierwsza połowa ciągu to zera, a druga połowa to jedynek, program działa 0,11 s, natomiast dla ciągu  $B_2$ , w którym pozycje zer i jedynek są losowe, program działa 0,16 s, czyli prawie o połowę dłużej! Nie jest to bynajmniej błąd pomiaru czasu, gdyż kolejne uruchomienia programu potwierdzają pierwotną obserwację. Ponadto w obu



## Rozwiązanie zadania F 817.

Położenie równowagi ciężarka odpowiada rozciągnięciu sprężyny o  $x_0 = mg/k$ , gdzie  $k$  jest stałą sprężyny ( $F = -kx$ ).

Położenie równowagi szałwika odpowiada zrównoważeniu siły ciężkości przez siłę wyporu:

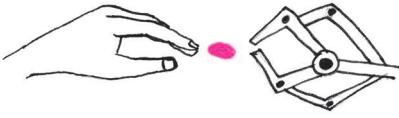
$$mg = V_0 \rho g,$$

czyli zanurzeniu jego objętości  $V_0 = m/\rho$  na głębokość  $h_0 = V_0/S = m/(\rho S)$ , gdzie  $S$  jest polem przekroju poprzecznego szałwika, a  $\rho$  gęstością cieczy w wiadrze.

Ponieważ w obu przypadkach siły generowane przez pionowe przesunięcie względem położenia równowagi są proporcjonalne do tego przesunięcia (i skierowane przeciwnie), więc ruch jest harmoniczny, a częstość jest pierwiastkiem z ilorazu odpowiedniego współczynnika proporcjonalności przez masę:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega = \sqrt{\frac{S\rho g}{m}}.$$

Spadanie wiadra odpowiada zmianie efektywnego przyspieszenia ziemskiego. W związku z tym ciężarek będzie drgał z tą samą częstością, ale względem zmienionego położenia równowagi, oraz ze zmienioną amplitudą (czy można tak dobrać warunki początkowe, żeby amplituda nie zmieniła się?). Natomiast w przypadku szałwika zmieni się częstość drgań (zmaleje) i amplituda (chyba że spadanie rozpoczęło się w momencie maksymalnego wychylenia z położenia równowagi, wtedy amplituda się nie zmieni, dlaczego?), ale położenie równowagi nie zmieni się.



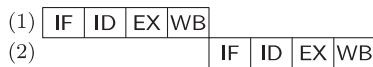
uruchomieniach programu wczytywanie danych zajmuje 0,03 s, więc dysproporcja czasu „właściwych obliczeń” jest w rzeczywistości jeszcze większa.

Jaka jest przyczyna takiego zachowania? Czyżby domowy komputer z jakichś powodów radził sobie lepiej z „przewidywalnymi” danymi, tak jak nasza sierotka? A jeśli tak jest w istocie, to jakie są tego powody?

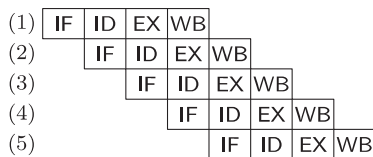
Jak wiemy, kompilacja powoduje przetworzenie kodu programu na ciąg instrukcji niskiego poziomu. Na przykład, zwiększenie wartości zmiennej znajdującej się w rejestrze  $x$  procesora mogłoby zostać zapisane w wewnętrznym języku komputera jako

INC  $x$

Na wykonanie powyższej instrukcji składa się kilka kroków. Po pierwsze, instrukcja musi być pobrana z pamięci. Następnie musi zostać zdekodowana: procesor odkrywa, że chodzi o zwiększenie zmiennej z rejestru. W kolejnym kroku należy wykonać instrukcję: przesłać wartość zmiennej z rejestru do jednostki arytmetycznej procesora i dokonać zwiększenia. I ostatecznie należy przesłać uaktualnioną wartość z powrotem do rejestru. (Jest to przykład dość uproszczony, w ogólnym przypadku wykonanie instrukcji może składać się z większej liczby kroków, tj. np. przekopiowanie danych z pamięci do rejestru procesora. We współczesnych procesorach liczba takich kroków może sięgać kilkudziesięciu.) Widać więc, że wykonanie pojedynczej instrukcji nie jest takie banalne. Jeśli założymy, że każdy krok wykonuje się w jednej jednostce czasu, to na wykonanie  $n$  instrukcji potrzebujemy  $4n$  jednostek czasu (rys. 1).



Rys. 1. Na wykonanie instrukcji procesora składają się cztery kroki: IF (ang. *instruction fetch*), ID (*instruction decode*), EX (*execute*), WB (*write back*). Na wykonanie dwóch instrukcji potrzebujemy 8 jednostek czasu.



Rys. 2. Dzięki przetwarzaniu potokowemu (ang. *pipelining*) w 8 jednostkach czasu jesteśmy w stanie wykonać 5 instrukcji w przypadku pustego potoku i aż 8 instrukcji w przypadku wypełnionego potoku.

Zauważmy jednak, że skoro każdy z kroków jest wykonywany przez inną część procesora, to można przyspieszyć cały proces, umożliwiając tym częściom procesora pracę równoległą przez przetwarzanie kilku instrukcji naraz. (Tak jak na linii produkcyjnej w fabryce samochodów ekipa montująca podwozie pracuje równoległe z ekipą malującą karoserię – pracują po prostu na innych egzemplarzach.) Można postąpić tak: w pierwszym kroku pobieramy pierwszą instrukcję z pamięci. W drugim kroku dekodujemy tę instrukcję, ale w tym momencie część procesora odpowiedzialna za pobieranie instrukcji jest bezrobotna, wobec tego możemy jednocześnie pobrać z pamięci drugą instrukcję. W trzecim kroku wykonujemy pierwszą instrukcję, dekodujemy drugą i pobieramy z pamięci trzecią. Dzięki takiemu *potokowemu* przetwarzaniu instrukcji na wykonanie  $n$  z nich potrzebujemy tylko  $n + 3$  jednostek czasu (rys. 2).

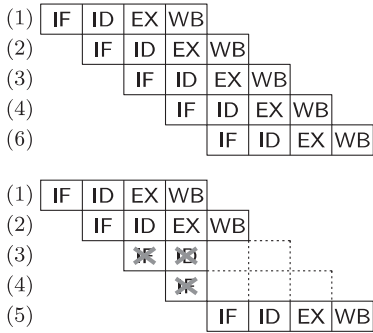
Jak każdy świetny pomysł, tak i ten ma pewne wady. Zauważmy, że przyjęliśmy tu milczące założenie, że zanim zakończymy wykonywanie danej instrukcji, musimy być w stanie rozpocząć wykonywanie następnej, a nawet trzeciej instrukcji z kolei. W szczególności musimy wiedzieć, co to będą za instrukcje. O tym, że nie zawsze posiadamy tę wiedzę, możemy się przekonać, kompilując nasz pierwszy program:

- (1) CMP  $b, 0$
- (2) IFEQJMP (5)
- (3) INC  $x_1$
- (4) JMP (6)
- (5) INC  $x_0$
- (6) ...

W pierwszej instrukcji zapisanej pod adresem (1) wykonujemy porównanie zmiennej  $b$  z zerem. Następna instrukcja jest instrukcją skoku warunkowego: jeśli liczby porównywane ostatnio były równe, to instrukcja ta powoduje skok do instrukcji zapisanej pod adresem (5), w przeciwnym przypadku nie dzieje się nic. Odpowiada to wybraniu odpowiedniej gałęzi w instrukcji **if**. Jeśli wykonaliśmy skok (pierwsza gałąź), to w instrukcji (5) zwiększamy wartość  $x_0$ . Jeśli skoku nie wykonaliśmy (druga gałąź), to w instrukcji (3) zwiększamy wartość  $x_1$ , a następnie wykonujemy bezwarunkowy skok do instrukcji (6). Kluczowa jest w tym programie instrukcja skoku warunkowego IFEQJMP: mianowicie, dopóki jej nie wykonamy, nie wiemy, czy następną po niej będzie instrukcja (3), czy też instrukcja (5), nie wiemy więc, która z nich powinna być w potoku uwzględniona jako następną. Procesor jest zatem w sytuacji naszej sierotki, która,

dopóki nie dotknie nowego ziarenka, nie będzie wiedziała, czy należało użyć lewej czy też prawej ręki.

Można ten kłopot spróbować rozwiązać następująco: procesor zawsze będzie zakładał, że po instrukcji zapisanej pod adresem ( $i$ ) następują instrukcje pod adresami ( $i + 1$ ), ( $i + 2$ ) itd. lub pod adresem, który wskazuje skok bezwarunkowy, i te właśnie instrukcje będzie uwzględniał w potoku. Jeśli jednak instrukcja ( $i$ ) była rozkazem warunkowego skoku i po jej wykonaniu okazało się, że należy skoczyć pod adres ( $j$ ), to częściowa praca związana z wykonaniem instrukcji ( $i + 1$ ) i kolejnych jest unieważniana, a potok jest opróżniany i przetwarzanie zaczyna się na nowo od instrukcji ( $j$ ) (rys. 3).



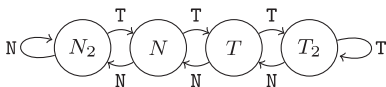
Rys. 3. Sytuacja w potoku w przypadku, gdy skok warunkowy w instrukcji (2) nie nastąpił i gdy nastąpił. Liczby w nawiasach oznaczają numery instrukcji; w pierwszym przypadku w instrukcji (4) występuje bezwarunkowy skok do instrukcji (6).

W przypadku programów, w których jest mało skoków warunkowych lub są rzadko wykonywane, taka strategia może się opłacać. Jednak w pesymistycznym przypadku, gdy każda kolejna instrukcja jest skokiem warunkowym, musimy opróżniać potok po wykonaniu każdej instrukcji, zatem czas wykonania  $n$  instrukcji będzie wynosił  $3n + 1$  jednostek – nasz potok nie będzie zatem wykorzystywany w pełni efektywnie.

Zauważmy jednak, że taka strategia nie może być stosowana w naszym procesorze: przecież program dla ciągów  $B_1$  i  $B_2$  powinien działać tak samo długo, gdyż w obu przypadkach potok byłby opróżniany w połowie instrukcji (2). Taka strategia odpowiada sytuacji, w której nasza sierotka postanowiłaby zawsze używać lewej ręki.

Możemy przyjąć inną metodę postępowania i próbować zgadnąć, czy dany skok warunkowy będzie wykonany, czy też nie. Okazuje się, że współczesne procesory tak właśnie postępują. Co więcej, ponieważ nie znają przyszłości, więc zachowują się jak nasza sierotka i zakładają, że będą miały szczęście i na podstawie zachowań instrukcji skoku warunkowego w przeszłości będą w stanie przewidzieć, jak będzie się ona zachowywała w przyszłości.

Zapiszmy historię wykonywania skoku warunkowego w postaci ciągu złożonego z liter T i N. Jedną z najprostszych strategii zgadywania jest następująca: przyjmujemy, że skok będzie wykonany, jeśli ostatnim razem był wykonany (czyli ostatnia litera w ciągu to T). Ta strategia ma sens w przypadku długich sekwencji analogicznych wyborów, jak to ma miejsce dla ciągu  $B_1$ . Można ją trochę ulepszyć, aby była niewrażliwa na sporadyczne przekłamania w historii, za pomocą wskaźnika mogącego przyjmować cztery stany:  $N_2, N, T, T_2$ ; każde wykonanie skoku powoduje zmianę stanu wskaźnika o jeden w prawo zgodnie z rysunkiem 4, a niewykonanie skoku – w lewo. Zgadujemy, że skok zostanie wykonany, jeśli wskaźnik znajduje się w stanie T lub  $T_2$ .



Rys. 4. Czterostanowy wskaźnik zgadujący, czy skok zostanie wykonany.

Gdyby w naszym procesorze zastosowano powyższą strategię, wyjaśniałaby ona różnice w działaniu programu dla ciągów  $B_1$  i  $B_2$ : w przypadku pierwszego z nich nasza strategia zgadywania nie zadziała tylko kilka razy (w środku ciągu i, być może, na początku), z kolei jest ona zupełnie bezużyteczna (jak w zasadzie jakakolwiek strategia zgadywania) w przypadku drugiego z nich.

Niestety, to nie wyjaśnia, dlaczego dla ciągu  $B_3 = (001)^{n/3}$ , w którym dokładnie co trzeci bit to 1, czas działania jest taki sam jak dla ciągu  $B_1$ . Wszak dla ciągu  $B_3$  musielibyśmy pomylić się dla każdej jedynek, czyli co najmniej  $n/3$  razy. Okazuje się, że strategia stosowana przez współczesne procesory próbuje uwzględnić możliwość wystąpienia krótkich cykli w historii wykonywania skoku i jest z tego powodu trochę bardziej skomplikowana. Mianowicie, przy podejmowaniu decyzji patrzymy na  $k$  ostatnich liter w historii i na podstawie tych liter wybieramy jeden z  $2^k$  czterostanowych wskaźników, który uaktualniamy i podejmujemy decyzję zgodnie z jego wskazaniem. W ten sposób dostajemy mechanizm, który będzie zgadywał poprawnie, o ile w historii wykonywania skoku każde  $k$  kolejnych bitów jednoznacznie wyznacza bit ( $k + 1$ )-szy. W moim komputerze jest  $k = 4$ , zatem w ciągu  $B_3$ , którego historię można opisać regułami: po każdym TT jest N, po każdym TN jest T, a po każdym NT jest T, procesor nie pomyli się ani razu (z wyłączeniem kilku potencjalnych pomyłek na początku ciągu).



**Rozwiązanie zadania M 1359.**

Odpowiedź: Oto pokolorowanie, w którym taki odcinek nie istnieje.

Ustalmy punkt  $O$  płaszczyzny i pomalujmy go na czarno. Punkty na każdym okręgu o środku w  $O$  i promieniu niewymiernym pomalujmy na biało, zaś punkty na każdym okręgu o środku w  $O$  i promieniu wymiernym – na czarno. Przez dowolny odcinek dodatniej długości musi przechodzić pewien okrąg pierwszego typu, jak również drugiego. Zatem odcinek ten nie może być jednokolorowy.

Opisane strategie nie są jedynymi, które są stosowane we współczesnych procesorach. Istnieje cała gama rozwiązań, które pozwalają przewidywać typowe historie wykonywania skoku. W niektórych procesorach do problemu podchodzi się zupełnie inaczej. Zakłada się, na przykład, że w skompilowanym kodzie po każdej instrukcji skoku warunkowego musi wystąpić pewna liczba zwykłych instrukcji, które będą wykonane niezależnie od tego, czy skok nastąpi, czy nie, aby po ich wykonaniu adres docelowy był już obliczony.

\* \* \*

Morał z tej bajki jest taki, że nawet kolejność, w jakiej podajemy dane programowi komputerowemu, ma znaczenie (mimo że na pierwszy rzut oka może wydawać się to niewiarygodne). Drugi morał jest ważną wskazówką dla programisty: w kodzie, w którym ważna jest efektywność wykonania, należy, o ile to możliwe, unikać skoków. Okazuje się, że nasz pierwszy program możemy przepisać tak, by nie występowała w nim instrukcja **if**:

$$x_0 := x_0 + 1 - b;$$

$$x_1 := x_1 + b;$$

Tak napisany program działa w czasie 0,11 s dla każdego z ciągów  $B_1$ ,  $B_2$  i  $B_3$ .

Artykuł powstał na podstawie następujących zadań:

198. *Get Out!*  
z serwisu [acm.sgu.ru](http://acm.sgu.ru),

*Płotki*  
z Obozu Naukowo-Treningowego  
im. A. Kreczmara 2009,

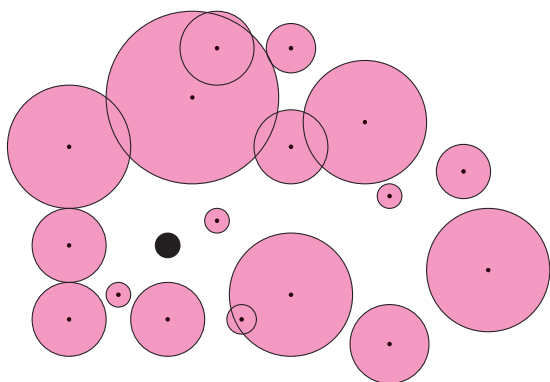
*Ucieczka i Budowanie plotu*  
z Bałtyckiej Olimpiady  
Informatycznej 2007.

## Ucieczka

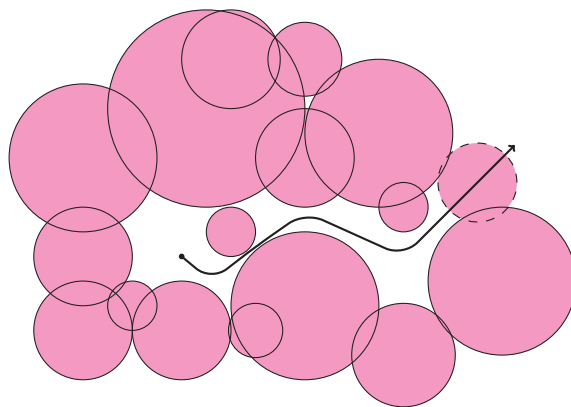
Jakub RADOSZEWSKI

Wyobraź sobie, Drogi Czytelniku, że jesteś kapitanem okrętu wojennego i w trakcie jednej z misji znalazłeś się na środku morza leżącego na terytorium wroga. Wiesz, że wróg rozmieścił w tej strefie pewną (skończoną) liczbę radarów. Każdy radar ma określony zasięg, być może różny w przypadku różnych radarów, i jest w stanie wykryć każdy podejrzany obiekt, który znajdzie się w jego zasięgu. Naszym siłom wywiadowczym udało się wykraść plan rozmieszczenia radarów. Na jego podstawie chcesz stwierdzić, czy możesz wydostać się z wrogich wód niezauważony przez radary.

Powyższa historia wojenna z lotu ptaka wygląda następująco: na płaszczyźnie zadana jest pewna liczba kół stanowiących obszary zabronione. Dla uproszczenia nasz statek również przedstawimy jako koło. Naszym zadaniem jest sprawdzić, czy możemy przemieścić się statkiem nieskończenie daleko od początkowej pozycji, nie dotykając przy tym żadnego z pozostałych kół (rys. 1).

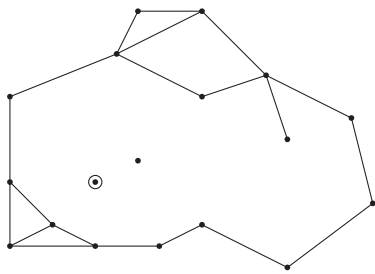


Rys. 1



Rys. 2

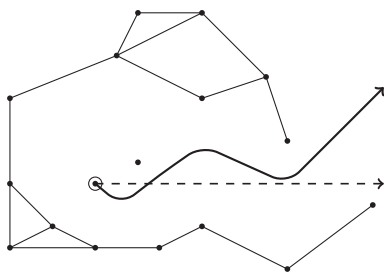
Takie sformułowanie problemu nie jest jednak zbyt wygodne. Możemy je uprościć przez „odpompowanie” koła reprezentującego statek i „napompowanie” kół przedstawiających zasięgi radarów. Dokładniej, promień wszystkich kół-radarów zwiększamy o promień statku, a sam statek zmniejszamy do jednego punktu – środka koła (rys. 2). Aby uzasadnić poprawność tego przekształcenia, wystarczy zauważyć, że bezpieczna trasa statku charakteryzuje się tym, iż jego środek nie zbliża się do żadnego radaru na odległość mniejszą niż suma promienia statku i zasięgu radaru. Po tej transformacji dużo łatwiej udzielić odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu; w sytuacji z rysunku 2 ucieczka



Rys. 3

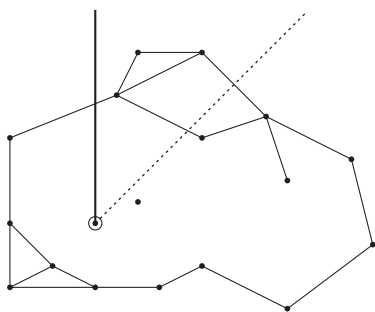
statku ewidentnie nie jest możliwa, ale gdyby np. nie było prawego górnego radaru, to można byłoby wskazać bezpieczną trasę ucieczki.

A może dałoby się w ogóle pozbyć z problemu wszystkich kółek? Okazuje się, że jest to możliwe. Intuicja jest taka, że pojedynczy radar bardzo łatwo ominąć, ale za pomocą radarów, których zasięgi nachodzą na siebie, można zbudować już bardzo skuteczną pułapkę. Przedstawmy więc całą sytuację jako graf  $G$ , którego wierzchołki reprezentują lokalizacje radarów, a dwa wierzchołki są połączone krawędzią, gdy zasięgi odpowiadających im radarów przecinają się (rys. 3). Nasz statek może opuścić terytorium wroga wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest otoczony żadnym cyklem grafu  $G$ .



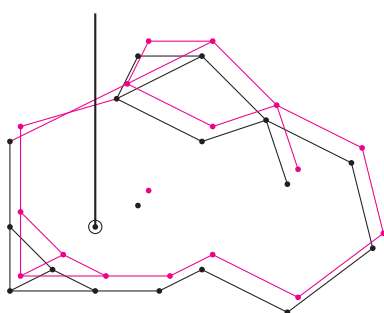
Rys. 4

Uzasadnienie tego faktu w jedną stronę jest oczywiste: jeśli statek jest otoczony cyklem, to na pewno nigdy się z niego nie wydostanie. W drugą stronę trzeba się trochę bardziej nagimnastykować, bo nie każda trasa ucieczki „z grafu” faktycznie unika wszystkich radarów. Przykładowo, na rysunku 4 (przedstawiającym graf odpowiadający sytuacji bez prawego górnego radaru) trasa narysowana linią przerywaną nie przecina krawędzi grafu, ale nie jest bezpieczną trasą ucieczki. Poprawne uzasadnienie może wyglądać, na przykład, tak: dzielimy graf na spójne składowe i dla zbioru okręgów z każdej składowej wyznaczamy ich zewnętrzny obrys. Skoro statek nie jest otoczony żadnym cyklem grafu, to możemy nim dopłynąć do obrysu najbliższej składowej, a następnie przepłynąć do jakiegokolwiek punktu wzdłuż obrysu. Z któregoś takiego punktu będziemy mogli albo już bezpośrednio uciec w siną dal, albo przedostać się do obrysu innej składowej itd.



Rys. 5

Pozostał nam już tylko problem stwierdzenia, czy statek znajduje się wewnątrz jakiegoś cyklu, czy też nie. W tym momencie ktoś mógłby przypomnieć sobie klasyczny algorytm sprawdzania, czy zadany punkt leży we wnętrzu danego wielokąta (niekoniecznie wypukłego). Aby to sprawdzić, wypuszczamy z tego punktu półprostą w losowym kierunku i zliczamy jej przecięcia z brzegiem wielokąta; jeśli jest ich nieparzyste wiele, to punkt leży wewnątrz wielokąta, a jeśli parzyste wiele, to na zewnątrz. Losowość kierunku gwarantuje, że półprosta nie przejdzie przez żaden wierzchołek wielokąta, dzięki czemu unikamy rozważania przykrych przypadków szczególnych. Niestety, w naszym problemie możemy mieć w grafie coś więcej niż jeden wielokąt, co powoduje, że zależnie od kierunku półprostej liczba przecięć może być parzysta bądź nieparzysta (rys. 5). Klasyczny algorytm tutaj nie zadziała.



Rys. 6

Warto jednak pozostać przy pomysłach z półprostą, tylko sprytniej go wykorzystać. Chcemy stwierdzić, czy w grafie  $G$  istnieje taki cykl, że łączna liczba przecięć krawędzi tego cyklu z wybraną półprostą jest nieparzysta. Krawędzie grafu przecinające półprostą zmieniają parzystość licznika przecięć, oznaczymy je zatem jedynką, a pozostałe krawędzie poetykietujemy zerami.

Teraz przyszedł czas na kluczowy pomysł: stworzymy nowy graf  $G'$  zawierający dwie kopie oryginalnego grafu. Dokładniej, dla każdego wierzchołka  $v$  grafu  $G$  do grafu  $G'$  dodamy wierzchołki  $(v, 0)$  i  $(v, 1)$ ; tutaj druga współrzędna oznacza parzystość liczby przecięć z wybraną półprostą. Jeśli w grafie  $G$  mamy krawędź łączącą wierzchołki  $v$  i  $w$  o etykiecie 0, to w grafie  $G'$  tworzymy dwie krawędzie, łączące  $(v, 0)$  z  $(w, 0)$  oraz  $(v, 1)$  z  $(w, 1)$ . A jeśli rozważana krawędź grafu  $G$  ma etykietę 1, to w grafie  $G'$  łączymy wierzchołki  $(v, 0)$  z  $(w, 1)$  oraz  $(v, 1)$  z  $(w, 0)$  – patrz rysunek 6.

A jak stwierdzić, czy nasz statek może bezpiecznie przedostać się z danego punktu początkowego do danego punktu końcowego? Wskazówka: Użyj dwóch półprostych i stwórz cztery kopie wyjściowego grafu.

Był już kluczowy pomysł, teraz pora na kluczowe spostrzeżenie: cykl złożony z krawędzi grafu  $G$  uniemożliwiający statkowi ucieczkę w grafie  $G'$  odpowiada po prostu ścieżce z jakiegoś wierzchołka  $(v, 0)$  do  $(v, 1)$ . Wystarczy zatem stwierdzić, czy w grafie  $G'$  jakaś para wierzchołków postaci  $(v, 0)$ ,  $(v, 1)$  należy do tej samej spójnej składowej. Nie trzeba wielkiego zacięcia algorytmicznego, by uwierzyć, że sprawdzenie tak sformułowanego warunku nie może już być trudne. Faktycznie, do podziału grafu na spójne składowe można zastosować praktycznie dowolny algorytm przeszukiwania grafu, a najwygodniej – przeszukiwanie w głąb. Ostateczne kryterium stwierdzające możliwość ucieczki statku okazało się zatem niezbyt skomplikowane i, co ciekawe, niespecjalnie związane z geometrią.

# Efekty relatywistyczne w zasięgu ręki?

Piotr ZALEWSKI

Prędkość  $c$ , nazywana prędkością światła, jest równa 299 792 458 m/s. Dokładnie, bo metr jest zdefiniowany za jej pomocą i z wykorzystaniem wzorca sekundy. To, w porównaniu z prędkościami, których doświadczamy, bardzo, bardzo dużo. Na przykład samolot myśliwski o długości 10 metrów, lecący z prędkością  $u = 3$  km/s, skróci się lorentzowsko przez czynnik  $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ , czyli o pięć angstromów, a więc długość odpowiadającą pojedynczej cząsteczce paliwa lotniczego.

Jak widać, mierzalne efekty relatywistyczne wydają się dla zwykłego śmiertelnika nieobserwowalne.

A jednak, podobnie jak monsieur Jourdain nie zdawał sobie sprawy, że mówi prozą, tak my możemy nie wiedzieć, że efekty relatywistyczne własnoręcznie wielokrotnie badaliśmy.

Zacznijmy od eksperymentu myślowego. Wyobraźmy sobie dwa bardzo długie, położone bardzo blisko siebie i bardzo wąskie taśmociągi, poruszające się przeciwbieżnie z prędkościami  $v$  i  $-v$ . Na taśmociągach umocowane są, w jednakowych odstępach  $l$ , ładunki  $+q$  na tym poruszającym się w prawo oraz  $-q$  na tym poruszającym się w lewo. Liniowa gęstość ładunku taśmociągów wynosi więc  $\sigma_+ = +q/l = +\sigma$  oraz  $\sigma_- = -q/l = -\sigma$ . Z odpowiednio dużej odległości  $r$  taśmociągi są równoważne prądowi o sumarycznej gęstości liniowej

$$j_\Sigma = j_+ + j_- = v\sigma_+ - v\sigma_- = 2v\sigma.$$

Następnie umieścimy, w odległości  $r$  od tak skonstruowanego „przewodnika” z prądem, spoczywający ( $v_p = 0$ ) ładunek próbny  $+q$ . Na ładunek ten nie będzie działać żadna siła ze strony „przewodnika”, bo sumaryczna liniowa gęstość ładunku jest, z konstrukcji, zerowa.

A teraz spójrzmy na tę sytuację z układu, który porusza się w prawo z prędkością  $u = v$ . W układzie tym dodatnio naładowany taśmociąg spoczywa. Ponieważ prędkości taśmociągów są niewielkie, to spróbujmy opisać tę sytuację za pomocą transformacji Galileusza. Zgodnie z nią prędkości po prostu się dodają. Wtedy ujemnie naładowany taśmociąg porusza się z prędkością  $v_-^* = v_- - u = -2v$ , a więc sumaryczna gęstość prądu wynosi tyle samo co poprzednio (natężenie prądu nienaładowanego przewodnika jest niezmiennikiem transformacji Galileusza):

$$j_\Sigma^* = j_+^* + j_-^* = 0 - 2v(-\sigma) = j_\Sigma.$$

Gęstość ładunku również nie ulega zmianie, bo transformacja Galileusza na nią nie wpływa.

Ponieważ jednak ładunek próbny porusza się obecnie z prędkością  $v_p^* = -v$ , więc okazuje się, że działa na niego siła (odpychająca, tak jak między przewodnikami o przeciwnych kierunkach prądu):

$$F_M^* = +q(-v)B = +q(-v)\frac{\mu_0 j_\Sigma^*}{2\pi r}.$$

Nie jest dobrze. Rozpatrywane układy są inercjalne. Jeśli w jednym nie działa siła, to (w zgodzie z doświadczeniem) w drugim także działać nie może.

Spróbujmy temu zaradzić za pomocą transformacji Lorentza. Zgodnie z nią prędkości dodają się trochę inaczej. Jeżeli układ primowany porusza się względem nieprimowanego z prędkością  $u$ , to (równoległa do  $u$  i skierowana w tę samą stronę) prędkość  $w$  w układzie nieprimowanym przejdzie na

$$w' = \frac{w - u}{1 - \frac{wu}{c^2}}.$$

Oprócz tego poruszające się (względem jakiegoś układu inercjalnego) z prędkością  $w$  ciała ulegają skróceniu (w tym układzie) o czynnik

$$\frac{1}{\gamma_w} = \sqrt{1 - (w/c)^2}$$

Z symetrii wynika, że indukcja pola magnetycznego musi być skierowana stycznie do okręgów, dla których przewodnik jest osią symetrii, a jej wartość, pomnożona przez obwód takiego okręgu, powinna odpowiadać prądowi, który przepływa (na wskroś) przez powierzchnię koła (prawo Ampère'a). Stąd

$$B = \frac{\mu_0 j}{2\pi r},$$

gdzie  $r$  jest promieniem okręgu, a  $j$ , jako gęstość liniowa, jest równe natężeniu prądu.



### Rozwiązanie zadania M 1358.

Odpowiedź: Oto przykład, w którym taki podzbiór nie istnieje.

Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{F} = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots\},$$

gdzie, dla  $n \geq 1$ ,

$$A_n = \{1, 3, \dots, 2n-1\} \cup \{2n\},$$

$$B_n = \{2, 4, \dots, 2n\} \cup \{2n+1\}.$$

Oczywiście, pary zbiorów  $A_k, A_l$ , jak również  $B_k, B_l$  mają wspólny element. Zbiory  $A_k$  i  $B_l$  też mają wspólny element – gdy  $k \leq l$ , jest nim  $2k$ , w przeciwnym przypadku jest nim  $2l+1$ . Skoro  $A_n \cap B_n = \{2n\}$ , zbiór  $S$  musiałby zawierać wszystkie liczby parzyste, byłby więc nieskończony.

Natężenie pola elektrycznego obliczamy ponownie, wykorzystując symetrię układu. Rozpatrzmy walec o promieniu  $r$  i długości  $d$ , którego osią symetrii jest „przewodnik”. Z prawa Gaussa wynika, że natężenie radialnie rozchodzącego się pola elektrycznego, w odległości  $r$  od przewodnika, pomnożone przez powierzchnię boczną walca  $2\pi r d$ , jest proporcjonalne do ładunku  $\sigma d$  wewnątrz walca. W ten sposób otrzymujemy

$$E = \frac{\sigma \cdot d}{\epsilon_0 2\pi r \cdot d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 2\pi r},$$

czyli postać analogiczną do wzoru na indukcję pola magnetycznego dla opisywanej sytuacji.

wzdłuż kierunku ruchu, co w naszym przypadku powoduje wzrost gęstości liniowej ładunku o czynnik  $\gamma_w$  (bo skracający się odstęp  $l$  jest w mianowniku).

Teraz należy uważać (ale tylko przez chwilę). Jeżeli popatrzymy na taśmociąg z układu, w którym taśmociąg spoczywa, to zmierzmy gęstość ładunku  $\pm\sigma_0$ , która z gęstością ładunku  $\sigma_{\pm}$  w układzie początkowym (tym opisanym na początku) jest związana warunkiem  $\sigma_{\pm} = \gamma_{\pm v}(\pm\sigma_0) = \gamma_v(\pm\sigma_0)$ , natomiast gęstość prądu warunkiem  $j_{\pm} = \pm v\sigma_{\pm} = \pm v\gamma_v(\pm\sigma_0) = v\gamma_v\sigma_0$ . Oczywiście, musi to być prawda dla dowolnej prędkości  $w$  poruszania się danego taśmociągu (tu dla dodatnio naładowanego):

$$\begin{aligned}\sigma_w &= \gamma_w\sigma_0, \\ j_w &= w\gamma_w\sigma_0.\end{aligned}$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić następujące równości:

$$\begin{aligned}\gamma_{w'} &= \gamma_w\gamma_u\left(1 - \frac{wu}{c^2}\right), \\ \gamma_{w'}w' &= \gamma_w\gamma_u(w - u).\end{aligned}$$

Łatwo wtedy wykazać (podstawiając i porządkując), że pod wpływem opisanych wyżej transformacji z układu początkowego do układu poruszającego się z względną prędkością  $u$  (układu primowanego), kombinacja  $(\sigma, j)$  przekształca się analogicznie do kombinacji czasu i położenia  $(t, x)$ .

$$\begin{aligned}\sigma' &= \gamma\left(\sigma - \frac{u}{c} \cdot \frac{j}{c}\right), \\ j' &= \gamma(j - u \cdot \sigma).\end{aligned}$$

Dzięki temu możemy dokładną analizę zaaranżowanej sytuacji pozostawić Czytelnikowi i po prostu (znając  $j_{\Sigma}$  oraz  $\sigma_{\Sigma} = 0$ ) obliczyć sumaryczną gęstość (liniową) ładunku oraz sumaryczną gęstość (liniową) prądu w układzie primowanym:

$$\begin{aligned}\sigma'_{\Sigma} &= \gamma_u\left(\sigma_{\Sigma} - \frac{u}{c} \cdot \frac{j_{\Sigma}}{c}\right) = \gamma_u \cdot \frac{-u}{c} \cdot \frac{j_{\Sigma}}{c}, \\ j'_{\Sigma} &= \gamma_u(j_{\Sigma} - u \cdot \sigma_{\Sigma}) = \gamma_u \cdot j_{\Sigma},\end{aligned}$$

co daje następujące wartości siły elektrycznej  $F'_E$  (przyciągającej dla  $u = v$ , bo  $\sigma'$  jest wtedy ujemne) oraz siły magnetycznej  $F'_M$  (odpychającej, jak poprzednio):

$$\begin{aligned}F'_E &= q' \cdot E' = q' \cdot \frac{\sigma'_{\Sigma}}{\epsilon_0 2\pi r} = \kappa \cdot \epsilon_0^{-1} c^{-2}, \\ F'_M &= -u \cdot q' \cdot B' = -u \cdot q' \cdot \frac{\mu_0 j'_{\Sigma}}{2\pi r} = \kappa \cdot \mu_0,\end{aligned}$$

gdzie  $\kappa = -uq' \cdot \gamma_u j_{\Sigma} / (2\pi r)$ , a  $q'$  jest wartością ładunku próbnego w układzie primowanym (nie musimy wnikać w to, jaka jest jego wartość). Siły te się znoszą, o ile  $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ . To, dla wychowanych na układzie SI, nie musi być oczywiste, ale przecież przenikalności dielektryczna  $\epsilon_0$  i magnetyczna  $\mu_0$  próżni to tylko przeliczniki jednostek właśnie przez tę relację zdefiniowane!

Uzmysławiamy sobie w ten sposób, że elektromagnetyzm klasyczny jest teorią relatywistyczną. Wszelkie klasyczne efekty magnetyczne można wyjaśnić za pomocą szczególnej teorii względności. Paradoksalnie jednak, takie proste rozważania sprawdzają się tylko dla niewielkich prędkości (dopóki można nie uwzględniać efektów związanych ze skończoną prędkością światła).

Efekty magnetyczne są mierzalne, bo oddziaływanie elektromagnetyczne jest dużo silniejsze niż grawitacyjne, które determinuje naszą codzienną wrażliwość, oraz dlatego, że dość łatwo zaaranżować sytuację, w której ładunki się poruszają, ale są zbilansowane.

W każdym razie, ilekroć przyczepiamy magnesikiem przypominającą do lodówki, tylekroć doświadczalnie potwierdzamy szczególną teorię względności.



# Eubulides, Richard, Gödel

Wiktor BARTOL



Gdy w połowie XIX wieku odkryto geometrie nieeuklidesowe, zainteresowanie matematyków zaczęło zwracać się w stronę podstaw matematyki. Na jakich podstawach można lub należy oprzeć matematykę? Na tym tle zrodził się w latach 20. XX wieku tzw. program Hilberta, postulujący zbudowanie sformalizowanej matematyki na fundamencie aksjomatycznym i wyprowadzanie z aksjomatów twierdzeń jedynie za pomocą ściśle określonych reguł. Tak zbudowana teoria powinna być zupełna i niesprzeczna i te jej własności powinny dać się udowodnić.

Teoria formalna jest zupełna, gdy każde zdanie prawdziwe w dowolnym jej modelu jest jej twierdzeniem, a więc istnieje dla niego dowód wychodzący od aksjomatów. Równoważnie, gdy dla każdego zdania  $Z$  jest tak, że albo  $Z$ , albo negacja  $Z$  jest w tej teorii. Z kolei teoria jest niesprzeczna, gdy istnieje co najmniej jedno zdanie w jej języku, które jej twierdzeniem nie jest. Mówiąc inaczej, niesprzeczność oznacza, że nie istnieje takie zdanie  $Z$ , że i  $Z$ , i negacja  $Z$  są twierdzeniami teorii.

Próbie takiej konstrukcji matematyki podjęli Brytyjczycy: Bertrand Russell i Alfred North Whitehead w publikowanym w latach 1910–1913 (choć niedokończonym) dziele *Principia Mathematica*. Kilkanaście lat później, w 1931 roku, ukazała się praca Kurta Friedricha Gödla *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (O formalnie nierozstrzygalnych zdaniach *Principia Mathematica* i podobnych systemów). Gödel wykazał w niej, że program Hilberta nie może zostać zrealizowany: dla każdej niesprzecznej teorii matematycznej, zawierającej arytmetykę, istnieje zdanie  $G$ , takie że ani  $G$ , ani negacja  $G$  nie jest twierdzeniem tej teorii. Innymi słowy, jeśli teoria jest niesprzeczna, to nie jest zupełna.

**Dwa inspirujące paradoksy.** Czytelnik zapewne zetknął się ze słynnym *paradoksem kłamcy*, sformułowanym mniej więcej 2400 lat temu przez Eubulidesa: czy zdanie „To zdanie, które teraz wypowiadam, jest fałszywe” jest prawdziwe czy fałszywe? Każda próba analizy prowadzi do nieuchronnego wniosku, że prawdziwość tego zdania jest równoważna jego fałszywości.

Wiele lat później, w 1905 roku, francuski matematyk Jules Richard sformułował inny paradoks. Wyobraźmy sobie, że dysponujemy listą wszystkich własności arytmetycznych liczb naturalnych, zapisanych w ustalonym języku naturalnym. Każdy opis własności jest skończonym ciągiem symboli ze skończonego alfabetu, zatem mamy tych własności przeliczalnie wiele, co oznacza, że możemy je ponumerować liczbami naturalnymi. W ten sposób podzieliliśmy liczby naturalne na dwie kategorie. Pierwszą niech stanowią te liczby, które mają tę własność, której są numerem. Na przykład, gdyby własność bycia liczbą parzystą miała numer 12, to 12 byłoby liczbą pierwszej kategorii, gdyż jest parzysta. Drugą kategorię niech stanowią liczby, które nie mają własności, której są numerem. Na przykład, gdyby własność bycia liczbą parzystą miała numer 5, to 5 byłoby liczbą drugiej kategorii – i te liczby nazwijmy liczbami Richarda. Bycie liczbą Richarda jest pewną własnością liczb naturalnych, został jej więc przypisany pewien numer, powiedzmy,  $k$ . Czy  $k$  jest liczbą Richarda? Odpowiedź „tak” implikuje, że  $k$  nie jest liczbą Richarda, podobnie jak odpowiedź „nie” implikuje, że nią jest. Tak więc  $k$  jest liczbą Richarda wtedy i tylko wtedy, gdy nią nie jest.

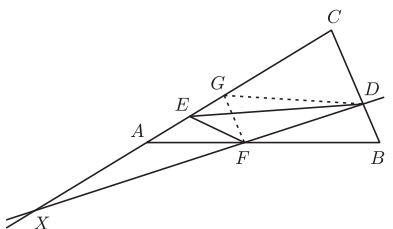
Paradoks jest zazwyczaj objawem jakiejś luki – nieprecyzyjnej definicji lub nieuprawnionej konstrukcji. Paradoks kłamcy dowodzi konieczności rozróżniania poziomów języka; samo zdanie i zdanie, które o nim mówi, są tym samym, są na tym samym poziomie. Takie zdanie, odnoszące się do siebie, nazywa się *autoreferencyjnym* (*samoorzekającym*).



**Rozwiązanie zadania F 818.** Spławik pozostanie w spoczynku, ale ciężarek zacznie drgać, bo w zmienionej sytuacji znajdzie się poza położeniem równowagi (zacznie poruszać się w górę względem wiadra).



**Rozwiązanie zadania M 1357.**  
 Niech  $G$  będzie takim punktem na boku  $AC$ , że  $\frac{CG}{GA} = \frac{BF}{FA}$ . Skoro  $\frac{BF}{FA} \leq \frac{CE}{EA}$ , to punkt  $E$  leży na odcinku  $AG$ .



Wobec  $\frac{BD}{DC} \leq \frac{BF}{FA}$  prosta  $DF$  jest równoległa do prostej  $AC$  lub przecina ją w punkcie  $X$  leżącym od strony punktu  $A$  na zewnątrz odcinka  $AC$ . Zatem

$$[DEF] \leq [DGF],$$

tzn. możemy przepchnąć punkt  $E$  do gorszego przypadku – punktu  $G$ . Ponieważ pole trójkąta  $DGF$  nie zależy od położenia punktu  $D$  na odcinku  $BC$ , więc mamy

$$\begin{aligned} [DGF] &= [BGF] = \frac{BF}{FA} [AGF] = \\ &= \frac{BF}{FA} \left( \frac{AF}{AB} \right)^2 [ABC]. \end{aligned}$$

Niech  $t = \frac{AF}{AB} \leq 1$ . Wówczas

$$\frac{BF}{FA} = \frac{1-t}{t}$$

i mamy

$$\begin{aligned} [DEF] &\leq \frac{1-t}{t} t^2 [ABC] = \\ &= t(1-t)[ABC] \leq \frac{1}{4} [ABC]. \end{aligned}$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $t = \frac{1}{2}$  i  $[DEF] = [DGF]$ . Ale  $[DEF] = [DGF]$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $DF \parallel AC$  lub  $E = G$ . Zatem równość w tezie zadania zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt  $F$  oraz punkt  $D$  lub  $E$  są środkami odpowiednich boków trójkąta  $ABC$ .

Pozostawiając na boku kwestię źródeł sprzeczności, odnotujmy, że w obu przypadkach mamy do czynienia ze zdaniem, które w ten czy inny sposób odnosi się samo do siebie. Co więcej, można byłoby zauważyć, że żadnego z nich nie da się ani udowodnić, ani obalić. Zauważmy jednak, że w przypadku paradoksu kłamcy mamy do czynienia z pojęciami prawdziwości i fałszywości niemieszczącymi się w żadnej teorii formalnej, w przypadku zaś paradoksu Richarda – z własnością, która zależy od kolejności, w jakiej numerujemy własności liczb naturalnych, a ta nie jest przecież własnością arytmetyczną, wyrażalną w jakiejkolwiek teorii formalnej.

**Paradoksy wykorzystane.** Gödel powołuje się w swojej pracy na inspiracje zaczerpnięte z powyższych paradoksów. Zasadnicza koncepcja dowodu polegała na zamianie „prawdziwości” i „fałszywości” na „dowodliwość” i „niedowodliwość”. Jak takie pojęcia, ściśle związane z danym systemem formalnym (w tym ze zbiorem aksjomatów, reguł wnioskowania), wyrazić w arytmetyce? Tu Gödel wpadł na pomysł, nazwany później *numeracją Gödla*: każdemu symbolowi (7-elementowego) alfabetu przypisał liczbę nieparzystą od 1 do 13, zmiennym reprezentującym obiekty – liczby pierwsze, poczynając od 17: zmiennej  $x$  liczbę 17, zmiennej  $y$  liczbę 19 itd. (Zmienne wyższych rzędów reprezentowane były przez potęgi liczb pierwszych). W ten sposób każdy symbol alfabetu i każda zmienna miały swój unikalny numer. Formuła jest skończonym ciągiem takich symboli. Jeśli numerami symboli kolejno występujących w formule są  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , to formule przyporządkowuje się numer  $2^{n_1} 3^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ , gdzie  $p_k$  oznacza  $k$ -tą liczbę pierwszą. Podobnie przypisuje się numer każdemu ciągowi formuł (a więc np. dowodom): jeśli numerami formuł są, kolejno,  $m_1, m_2, \dots, m_s$ , to numerem ciągu jest  $2^{m_1} 3^{m_2} \dots p_s^{m_s}$ . Nietrudno zauważyć, że w ten sposób każdy symbol alfabetu, każda zmienna, formuła czy ciąg formuł ma jednoznacznie przypisany numer.

Teraz należy własności systemu formalnego przetłumaczyć na język arytmetyki. Opisanie tego procesu wykracza poza możliwości tego artykułu, odnotujmy jednak dwie formuły arytmetyczne, istotne dla konstrukcji dowodu twierdzenia Gödla. Pierwsza to formuła  $Bew(x, y)$ , oznaczająca, że  $x$  jest numerem dowodu formuły o numerze  $y$ ; druga to formuła  $Sb(x, v, Z(y))$ , reprezentująca, mówiąc w uproszczeniu, formułę powstałą przez zastąpienie w formule  $x$  zmiennej  $v$  przez  $y$ . Na przykład, formuła  $\forall x \neg Bew(x, y)$  mówi, że żadna liczba nie jest numerem dowodu formuły o numerze  $y$ , czyli – innymi słowy – formuła o numerze  $y$  nie ma dowodu. Niech teraz  $n$  będzie numerem następującej formuły, w której dokonano pewnego podstawienia:

$$\forall x \neg Bew(x, Sb(y, 19, Z(y))).$$

Przyjrzyjmy się formule (i to ona właśnie będzie zdaniem  $G$ )

$$\forall x \neg Bew(x, Sb(n, 19, Z(n))).$$

$Sb(n, 19, Z(n))$  jest numerem formuły otrzymanej przez zastąpienie w formule o numerze  $n$  zmiennej o numerze 19 (czyli  $y$ ) przez  $n$ . Ale to jest właśnie formuła  $G$ ! Mówi zatem formuła  $G$  o tym, że formuła  $G$  nie ma dowodu! Jak wykazuje Gödel, nie ma dowodu także jej negacja. System nie jest zupełny (przypomnijmy, jeśli jest niesprzeczny).

Tak Gödel wykorzystał twórczo oba przedstawione wyżej paradoksy. Dla pełności obrazu warto jeszcze dodać, że posługując się formułą  $G$ , udowodnił on także, że jeśli system jest niesprzeczny, to w ramach tego systemu nie można tej niesprzeczności udowodnić. Można to zrobić w systemie obszerniejszym – pod warunkiem, że jest on niesprzeczny. Żyjemy zatem w świecie niesprzeczności warunkowej... Paradoks?

# Nieemożliwy skrót

Damian NIWIŃSKI\*

Ten list uczyniłem dłuższym tylko dlatego, że nie miałem dość czasu, by napisać go krócej. Usprawiedliwienie, jakie Blaise Pascal wkłada w swój XVI *List prowincjalny*, wyraża intuicję, iż zapisanie jakiejś myśli zwięźle może być bardziej czasochłonne niż zapisanie jej rozwlekle. Umiejętność skrótu bywa przejawem geniuszu. Tadeusz Boy-Żeleński odnotowuje następujący przykład sztuki translatorskiej Stanisława Wyspiańskiego. Pierwsze zdanie tragedii Pierre'a Corneille'a *Cyd* brzmiałoby w dosłownym przekładzie z francuskiego na polski:

*Elwiro, czy zupełnie szczerze powtórzyłaś mi wszystko?  
Czy nie ukrywasz nic z tego, co powiedział ojciec?*

W przekładzie Wyspiańskiego fragment ten brzmi

*Więc mówił...?*

Zostawiamy tymczasem poezję, by przyjrzeć się zagadnieniu skrótu w dziedzinie matematyki. Na przykład, jakie jest najkrótsze przedstawienie danej liczby naturalnej? Pytanie nie jest całkiem precyzyjne (co to jest przedstawienie?), ale ma pewien potencjał sensu. Jasne jest w szczególności, że odpowiedź zależy od własności danej liczby bardziej niż od jej rozmiaru. Na przykład, wypisanie cyfr dziesiętnego rozwinięcia liczby

$$N = 10^{10^{10}}$$

przekroczyłyby ramy tego artykułu, a nawet zapewne wszystkich numerów *Delty* (dla porównania: liczbę atomów we Wszechświecie szacuje się „jedynie” przez  $3^{200}$ ), ale przecież przedstawiliśmy ją powyżej jednoznacznie. W konsekwencji niedługie przedstawienie będzie miała też na pozór bardziej skomplikowana liczba

$$\underbrace{3141592653589793238462643383279\dots\dots\dots}_{N+1}$$

utworzona przez  $N + 1$  początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby  $\pi$ , którą możemy zapisać w postaci  $\lfloor \pi \cdot 10^N \rfloor$ . Czytelnik zauważy oczywiście, że odwołujemy się tutaj do pewnych „kodów kulturowych” (notacja potęgowania, definicja liczby  $\pi$ ). O tym, że droga ta może być ryzykowna, świadczy tzw. *paradoks Berry'ego* podany przez Bertranda Russella (G.G. Berry, któremu Russell przypisał autorstwo tego paradoksu, był bibliotekarzem w oksfordzkiej *Bodleian Library*):

*najmniejsza liczba naturalna n, której nie da się opisać w języku polskim przez mniej niż 1000 symboli*

*właśnie została tak opisana!*

Aby uniknąć paradoksu, spójrzmy na możliwe przedstawienie liczb naturalnych globalnie, jak na funkcję  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A^*$ , gdzie  $A^*$  jest zbiorem wszystkich słów, jakie można utworzyć z liter pewnego skończonego alfabetu  $A$ . Dla jednoznaczności potrzeba, by funkcja  $\alpha$  była różnowartościowa. Interesować nas będzie długość  $|\alpha(n)|$  słowa  $\alpha(n)$ . Mamy, na przykład, standardowe przedstawienia liczb w  $k$ -arnym systemie pozycyjnym (np. binarnym lub dziesiętnym),  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, k - 1\}^*$ ,

gdzie  $|\alpha(n)| = \lfloor \log_k n \rfloor + 1$ . Mogłoby się wydawać, że w każdej liczbie dopatrzymy się jakiejś „regularności” (czyż nie uruchamiamy inwencji, by zapamiętać kod PIN?), która pozwoli zapisać ją istotnie krócej. Jednak prosty rachunek wykaże pewną barierę.

**Lemat o nieskracalności.** *Dla dowolnej różnowartościowej funkcji  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A^*$  istnieje nieskończenie wiele  $n \in \mathbb{N}$ , dla których  $|\alpha(n)| \geq \lfloor \log_r n \rfloor$ , gdzie  $r$  jest liczbą elementów zbioru  $A$ .*

**Dowód.** Zauważmy najpierw, że słów krótszych niż  $k$  jest

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1} = \frac{r^k - 1}{r - 1} < r^k.$$

Przyjmując  $k = \lfloor \log_r m \rfloor$ , widzimy, że dla każdego  $m$  musi istnieć pewna liczba  $hard(m) < m$ , dla której

$$|\alpha(hard(m))| \geq \lfloor \log_r m \rfloor.$$

Wybermy najpierw  $m$ , dla którego  $\lfloor \log_r m \rfloor > |\alpha(0)|$ . Wtedy

$$|\alpha(hard(m))| \geq \lfloor \log_r m \rfloor \geq \lfloor \log_r hard(m) \rfloor$$

(ostatnia nierówność z nieostrej monotoniczności funkcji  $\lfloor \log_r x \rfloor$ ). Połóżmy  $m_0 = hard(m)$ .

Przypuśćmy teraz, że wybraliśmy już  $\ell$  różnych liczb  $m_0, m_1, \dots, m_{\ell-1}$ , z których każda spełnia  $|\alpha(m_i)| \geq \lfloor \log_r m_i \rfloor$ . Wybierzmy  $m$  tak, by

$$(*) \quad \lfloor \log_r m \rfloor > \max(|\alpha(m_0)|, \dots, |\alpha(m_{\ell-1})|).$$

Ponownie, dla pewnego  $hard(m) < m$  mamy  $|\alpha(hard(m))| \geq \lfloor \log_r m \rfloor \geq \lfloor \log_r hard(m) \rfloor$ . Z nierówności (\*) mamy  $hard(m) \notin \{m_0, m_1, \dots, m_{\ell-1}\}$ . Kładziemy więc  $m_\ell = hard(m)$ .

Utworzony w ten sposób ciąg  $m_0, m_1, \dots$  potwierdza tezę Lematu.  $\square$

Pozwolimy sobie teraz na dygresję i pokażemy, że Lemat o nieskracalności dostarcza jednego z wielu możliwych argumentów na

**Twierdzenie (Euklides).** *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

**Dowód.** Przypuśćmy, że przeciwnie – pierwsze są jedynie liczby  $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$ . A zatem każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci

$$n = p_0^{a_{n,0}} \cdot p_1^{a_{n,1}} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{a_{n,k-1}},$$

dla pewnych  $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,k-1} \in \mathbb{N}$ . To pozwala nam określić przedstawienie  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}^*$

$$\alpha(n) = bin(a_{n,0}) 2 bin(a_{n,1}) 2 \dots 2 bin(a_{n,k-1}),$$

gdzie  $bin(x)$  oznacza binarne przedstawienie liczby  $x$ . Mamy  $|bin(x)| \leq \lfloor \log_2 x \rfloor + 1$ , a z drugiej strony  $a_{n,i} \leq \log_2 n$ , bo  $p_i \geq 2$ . A zatem przedstawienie  $\alpha$  spełnia

$$|\alpha(n)| \leq k \cdot (\lfloor \log_2 \log_2 n \rfloor + 2).$$

Z Lematu wynika, że dla nieskończenie wielu  $n$

$$k \cdot (\lfloor \log_2 \log_2 n \rfloor + 2) \geq \lfloor \log_3 n \rfloor,$$

co jest, oczywiście, nie do pogodzenia z asymptotycznym zachowaniem występujących tu funkcji. A więc hipoteza skończoności zbioru liczb pierwszych była błędna.  $\square$

\*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Powróćmy do postawionego na wstępie pytania o najkrótszy opis liczby  $n$ . Widzieliśmy już, że każde przedstawienie ma przykłady trudno skracalne, a z drugiej strony drastyczny skrót jest czasem możliwy. Zauważmy jednak, że rozważanie dowolnej funkcji różnowartościowej  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A^*$  jest nieco za ogólne, oczekujemy przecież, by z przedstawienia  $\alpha(n)$  dało się odtworzyć  $n$ . Ścisłej mówiąc, interesują nas przedstawienia  $\alpha$  dane razem z *algorytmem*, który na podstawie  $\alpha(n)$  oblicza  $n$  w jakimś zrozumiałym dla nas przedstawieniu (np. dziesiętnym). W pewnym sensie  $\alpha(n)$  stanowi więc *program*, jaki może posłużyć do obliczenia  $n$ .

Idąc tym tropem, ustalmy sobie jakiś język programowania (np. Pascal lub C). Zachęcamy Czytelnika, by dla rozgrzewki napisał w swoim ulubionym języku program generujący wspomnianą wyżej liczbę  $\lfloor \pi \cdot 10^N \rfloor$ . (Nie radzimy go jednak uruchamiać. . .)

Ogólnie, dla dowolnej liczby  $n$ , niech  $P_n$  będzie programem o *najmniejszej* długości, który bez żadnych dodatkowych danych generuje liczbę  $n$ ; jeśli takich programów jest więcej, wybieramy pierwszy w porządku leksykograficznym. Funkcja  $\alpha : n \mapsto P_n$  zależy wprawdzie od wyboru języka programowania, jednak z ogólnej teorii obliczalności wynika, że długości programów wskazywanych przez funkcje dla sensownych języków różnią się co najwyżej o stałą (zależną od tych języków, ale nie od  $n$ ).

Powyższe przedstawienie liczb naturalnych wprowadził Andriej N. Kołmogorow w badaniach nad losowością (Kołmogorow użył jako języka programowania abstrakcyjnego formalizmu maszyn Turinga). Z Lematu o nieskracalności wynika bowiem, że dla nieskończenie wielu  $n$  jest

$$|P_n| \geq \lfloor \log_r n \rfloor,$$

gdzie  $r$  jest rozmiarem alfabetu, jakiego używamy w naszym języku programowania. Można z grubsza powiedzieć, że dla takich liczb optymalnym (lub prawie optymalnym) rozwiązaniem jest banalny program w rodzaju *write(n)*. Liczby te są „nieskracalne” z powodu braku jakiegokolwiek regularności, a więc *losowe*. Funkcja  $n \mapsto |P_n|$ , zaproponowana przez Kołmogorowa jako miara *losowości*, jest dziś powszechnie nazywana *złożonością Kołmogorowa*.

Subtelniejsza analiza dowodu Lematu pokazuje, że liczby trudno skracalne dominują pod względem gęstości. Paradoks polega na tym, że trudno jest wygenerować konkretne przykłady właśnie ze względu na losowy charakter tych liczb.

Złożoność Kołmogorowa rozwiązuje w pewnym sensie problem najkrótszego opisu, ma jednak pewną wadę, która ogranicza jej praktyczne zastosowanie. W pewnym sensie „dopada” nas tu paradoks Berry’ego.

**Twierdzenie (Kołmogorow).** *Funkcja  $n \mapsto P_n$  jest nieobliczalna, tzn. nie da się jej obliczyć żadnym algorytmem.*

**Szkic dowodu.** Zakładając, że mamy taki algorytm, możemy dalej skonstruować algorytm, który dla danego  $n$  znajduje najmniejsze  $M$ , takie że  $|P_M| \geq n$ ; nazwijmy je  $M_n$ .

Niech  $P$  będzie programem (z jedną zmienną wolną), który realizuje ten algorytm. Jeśli teraz ustalimy liczbę  $n$  i podstawimy ją w programie  $P$  za zmienną wolną, otrzymamy program (powiedzmy)  $Q_n$ , generujący liczbę  $M_n$ . Oszacujmy jego długość. Zakładając, że  $n$  jest dane w postaci binarnej, otrzymujemy

$$|Q_n| \leq (\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) + |P| + \Delta,$$

gdzie stała  $\Delta$  jest odpowiedzialna za podstawienie wartości liczbowej za zmienną. (W tym miejscu odwołujemy się do składni języka programowania.) Dla dostatecznie dużych  $n$  prawa strona tej nierówności jest ostro mniejsza od  $n$ , co daje nam nierówność  $|Q_n| < n$ . Ale założyliśmy przecież, że liczby  $M_n$  nie da się wygenerować programem krótszym od  $n$ . Otrzymana sprzeczność dowodzi nieobliczalności funkcji  $n \mapsto P_n$ .  $\square$

**Uwaga.** Czytelnik rozpoznał zapewne w powyższym rozumowaniu schemat paradoksu Berry’ego:  $M_n$  jest najmniejszą liczbą, której nie da się wygenerować programem krótszym od  $n$ . Ta liczba rzeczywiście istnieje, nie da się jej jednak obliczyć z  $n$ .

Podobne rozumowanie prowadzi do alternatywnego dowodu Twierdzenia Gödla o niezupełności, któremu poświęcony jest artykuł Wiktora Bartola *Eubulides, Richard, Gödel* (w tym samym numerze). Spozstrzegł to Gregory Chaitin, który w tym samym czasie miał podobne idee co Kołmogorow (z tym że Kołmogorow był wtedy – w latach sześćdziesiątych XX wieku – u szczytu swojej długiej kariery, a Chaitin był jeszcze uczniem college’u). Założenia o sile wyrazu teorii są tu trochę inne, ale równie łatwe do uzyskania z prostych arytmetycznych aksjomatów.

Zakładamy mianowicie, że istnieje formuła  $Kol(m, n)$  reprezentująca relację  $|P_m| \leq n$ , tzn. w teorii  $T$  dowodzi się  $Kol(m, n)$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $|P_m| \leq n$ .

**Twierdzenie (Gödel–Chaitin).** *Jeśli teoria  $T$  spełnia powyższe założenie i jest niesprzeczna, to istnieje zdanie  $\varphi$ , takie że ani  $\varphi$ , ani  $\neg\varphi$  nie są twierdzeniami  $T$ .*

**Szkic dowodu.** Przypuśćmy, że nie ma takiego zdania, więc w szczególności, dla każdej pary liczb  $m, n$ , w teorii  $T$  dowodzi się dokładnie jednej z formuł  $Kol(m, n)$  i  $\neg Kol(m, n)$ . Skoro istnienie w  $T$  dowodu  $Kol(m, n)$  jest równoważne  $|P_m| \leq n$ , to, wobec założonej dychotomii, istnienie w  $T$  dowodu  $\neg Kol(m, n)$  jest równoważne  $|P_m| > n$ . Mając dane  $n$ , możemy więc, przeszukując wszystkie takie dowody, znaleźć najmniejsze  $M$ , takie że  $|P_M| \geq n$ . Podobnie jak poprzednio, nazwijmy je  $M_n$  i niech program  $P$  realizuje algorytm  $x \mapsto M_x$ . Jeśli w programie  $P$  podstawimy za zmienną liczbę  $n$  w postaci binarnej, to analogicznie jak poprzednio, znajdziemy (przy dostatecznie dużym  $n$ ) program  $Q_n$  zaprzeczający definicji  $M_n$ .  $\square$

Inaczej niż w oryginalnym dowodzie Gödla, nie otrzymaliśmy tutaj *explicite* konstrukcji niezależnej formuły  $\varphi$ . Jednak argument – wywodzący się z paradoksu Berry’ego – jest chyba nieco prostszy i bardziej intuicyjny, jako że odwołuje się do tempa wzrostu funkcji w miejsce tajemniczego błędnego koła z paradoksu kłamcy. I tu, i tam widzimy, jak paradoksy, przy odpowiedniej interpretacji, stają się konstruktywnymi argumentami.



# mała delta

## Tajemnica dworu Edensville

W dniu naszego powrotu z Grenoble, gdzie przez dwa tygodnie pomagaliśmy miejscowej policji uporać się z problemem – z pozoru błahym, lecz o jakże przygnębiającym rozwiązaniu – znikających przydrożnych lamp gazowych, w mieszkaniu przy Baker Street 221B oczekiwał niezaniechanego wielkości stos korespondencji. Usiadłem w fotelu i zacząłem przeglądać przesyłki, koperta za kopertą, próbując zgadnąć, którym warto przyjrzeć się najpierw. Uwagę Holmesa natychmiast przykuły dwie jednakowe koperty. Przez chwilę trzymał je w dłoniach, porównując, potem rozerwał, przeczytał szybko i podał mi.

– Co o tym sądzisz, drogi Watsonie?

– Listy napisane na tym samym papierze, ta sama pieczęć... Nawet charakter pisma bardzo podobny. Panowie Evan i Adam Wheathornowie muszą być bliskimi krewnymi... Tak, oczywiście, to bracia, obaj piszą o śmierci ojca... Widzę, że chcą, żebyś pomógł im odnaleźć rodowe klejnoty, do których „nie ma dostępu z powodu nagłej śmierci ojca”, jak pisze Adam. Holmes, – oderwałem wzrok od kartek – to wygląda na jeszcze jedną sprawę spadku wymyślonego przez synów, zawiedzionych stanem majątku po śmierci głowy rodziny. To chyba elementarne?

– Ja bym tak nie powiedział. W liście Evana jest napisane, że zapobiegliwy lord Wheathorn pozostawił klejnoty „w miejscu niewątpliwie uniemożliwiającym kradzież, ale także korzystanie z dziedzictwa”. Spadek niewątpliwie istnieje. To, co mnie zastanawia, to dwa osobne listy i fakt, że każdy z braci pisze wyraźnie, że dziedzictwo należy się właśnie jemu... Wyślij telegram. Jedziemy porannym pociągiem.

Na dworze Edensville powitało nas dwóch bardzo podobnych młodzieńców, autorów listów. Towarzyszył im starszy mężczyzna, spokojny i dystyngowany – pan Elliott, prawnik rodziny Wheathornów. Przyjechał poprzedniego dnia przedyskutować kwestie zarządzania majątkiem i zdecydował się zostać dłużej, gdy nadeszła wiadomość o naszym przyjeździe. To z jego opowieści dowiedzieliśmy się, z jakim problemem przyjdzie nam się zmierzyć.

Otóż najcenniejszą rzeczą pozostawioną przez zmarłego lorda Wheathorna był klejnot, którego opis pozwolił sobie pominąć jako mało znaczący dla naszej historii, przekazywany z pokolenia na pokolenie najstarszemu synowi. Lord uwielbiał wszelkiego rodzaju zagadki i dlatego zabezpieczył skarb przed kradzieżą, używając dość niekonwencjonalnej metody. Gdyby nie zmarł tak nagle, przekazałby go synowi osobiście. Niestety, po upadku na polowaniu nie odzyskał przytomności... A sam fakt, że do klejnotu nie ma dostępu, wcale nie był najgorszym problemem! Bracia Wheathornowie są bliźniakami. Tylko rodzice wiedzieli, który urodził się pierwszy. Przekazali tę informację synom, ale od nich nie dało się uzyskać sensownej odpowiedzi! Teraz, gdy żadnego z rodziców nie można już było o to zapytać, nikt nie wiedział, który z młodych Wheathornów powinien otrzymać rodowy skarb.

W tym momencie opowieści doszliśmy do pokoju, który służył zmarłemu za pracownię. Wśród licznych szufladek potężnego biurka wyróżniały się trzy nieduże, zdobione, z dziurkami na maleńki kluczyk. Adam wyjął z kieszeni kluczyk, a pan Elliott wyjaśnił, dlaczego do tej pory nie próbowali zbadać zawartości szuflad.

– Lord Wheathorn wiele razy powtarzał, że w dwóch szufladkach zamontował zatrute ostrza, które natychmiast po otwarciu zranią śmiertelnie tego, kto spróbuje zajrzeć do środka. W trzeciej jest klejnot. Napisy na szufladkach mają pomóc wybrać właściwą...

– Ale, niestety, wydają się całkiem bez sensu! – wtrącił Evan.

– Pamiętam jeszcze, że lord Wheathorn mówił, iż co najmniej jeden z tych napisów jest prawdziwy i co najmniej jeden jest fałszywy. – dodał pan Elliott.

Spojrzałem uważnie na wyryte w drewnie słowa (zamieszczam obok szkic) i pomyślałem, że faktycznie stary lord Wheathorn chyba już wcześniej musiał upaść na głowę. Holmes przez chwilę patrzył pustym wzrokiem w ścianę, a potem pewnym ruchem wyciągnął dłoń do jednej z szufladek, przekreślił klucz i wyjął niewielkie zawiniątko. Rodowy skarb był owinięty w karteczkę z napisem, że ma on zostać przekazany, zgodnie z tradycją, pierwotnemu synowi. Obaj bracia wyciągnęli rękę, jakby chcieli wyjąć Holmesowi klejnot z dłoni, ale ten podał go natychmiast prawnikowi, mówiąc:



Klejnotu nie ma w tej szufladce.

Klejnotu nie ma w górnej szufladce.

Klejnot jest w tej szufladce.

Szufladki w biurku lorda Wheathorna.



– Nie tak szybko! Klejnot pozostanie pod opieką pana Eliotta tak długo, aż nie ustalimy, któremu z was ma zostać przekazany.

Wyszliśmy z gabinetu.

– Ależ, Holmes! Przecież oni nigdy nie ujawnią, który urodził się pierwszy. Jak chcesz się tego dowiedzieć? – zapytałem, gdy tylko znaleźliśmy się za drzwiami.

– Nie spiesz się tak, drogi Watsonie. Myślę, że w tym domu są jeszcze rzeczy, których możemy się dowiedzieć.

– Ale skąd wiedziałeś, w której szufladzie jest klejnot?

– Nie teraz. Chodźmy porozmawiać z pozostałymi domownikami.

Istotnie, od starej pokojówki dostaliśmy niezwykle ciekawą informację (jak okazało się później, kluczową dla rozwiązania zagadki):

– Pan Evan i pan Adam nie zawsze mówią prawdę. Gdy mieli po kilka lat, umówili się, że najpierw przez trzy dni z rzędu Evan kłamie, a Adam mówi prawdę, potem przez kolejne trzy dni jest odwrotnie: to Adam kłamie, a Evan mówi prawdę, a w końcu przez jeden dzień obaj kłamią. I tak w kółko. Tylko wszyscy w domu zapomnieli, kiedy to się dokładnie zaczęło. Rodzice pamiętali, ale teraz to już nic nie wiadomo...

Osobiście byłem przekonany, że ta wiadomość nic nam nie da, ale z wyrazu twarzy mojego przyjaciela mogłem sądzić, że ma już pewien pomysł. Przez cały wieczór jednak nie udało mi się wyciągnąć z niego ani słowa na ten temat. A rano przy śniadaniu oznajmił, że wracamy do Londynu. Pan Eliott wyglądał na niemal oburzonego, że zostawiamy go z nierozwiązanym problemem wyznaczenia dziedzica. Bracia spoglądali na Holmesa nieufnie. On jednak poprosił Eliotta o klejnot i zapytał Evana:

– Czy to ty urodziłeś się pierwszy?

– Tak – odpowiedział zapytany.

Holmes zwrócił się do Adama i zadał mu to samo pytanie. Niestety, nie usłyszałem odpowiedzi; zagłuszył ją dźwięk talerza upuszczonego przez lokaja na widok klejnotu w dłoni Holmesa. Ale mój przyjaciel widocznie usłyszał i zrozumiał już wszystko, bo podał klejnot Adamowi, skłonił się lekko i wyszedł. Poszedłem za nim.

– Holmes, co on odpowiedział? I skąd wiedziałeś, że te pytania wystarczą do stwierdzenia, któremu należy się klejnot?

– Nie wiedziałem, ale postanowiłem zaryzykować. Gdyby druga odpowiedź była inna, trzeba by było poczekać trochę dłużej na rozstrzygnięcie tego dylematu. A jaka była druga odpowiedź, to powinieneś wiedzieć. Mówiłem ci już: jesteś dobrym obserwatorem, ale nie wyciągasz wniosków.

\* \* \*

Wieczorem poprosiłem Holmesa, żeby wyjaśnił mi szczegóły rozwiązania, których zupełnie nie mogłem sam zrozumieć.

– Jesteś pewien, że chcesz, żeby ci opowiedział, jak do tego doszedłem? Wtedy, jak zwykle, powiesz, że było to całkiem oczywiste. A więc dobrze. Spójrz najpierw na napisy na szufladkach. Gdyby klejnot był w dolnej szufladzie, to wszystkie trzy informacje byłyby prawdziwe, co jest sprzeczne z założeniem, o którym przypomniał sobie pan Eliott (a nie ma powodu, żeby mu nie wierzyć). A gdyby klejnot leżał w górnej szufladzie, to z kolei wszystkie trzy napisy byłyby fałszywe – to też sprzeczne z założeniem. Zatem nie ma innego wyjścia: środkowa szufladka musi zawierać klejnot. Całkiem logiczne, prawda?

– Tak, to wydaje się takie proste... A jak wyznaczyłeś prawowitego dziedzica?

– Zauważ, że gdyby dziedzicem był jeden z braci kłamię, a drugi mówi prawdę, to dostalibyśmy dwie identyczne odpowiedzi: obaj powiedzieliby „tak” lub „nie”.

– Oczywiście! Wtedy nie mógłbyś nic wywnioskować. A ponieważ wiedziałeś, komu oddać klejnot, to druga odpowiedź musiała być negatywna.

– Tak właśnie było. Zatem dziedzicem jest dzień, kiedy obaj bracia kłamią i wobec tego wiemy, który jest dziedzicem. Mieliszmy jednak dużo szczęścia, że trafiłszy na ten dzień. Inaczej musiałbym prosić pana Eliotta, żeby prowadził dalsze próby aż do skutku, co, być może, zmusiłoby go do przebywania w towarzystwie kłopotliwych panów Weatherhornów przez cały tydzień.



Każdy Czytelnik z pewnością wie, w jakich książkach można przeczytać więcej o przygodach Sherlocka Holmesa. Ale pewnie nie każdy zetknął się z książkami Raymonda Smullyana, który o logice matematycznej – począwszy od zagadek aż po twierdzenie Gödla – pisze równie pięknie i zajmująco, jak Sir Arthur Conan Doyle o słynnym detektywie. Zagadki pojawiające się w tej opowieści autor zaczerpnął z książki pod zastanawiającym tytułem „Jaki jest tytuł tej książki?”, ale polecić uwagę Czytelnika chcielibyśmy także dwie pozycje o zbliżonej tematyce: „Dama czy tygrys” i „Szatan, Cantor i nieskończoność”. Co ciekawe, Smullyan napisał też książkę, w której występuje Sherlock Holmes (niewydaną po polsku), ale są tam tylko zagadki szachowe (niestety – przynajmniej zdaniem niektórych matematyków).

Maria DONTEN-BURY

Małą Deltę przygotował John WATSON

# O paradoksach w astronomii

Michał BEJGER

Ciemność nocnego nieba jest paradoksalna, gdy założymy, że Wszechświat jest *wieczny* i *nie skończony* – patrząc w dowolnym kierunku, powinniśmy wtedy zawsze zobaczyć *jakąś* gwiazdę.

Sprzeczność w paradoksie bliźniąt wynika z błędnego zrozumienia założeń szczególnej teorii względności, tj. niewyróżniania układów odniesienia (bliźniak-podróżnik łamie tę zasadę).

Ciąg główny to pierwsza faza ewolucji gwiazdy, podczas której w jądrze „palony” jest wodór.

Paradoksem w naukach przyrodniczych nazywa się najczęściej zaskakujący wynik hipotezy, która okazuje się nieprawdziwa z powodu zbyt odważnie, a często nieświadomie czynionych założeń. Historia astrofizyki dostarcza wielu znanych przykładów, wśród nich np. paradoks Olbersa (dlaczego nocne niebo jest ciemne?) czy paradoks bliźniąt (czemu jeden z braci po powrocie z podróży relatywistyczną raketą jest młodszy od tego, który został na Ziemi, skoro poruszali się względem siebie z tą samą prędkością?). Poniżej zamieściliśmy kilka innych astronomicznych sprzeczności, podając również wytłumaczenie, gdy jest to możliwe.

## Gwiazdy podwójne typu Algola

Większość gwiazd, które widzimy na nocnym niebie, znajduje się w układach podwójnych. Rozdzielone zaćmieniowe układy podwójne, w których krzywa zmian blasku składa się głównie z niezaćmionego światła obu gwiazd, przerywanego czasami ostrym zaćmieniem, nazywa się układami zaćmieniowymi typu Algola (pierwowzorem tej klasy jest Algol,  $\beta$  Persei, znany jako gwiazda zmienna od XVII w.). Zachowanie się układów podwójnych umożliwia badanie ewolucji gwiazd i tempa zachodzących w nich zmian. Zmiany te zależą np. od początkowej masy gwiazdy (im większa masa na ciągu głównym, tym szybsza ewolucja). Jako że gwiazdy układu powstały w tym samym czasie, mniej masywna gwiazda ewoluowała wolniej niż jej bardziej masywny towarzysz. Bardzo często zdarza się natomiast, że jest odwrotnie – masywna gwiazda znajduje się wciąż na ciągu głównym, podczas gdy mniej masywna jest już na gałęzi olbrzymów, rozpoczynając palenie helu w jądrze. Obserwowana sprzeczność z „regułami sztuki” jest spowodowana *transferem masy* z obecnie mniej masywnej do bardziej masywnej gwiazdy. Gwiazdowy *lifting* sprawia, że oszacowanie tempa ewolucji (a zatem wieku) składników układu „zamienia się” miejscami.

## Paradoks Fermiego

„Gdzie Oni są?”, pytanie zadane w połowie poprzedniego stulecia przez słynnego fizyka Enrico Fermiego jest zwięzłym podsumowaniem dotychczasowego braku sukcesu prób nawiązania kontaktu z pozaziemskimi cywilizacjami (a przynajmniej stwierdzenia, czy w ogóle istnieją). Wciąż aktualne pytanie, zwane również problemem *Silentium Universi*, można zilustrować także za pomocą *równania Drake’a*, które w najprostszej formie liczbę okolicznych cywilizacji szacuje następująco:

$$N = R f_p n_e f_i T,$$

gdzie  $R$  to liczba nowych gwiazd powstających w Galaktyce w ciągu roku,  $f_p$  – procent gwiazd, wokół których powstają planety,  $n_e$  – średnia liczba planet w danym układzie, na których może powstać życie,  $f_i$  – prawdopodobieństwo powstania na umożliwiającej życie planecie inteligentnej i technologicznie zaawansowanej cywilizacji, zdolnej do nawiązania kontaktu,  $T$  – czas, w którym taka cywilizacja wysyła sygnały w Kosmos. Dla  $R = 10$ ,  $f_p = 1/2$ ,  $n_e = 2$ ,  $f_i = 10^{-4}$  oraz  $T = 10^4$  lat Drake otrzymał dość optymistyczne  $N = 10$ . Oczywiście, diabeł tkwi w szczegółach i nie znając niektórych parametrów ( $n_e$ ,  $f_i$ ), nie jesteśmy w stanie udzielić miarodajnej odpowiedzi. Zakładając jednak, że w naszej Galaktyce istnieją obce cywilizacje o tempie rozwoju podobnym do naszego (tzn. takie, które są bądź wkrótce będą zdolne podróżować między gwiazdami z prędkością dużo mniejszą od prędkości światła), wydaje się dziwne, że cała Galaktyka nie została jeszcze skolonizowana – szacowany czas kolonizacji nawet przy „powolnych” metodach transportu wynosi około 50 mln lat, czyli mgnienie oka w gwiazdowej skali czasu. Czy zatem czas życia cywilizacji jest na tyle krótki, że zwykle nie jest ona w stanie wydostać się z macierzystej planety? A może Obcy są tak odmienni od nas, że w ogóle



Wiadomość wysłana w 1974 r. z teleskopu Arecibo w kierunku gromady Herkulesa (M13). Frank Drake zawarł w niej m.in. schemat struktury DNA, układu planetarnego oraz wizerunek człowieka.

Posługując się słowami bohatera książki pt. *Kontakt* Carla Sagana (nb. również twórcy wiadomości z Arecibo), byłoby to okropne marnotrawstwo miejsca.

nie mamy szans nawiązać z nimi kontaktu? Przeciętą galaktyka, podobna do naszej, zawiera około  $10^{11}$  gwiazd; szacuje się, że galaktyk we Wszechświecie jest również około  $10^{11}$ , co daje  $10^{22}$  gwiazd – wydaje się co najmniej podejrzane, iż inteligentne życie, zdolne do stworzenia cywilizacji technicznej, powstało jedynie na Ziemi. Wydaje się jednak, że współczesne misje satelitarne (np. teleskop Kepler), odkrywające coraz bardziej podobne do Ziemi planety, umożliwią w końcu odpowiedź na postawione przez Fermiego pytanie.

## Relatywistyczne dżety

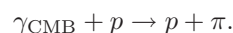
Każda z aktywnych galaktyk (kwazarów, z ang. *quasi-stellar objects*) zawiera w swym jądrze supermasywną czarną dziurę, która akreując okoliczną materię, jest bardzo wydajnym źródłem energetycznego promieniowania. Czarne dziury są (tak się przynajmniej obecnie uważa) odpowiedzialne również za „produkowanie” relatywistycznych strug plazmy, wyrzucanych ponad powierzchnię dysku galaktyki na odległości kilo-, a nawet megaparseków. Pomiar prędkości tych strug (dżetów, z ang. *jets*) przynosi czasami zaskakujące rezultaty – prędkość propagacji większą od prędkości światła w próżni! Fenomen ten wyjaśnia się na podstawie geometrii zjawiska w następujący sposób: rzut prędkości dżetu na sferę niebieską (składową prędkości prostopadłą do kierunku obserwacji) można zapisać jako

$$v_p = \frac{\beta c \sin \theta}{1 - \beta \sin \theta},$$

gdzie  $\beta = v/c$  jest prawdziwą prędkością dżetu w jednostkach prędkości światła  $c$ , a  $\theta$  jest kątem pomiędzy osią dżetu i kierunkiem do obserwatora. Maksymalna prędkość  $v_{p,\max} \sim c\gamma$  (gdzie  $\gamma$  jest czynnikiem Lorentza,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ) może być dużo większa od  $c$ ! Paradoksalny pomiar nadświatlnych prędkości dżetów jest w rzeczywistości potwierdzeniem ich relatywistycznych prędkości,  $v \approx c$ . Pozornie sprzeczny ze zdrowym rozsądkiem efekt został przewidziany teoretycznie przez Martina Reesa w latach 60. XX wieku. Nadświatlna prędkość wypływu strug wykryto od tego czasu w przypadku wielu aktywnych jąder galaktyk, a także obiektów bliższych Ziemi, jak w przypadku *mikrowazara* GRS 1915+105 (układu podwójnego z czarną dziurą o masie ok.  $15 M_\odot$ ).

## Energetyczne promieniowanie kosmiczne

Na co dzień nie zdajemy sobie z tego sprawy, ale nasza planeta jest nieustannie bombardowana wysokoenergetycznymi cząstkami, zwanymi *promieniowaniem kosmicznym*. Cząstki te (głównie protony) oddziałują z atomami atmosfery, produkując efektowne pęki krótkożyjących mionów, obserwowanych następnie przez detektory typu AGASA czy Auger. Pochodzenie promieniowania kosmicznego jest wciąż owiane tajemnicą; przy założeniu, że pochodzi ono z odległych źródeł, można jednak otrzymać górne ograniczenie na ich energię – nie może być ona większa od energii granicznej, przy której cząstki zaczynają oddziaływać z fotonami promieniowania relikтового tła,  $\gamma_{\text{CMB}}$ , produkując piony



Teoretyczna granica energii (granica GZK, Greisena–Zatsepina–Kuzmina) wynosi  $5 \cdot 10^{19}$  eV; w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat, za pomocą różnych urządzeń obserwowano natomiast zjawiska wielokrotnie bardziej energetyczne ( $3 \cdot 10^{20}$  eV; taką energię kinetyczną ma piłka tenisowa lecąca z prędkością 150 km/h!). Proponuje się kilka wytłumaczeń „dziwnych” obserwacji; od prozaicznego błędu pomiarowego (wadliwej interpretacji danych detektora) poprzez założenie, że cząstki są przyspieszane przez *lokalne* źródło energii, aż do rozważenia bardziej masywnych od protonów cząstek, np. cięższych jąder atomowych.

Przedstawione powyżej paradoksy pełnią bardzo szczególną rolę w rozwoju astrofizyki. Krytyczne studiowanie założeń prowadzących do – często pozornie – sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem wyników przyczynia się bowiem do ulepszenia istniejących teorii i pełniejszego zrozumienia praw fizyki rządzących obserwowanym przez astronomów Wszechświatem.

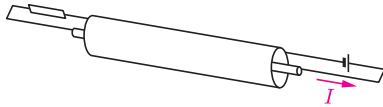
Akeno Giant Air Shower Array w Japonii, Pierre Auger Observatory w Argentynie.

Promieniowanie reliktowe tła powstało w momencie oddzielenia się światła od materii we wczesnym Wszechświecie; obecnie jest bardzo niskoenergetyczne – jego temperatura wynosi około 2,7 K.

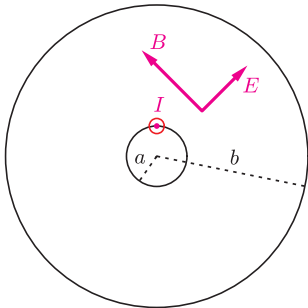


## Ukryty pęd

Krzysztof TURZYŃSKI



Rys. 1. Schemat rozważanego układu przewodzących walców.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny przez rozważany układ przewodzących walców.

Dla uproszczenia tego rachunku zakładamy przybliżenie nieskończenie długich walców.

Oczywiście, założenie, że w przewodniku poruszają się ładunki ujemne doprowadzi do tego samego wyniku, w rachunkach trzeba jednak będzie bardziej uważnie przyglądać się znakom + i -.

Wynik nierelatywistyczny otrzymamy, kładąc  $\gamma = 1$  w definicji pędu; wówczas, oczywiście, wyrażenie dane równaniem (4) jest równe zeru.

Przy omawianiu elektryczności i magnetyzmu w uniwersyteckim kursie fizyki definiuje się wielkość zwaną wektorem Poyntinga:

$$(1) \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

którą interpretuje się np. jako gęstość pędu pola elektromagnetycznego mnożoną przez czynnik  $c^2$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła w próżni. Oznacza to, że pęd niesiony przez pole w ustalonym fragmencie przestrzeni można obliczyć, całkując  $\frac{1}{c^2}\mathbf{S}$  po tym właśnie fragmencie. Jak się zaraz przekonamy, prowadzi to do zastanawiających wyników.

Rozważmy dwa długie, przewodzące, koncentryczne walce o promieniach  $a$  i  $b$ , przy czym  $a < b$ ; walec wewnętrzny naładowany jest liniową gęstością ładunku  $\lambda$ , a zewnętrzny liniową gęstością  $-\lambda$ , przez oba walce płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I$ . Układ taki przedstawiony jest schematycznie na rysunku 1. Zgodnie z prawem Gaussa, pomiędzy walcami występuje pole elektryczne o natężeniu  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$  skierowane na zewnątrz osi walców oraz, zgodnie z prawem Ampère'a, pole magnetyczne o indukcji  $B = \frac{I}{2\pi r}$ , prostopadłe zarówno do pola elektrycznego, jak i do osi walców (rys. 2); wewnątrz mniejszego walca oraz na zewnątrz większego pola są równe zeru. Wykorzystując wzór (1), nietrudno znaleźć pęd pola elektromagnetycznego w omawianym układzie – jest on równy

$$p_{em} = \frac{\lambda I \ell}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a},$$

gdzie  $\ell$  jest długością walców, i skierowany wzdłuż osi walców. Kierunek i zwrot tego pędu pokrywa się z kierunkiem przepływu prądu w wewnętrznym walcu.

Tu pojawia się pewien problem. Jeśli układ walców spoczywa, to jego pęd jest równy zeru. Jak widzimy, pęd pola elektromagnetycznego jest różny od zera, a zatem w układzie powinno być „coś”, czego pęd ma taką samą długość i kierunek, a przeciwny zwrot. Czyli co?

Rozszyfrowanie tej zagadki wymaga zastanowienia się, jaka jest mikroskopowa natura źródeł pola elektrycznego i magnetycznego – czyli prądu elektrycznego i gęstości ładunku na walcach. Wyobraźmy sobie (perwersyjnie), że prąd polega na przepływie elementarnych ładunków dodatnich  $q$ , których liczba w wewnętrznej i zewnętrznej części kabla to odpowiednio  $N_{w+}$  oraz  $N_{z+}$ , a niezerowa gęstość ładunku zapewniana jest przez obecność odpowiedniej liczby nieruchomych ładunków ujemnych  $-Q$ . Ładunki  $q$  poruszają się z prędkościami odpowiednio  $v_w$  i  $v_z$ , zatem:

$$(2) \quad I = \frac{N_{w+} q v_w}{\ell} = \frac{N_{z+} q v_z}{\ell}.$$

Przy przejściu z wewnętrznej części przewodu na zewnętrzną energia ładunku  $q$  zmienia się z  $\mathcal{E}_w$  na  $\mathcal{E}_z$ , które są związane zależnością:

$$(3) \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_w + Vq,$$

gdzie  $V$  jest różnicą potencjałów elektrostatycznych zewnętrznego i wewnętrznego walca. Zgodnie ze szczególną teorią względności energia ciała o masie spoczynkowej  $m$  i prędkości  $v$  w inercjalnym układzie odniesienia wynosi  $\mathcal{E} = m\gamma c^2$ , gdzie  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ , a pęd tego ciała to  $p = m\gamma v$ . Uzbrojeni w tę wiedzę możemy obliczyć wypadkowy pęd ładunków krążących w obwodzie (znak + oznacza ruch zgodny z kierunkiem prądu):

$$(4) \quad p_q = -N_{z+} m\gamma_z v_z + N_{w+} m\gamma_w v_w = -\frac{I\ell}{q} m(\gamma_z - \gamma_w) = -\frac{I\ell V}{c^2},$$

przy czym w obliczeniach skorzystaliśmy najpierw z (2), a następnie z (3). Ponieważ w opisanym układzie  $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ , otrzymujemy:

$$p_q = -\frac{\mu_0 I \lambda \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -p_{em}.$$

Suma pędu pola elektromagnetycznego oraz tzw. pędu ukrytego, czyli sumy pędów ładunków składających się na prąd elektryczny, jest zatem równa zeru!

Na pierwszy rzut oka może wydać się nieco dziwne, że do wyjaśnienia, dlaczego niezbyt skomplikowany układ przewodników z prądem może spoczywać, musieliśmy odwołać się do szczególnej teorii względności. Zaskoczenie nie powinno jednak trwać długo – przecież teoria ta została sformułowana przez Einsteina właśnie w celu podania praw ruchu zgodnych z prawami elektryczności i magnetyzmu.



## Normalna-nienormalna?

Numer poświęcony paradoksom nie byłby kompletny, gdyby nie pojawiła się w nim paradoksalna gra. Przyjrzyjmy się zatem pewnej grze, inspirowanej paradoksami teoriomnogościowymi, które rozkwitły w początkach XX wieku.

Będziemy rozważać gry dwuosobowe, w których gracze wykonują ruchy na przemian. Są gry, które za każdym razem kończą się po skończonej liczbie ruchów – i te gry nazwiemy *normalnymi*. Taką grą są, na przykład, warcaby. Można sobie jednak wyobrazić także i takie gry, w które w pewnych sytuacjach można grać w nieskończoność, na przykład, gdy każdy gracz podaje w swoim ruchu liczbę naturalną i przegrywa ten, który już nie może podać liczby większej od ostatniej liczby przeciwnika.

Oto reguły gry, którą nazwiemy *uniwersalną*:

1. Gracz, który rozpoczyna grę, wybiera grę normalną.
2. Drugi gracz wykonuje pierwszy ruch w wybranej grze normalnej.
3. Dalej gracze wykonują naprzemiennie swoje ruchy zgodnie z regułami wybranej gry.

Czy gra uniwersalna jest normalna? Jeśli tak, to grając w nią, można ją wybrać w pierwszym ruchu. Wtedy drugi gracz musi wykonać pierwszy ruch wybranej gry (czyli gry uniwersalnej), a ten ruch polega na wybraniu gry normalnej; wybiera więc... grę uniwersalną. Wtedy na pierwszego gracza spada obowiązek wykonania pierwszego ruchu tej gry, więc – a jakże! – wybiera grę uniwersalną. I tak w nieskończoność, co jawnie pokazuje, że gra uniwersalna nie jest normalna. Ale jeśli nie jest normalna, to nie można jej wybrać w pierwszym ruchu gry uniwersalnej; trzeba wybrać grę „naprawdę” normalną, a ta skończy się po skończeniu wielu ruchach. Zatem gra uniwersalna jest normalna!

Normalność, jak widać, niewiele różni się od nienormalności...

W. B.



## Zadania

Przygotował Piotr ZALEWSKI

**F 817.** W wiadrze pływa cylindryczny soplek (obciążony tak, by był ustawiony pionowo). Do rączki wiadra przymocowany jest ciężarek na nieważkiej, spełniającej prawo Hooke'a sprężynie. Wiadro wisi na linie (patrz rys. 1). Soplek i ciężarek mają tę samą masę  $m$  i drgają z tą samą częstością kołową  $\omega$ . Jak zmieniają się parametry ich ruchu, jeżeli wiadro zaczyna spadać ze stałym przyspieszeniem mniejszym od przyspieszenia ziemskiego  $g$ ? Opory ruchu należy zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 1

**F 818.** Co się stanie, jeżeli przed rozpoczęciem spadania soplek i ciężarek będą nieruchome?

Rozwiązanie na str. 8

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1357.** Na bokach  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  trójkąta  $ABC$  (rys. 2) dane są odpowiednio punkty  $D$ ,  $E$  i  $F$ , takie że

$$\frac{BD}{DC} \leq \frac{BF}{FA} \leq \frac{CE}{EA}.$$

Udowodnić, że

$$[DEF] \leq \frac{1}{4}[ABC]$$

(gdzie  $[F]$  oznacza pole figury  $F$ ). Kiedy zachodzi równość?

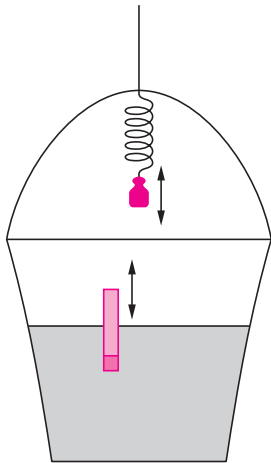
Rozwiązanie na str. 9

**M 1358.** Dana jest rodzina  $\mathcal{F}$  skończonych podzbiorów zbioru liczb całkowitych dodatnich, taka że dowolne dwa różne zbiory tej rodziny mają wspólny element. Czy istnieje taki skończony podzbiór  $S$  zbioru liczb całkowitych dodatnich, że dla dowolnych  $A, B \in \mathcal{F}$  jest  $A \cap B \cap S \neq \emptyset$ ?

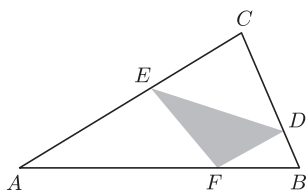
Rozwiązanie na str. 7

**M 1359.** Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na biało lub czarno. Rozstrzygnąć, czy istnieje niezdegenerowany do punktu odcinek jednokolorowy.

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 1



Rys. 2

## Monstrualne fale

Przez lata występowały one tylko w opowieściach marynarzy, którym nikt nie dawał wiary. Najczęściej określane są angielską nazwą *rogue waves* (ale nazw jest więcej, również polskich). Nie tak dawno poświęcono im specjalny numer *European Physical Journal* [1] i tam pokuszono się o zdefiniowanie pojęcia. Chodzi o pojawiającą się jakby znikąd falę, która ma amplitudę co najmniej dwa razy większą niż fale w okolicy. Zjawisko to, rozumiane jako efekt nieliniowy, występuje w wielu dziedzinach (optyka nieliniowa, kondensacja Bosego-Einsteina, fizyka plazmy, ekonomia (?) itp.), ale pierwotnie odnosi się do fal na głębokiej wodzie (głębokość dużo większa od długości fali).

Jest wiele historycznych doniesień, które mogłyby być za pomocą takiej fali wyjaśnione, ale z kategorii mitu do rzeczywistości została ona przeniesiona dopiero dzięki rejestracji za pomocą przyrządów morskiej (norweskiej) platformy Draupner 1 stycznia 1995 roku. Wcześniej wydawało się, że tak duże (dwudziestometrowe) fale praktycznie się nie zdarzają.

Natura tego zjawiska naturalnego nadal pozostaje tajemnicą, ale jest coraz więcej argumentów za uznaniem nieliniowości zjawiska. Jedyna konkurencyjna teoria odwołuje się do zwykłej interferencji, ale podejście to nie tłumaczy częstości występowania fenomenu, który jest odkrywany coraz częściej np. w danych pochodzących z satelitarnej obserwacji oceanów. Na szczęście fale te, tak jak powstają (pozornie) z niczego, tak po chwili znikają bez śladu. Chyba że akurat trafią na jakiś statek – wtedy to on może zniknąć bez śladu. Najbardziej znana jest historia niemieckiego barkowca MS München, który zatonął w niewyjaśnionych okolicznościach w czasie sztormu w 1978 roku. W efekcie zakrojonej na olbrzymią skalę akcji ratunkowo-poszukiwawczej odnaleziono pojedyncze przedmioty ze statku, w tym puste tratwy ratunkowe, oraz pustą szalupę, na której znaleziono ślady świadczące o tym, że została ona zdarta z pokładu, choć znajdowała się dwadzieścia metrów ponad linią wodną.

Do modelowania monstrualnych fal używa się najczęściej nieliniowego równania Schrödingera. Udało się uzyskać rozwiązania wyglądające jak domniemane fale. Niektórym to jednak nie wystarcza i podjęli próbę wzbudzenia tego typu fal w warunkach laboratoryjnych.

Kolejna z takich prób właśnie została zakończona sukcesem [2]. Udało się wygenerować falę aż pięć razy wyższą niż zafalowanie doświadczonego akwenu i to w sposób powtarzalny. Do publikacji [2] dołączony jest filmik pokazujący, jak taka fala wywraca łódeczkę piracką (wziętą z zestawu klocków LEGO). Jednocześnie efekt jest dokładnie mierzony, a pomiary zgadzają się bardzo dobrze z przewidywaniami.

Jedną z cech wyróżniających rzeczywiste monstrualne fale jest ich aspekt chaotyczny. Takiej fali, jak na razie, nie udało się wytworzyć.

Jest jednak proste doświadczenie, które pokazuje coś podobnego. Do demonstracji potrzebny jest styropianowy kubeczek do napojów wypełniony wodą, np. do trzech czwartych, oraz nieidealnie gładki stół. Należy przesuwając kubeczek po stole. Powinno być słychać umiarkowanie nieprzyjemny dźwięk, jakby brzęczenie, które jest spowodowane skokowym przesuwaniem się kubeczka po stole. Wibracja ta wzbudza w sposób przypadkowy fale powierzchniowe w kubeczku. Przy odpowiednio zdecydowanym przesunięciu z kubeczka wyskakują do góry krople, choć powierzchnia wody jest tylko zmarszczona. Można to zrobić tak, że wylatuje tylko jedna kropla.

Niestety, nie jest mi znany teoretyczny opis tego efektu, więc trudno jest wyrokować, czy jest to zjawisko nieliniowe, czy tylko interferencja. Wygląda jednak bardzo spektakularnie. Amplituda wzbudzeń przekracza amplitudę zmarszczek o dwa rzędy wielkości!

Wróćmy do poważnych badań [1, 2]. Dyscyplina rozwija się bardzo intensywnie. Nie wiadomo jednak, jakie będzie to miało przełożenie na transport morski. Trywialne stwierdzenie, że zdarzenia rzadkie, choć zdarzają się rzadko, to jednak się zdarzają, również rzadko jest początkiem jakiegokolwiek działania. Najwyżej ubezpieczyciele podniosą składkę. Szansa na budowanie statków zdolnych wytrzymać uderzenie takiej monstrualnej fali są niewielkie. Podobnie jak niewielkie są szanse na budowę budynków zdolnych wytrzymać największe trzęsienia ziemi (takie, jakich ludzkość nie pamięta, ale jakie wypiętrzają góry), czy zabezpieczenie rynków finansowych przed kolejnym kryzysem. Dlatego poszukiwane są sposoby wykrywania warunków, w których występowanie takich, jak widać realnych, potworów morskich jest możliwe.

Piotr ZALEWSKI

[1] *Discussion & Debate: Rogue Waves—Towards a Unifying Concept?*, The European Physical Journal—Special Topics **185**, No. 1 (July 2010).

[2] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato i N. Akhmediev, *Super Rogue Waves: Observation of a Higher-Order Breather in Water Waves*, Phys. Rev. X **2**(2012)011015.

## Pospieszcie się! Spieszymy się?

Tytułowe pytanie w różnych wątkach pojawia się przy nowinkach medycznych, biotechnologicznych, „wyciekających” z laboratoriów naukowych. Zaczyna się od opisu cudownie wyleczonych myszy lub procesu, który może odnieść sukces technologiczny.

Można badać jakąś chorobę u jakiegoś gatunku, byle choć częściowo podobny był do człowieka, mając nadzieję na znalezienie wspólnego tła genetycznego i wspólnej terapii. Na przykład, badamy wspólne nam i myszom choroby. Wspólnego przodka z myszą mieliśmy około 60 mln lat temu i od tego czasu ewoluowały zarówno gryzonie, jak i linia ssaków kończąca się na *Homo sapiens*. Mamy wiele podobieństw genetycznych, ale także różnice, trudno zatem spodziewać się identycznego przebiegu różnych chorób, na które i my, i one chorują, a więc także możliwości znalezienia identycznej terapii. Na przykład, różnie chorują myszy i ludzie na mukowiscydozę. To genetyczna choroba, jednogenowa (jeżeli w ogrodzie genów bywają w ogóle jednogenowe choroby), w obu gatunkach zmutowany jest ten sam (homologiczny) gen. Skutkiem tej zmiany w błonach komórek nabłonka chorego powstaje zmienione jedno białko (produkt genu). U człowieka pierwsze objawy choroby dotyczą nabłonek układu oddechowego, u myszy – pokarmowego. Nie wiadomo, jak dalekie konsekwencje terapeutyczne (dla myszy i ludzi) związane są z taką różnicą w patologii. Mysz nie jest małym człowieczkiem ani człowiek nie jest wielką myszą.

Należy dążyć do większej indywidualizacji terapii w stosunku do osobnika, nie gatunku. To znaczy dopasowywać terapię do konkretnego, indywidualnego genotypu. Ale nawet wtedy odpowiedź różnych pacjentów jest różna. Niedawno badacze hiszpańscy opisali zindywidualizowaną terapię litych ludzkich nowotworów z zaawansowanego stadium choroby. Przybliżyli się zatem do sytuacji, w której szuka się leku dla danego człowieka, a nie dla danej choroby. Robili to tak:

- fragmenty nowotworowej tkanki 14 pacjentów wszczepiono myszom z uprzednio genetycznie osłabionym układem immunologicznym (żeby utrudnić odrzucenie ludzkiej tkanki), nowotwór ludzki zaczął się w nich rozrastać;
- chore myszy potraktowano różnymi lekami antynowotworowymi aplikowanymi pojedynczo i w kombinacjach;
- 14 pacjentów traktowano następnie według 17 różnych procedur sugerowanych przez leczone odpowiednio myszy. Uzyskano poprawę, w różnym stopniu, u 11 pacjentów.

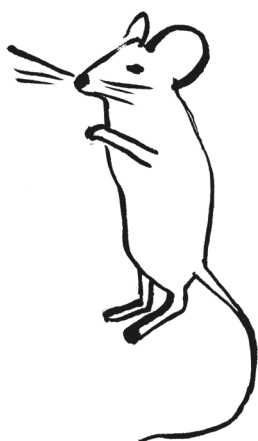
Na tych przykładach widać, że współcześnie mała jest szansa na znalezienie uniwersalnych leków i procedur przeciwnowotworowych. Z innych doświadczeń, w których określany jest „genotyp” chorób nowotworowych, czyli zestaw tych genów człowieka, które ulegają zmianie w trakcie rozwoju różnych nowotworów, wynika także, że zmiany ulegają aktywności kilkudziesięciu, jeśli nie kilkuset, genów. O ilez bardziej skomplikowana sytuacja niż w przypadku mukowiscydozy. . .

Ale nawet gdybyśmy zadowolili się powtarzaniem już teraz powyższej procedury, do ewentualnego stosowania klinicznego droga daleka. Trzeba mieć świeżą próbkę tkanki nowotworowej. Odpowiedni nowotwór w myszy rośnie 6–8 miesięcy i nie w każdej myszy (60%). Trudno o pośpiech. Trzeba też odszukać właściwy i skuteczny zestaw leków. Koszty całej procedury są wysokie. . .

Świadkowaliśmy wielu procedurom, budzącym na wstępie nadzieje (np. terapie komórkami macierzystymi), i takie były szybko modyfikowane i ulepszone. Tylko co to znaczy szybko? I na ile trzeba się spieszyć, a na ile być ostrożnym? Każda nowa procedura niesie ze sobą jakieś zagrożenia.

Na razie cieszymy się pierwszą medyczno-kosmetyczną procedurą zatwierdzoną do wprowadzania w życie w USA. Dotyczy biologicznej metody usuwania zmarszczek twarzy (tzw. zmarszczki uśmiechu). In vitro hoduje się własne komórki skóry, prawdopodobnie raczej pacjentki. Trzykrotnie, co 6 tygodni, wprowadza się te komórki we wskazane regiony twarzy. Efekt jest dość wyraźny i długotrwały. Jak piszą wynalazcy: dobra procedura, jeżeli kogoś na nią stać. . . Proponuję nie przejmować się i dalej często się uśmiechać.

Magdalena FIKUS



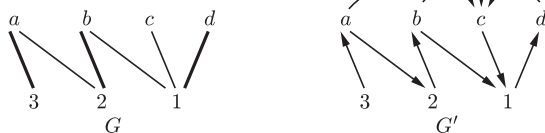
## Informatyczny kącik olimpijski (53): Dziurawa szachownica

W tym miesiącu omówimy zadanie, które pojawiło się w pierwszej edycji konkursu *Potyczki Algorytmiczne*, w roku 2005.

Dana jest szachownica o  $m$  wierszach i  $n$  kolumnach ( $m \leq n$ ), mająca taki feler, że na niektórych jej polach znajdują się dziury. Obliczono, na ile sposobów można na tej szachownicy rozstawić  $m$  wież tak, by żadna z wież nie stała na dziurawym polu i nie groziła z biciem innej (tzn. w każdej kolumnie może stać co najwyżej jedna wieża, a w każdym wierszu stoi dokładnie jedna wieża). Należy wskazać te pola szachownicy, w których można wywiercić dodatkowe dziury tak, aby powyższa liczba ustawień nie zmieniła się. Przykładowa szachownica została przedstawiona na poniższym rysunku. Krzyżykami oznaczono dziurawe pola, zaś kolorem wyróżniono jedno z dwóch prawidłowych rozmieszczeń wież. Dodatkowe dziury można zrobić na polach b1 oraz a2.

3		×	×	×
2			×	×
1	×			
	a	b	c	d

Zapewne niektórzy Czytelnicy od razu zorientują się, że pod płaszczykiem terminologii szachowej kryje się problem, który możemy sprowadzić do znajdowania skojarzeń w grafach dwudzielnych. Tak jest istotnie. Rozważmy bowiem graf dwudzielny  $G$  o  $n + m$  wierzchołkach: wierzchołki ze zbioru  $A$  będą odpowiadać wierszom szachownicy, natomiast wierzchołki ze zbioru  $B$  – kolumnom. Dwa wierzchołki  $a \in A$  i  $b \in B$  łączymy krawędzią wtedy, gdy na przecięciu wiersza  $a$  i kolumny  $b$  nie ma dziury. W takiej sytuacji poprawne rozstawienie wież na szachownicy odpowiada skojarzeniu rozmiaru  $m$  w grafie  $G$ . Treść zadania możemy więc przeformułować następująco: należy znaleźć te krawędzie w grafie  $G$ , które nie należą do żadnego skojarzenia rozmiaru  $m$ .



To prowadzi nas do pierwszego rozwiązania. Dla każdego niedziurawego pola szachownicy  $(i, j)$  wykonujemy następujące sprawdzenie: stawiamy na nim wieżę i próbujemy rozstawić  $m - 1$  wież na pozostałej części szachownicy, uruchamiając algorytm wyznaczania najliczniejszego skojarzenia w grafie dwudzielnym. Rozwiązanie to można przyspieszyć: zamiast za każdym razem od nowa znajdować najliczniejsze skojarzenie, możemy zacząć od poprzednio znalezionej. W tym celu usuwamy wieżę z wiersza  $i$  i kolumny  $j$ . Za każdym razem wystarczy zatem ustawić co najwyżej dwie brakujące wieże, czyli znaleźć co najwyżej dwie ścieżki powiększające skojarzenie. Złożoność czasowa to  $O(n^2 m^2)$ .

Podamy teraz lepsze rozwiązanie. Na początek znajdujemy w grafie  $G$  dowolne skojarzenie rozmiaru  $m$

(jeśli takie skojarzenie nie istnieje, to można wywiercić dziury we wszystkich polach). Tworzymy teraz graf skierowany  $G'$  o takim samym zbiorze wierzchołków co  $G$  i następujących krawędziach:

- (1) krawędzie, które w grafie  $G$  należały do znajdującego skojarzenia, kierujemy od  $A$  do  $B$ ,
- (2) pozostałe krawędzie z  $G$  kierujemy od  $B$  do  $A$ ,
- (3) dodajemy krawędzie z wszystkich skojarzonych wierzchołków w  $B$  do wszystkich nieskojarzonych wierzchołków w  $B$ .

Następnie znajdujemy silnie spójne składowe w grafie  $G'$ . Okazuje się, że krawędzie, które nie należą do żadnego skojarzenia rozmiaru  $m$  w grafie  $G$ , to te krawędzie typu (2) w grafie  $G'$ , które łączą dwie różne silnie spójne składowe. Spróbujmy to uzasadnić.

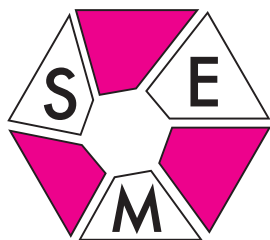
Stosunkowo łatwo wykazać, że pozostałe krawędzie typu (2) należą do pewnego skojarzenia. Rozważmy taką krawędź  $e$ , która leży wewnątrz pewnej silnie spójnej składowej, zatem leży ona na pewnym cyklu. Cykl ten może składać się z naprzemiennych krawędzi typu (1) i (2) lub może zawierać krawędzie typu (3). W pierwszym przypadku do skojarzenia zamiast krawędzi typu (1) z cyklu bierzemy krawędzie typu (2) i uzyskujemy nowe skojarzenie zawierające krawędź  $e$ . W drugim przypadku rozważamy najdłuższą ścieżkę cyklu zawierającą  $e$ , a niezawierającą krawędzi typu (3). Ścieżka ta składa się na zmianę z krawędzi typu (1) i (2) oraz zaczyna się w wierzchołku nieskojarzonym, a kończy w skojarzonym. Znowu więc odwrócenie rolami krawędzi typu (1) i (2) załatwia sprawę.

Rozważmy teraz krawędź  $e$  (z  $b$  do  $a$ ) typu (2), która łączy w  $G'$  dwie różne silnie spójne składowe. Wszystkie wierzchołki w  $A$  są skojarzone, niech więc  $b' \in B$  będzie wierzchołkiem skojarzonym z  $a$ . Oznaczmy przez  $L$  zbiór tych wierzchołków, z których można dojść do wierzchołka  $b$  (w szczególności  $b \in L$ ,  $a \notin L$ ). Wszystkie wierzchołki w  $L$  są skojarzone, w przeciwnym przypadku taki nieskojarzony wierzchołek musiałby być w  $B$ , zatem prowadziłaby do niego krawędź typu (3) z  $b'$ , czyli krawędź  $e$  leżałaby wewnątrz silnie spójnej składowej. Ponadto zbiory  $A \cap L$  i  $B \cap L$  są równoliczne i skojarzone między sobą oraz żaden z wierzchołków  $A \cap L$  nie jest połączony z wierzchołkami spoza  $L$ . Innymi słowy, wszystkie wierzchołki z  $B \cap L$  są potrzebne do skojarzenia wierzchołków z  $A \cap L$ , zatem w najliczniejszym skojarzeniu żaden nie może być skojarzony przez krawędź  $e$ . To kończy dowód.

Na złożoność czasową rozwiązania składa się znalezienie najliczniejszego skojarzenia w  $G$  i wyznaczenie silnie spójnych składowych w  $G'$ . Pierwszy krok można wykonać w czasie  $O(nm^2)$ , korzystając z metody ścieżek naprzemiennych, lub w czasie  $O(nm\sqrt{n})$ , korzystając z algorytmu Hopcrofta–Karpa.

Drugi krok można wykonać za pomocą dwóch przeszukań grafu w głąb. Jako ćwiczenie dla Czytelnika pozostawiamy pokazanie, że można to zrobić w czasie  $O(nm)$ . Kłopot stanowią krawędzie typu (3), których może być rzędu  $n^2$ , należy zatem wykorzystać ich regularną strukturę.

Tomasz IDZIASZEK, Paweł PARYS



## I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Kontynuując ideę Czesko-Polsko-Słowackich Zawodów Matematycznych dla licealistów, w tym roku po raz pierwszy zorganizowano odpowiadające im zawody na szczeblu gimnazjalnym. Od 20 do 23 maja 2012 r. w Mszanie Dolnej spotkały się sześciuosobowe reprezentacje trzech krajów, aby rywalizować w dwóch rodzajach zawodów: indywidualnych i drużynowych.

Zawody indywidualne formą przypominały finał Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów: uczestnicy w ciągu 4 godzin rozwiązywali pięć zadań. Następnego zaś dnia uczestnicy, w drodze losowania, zostali podzieleni na trzyosobowe drużyny w taki sposób, aby w każdej z drużyn znalazł się dokładnie jeden reprezentant każdego kraju. Drużyny otrzymały treści sześciu zadań: dwóch po czesku, dwóch po polsku i dwóch po słowacku. Rozwiązania także musiały zostać oddane w różnych językach, przy czym każde rozwiązanie miało być napisane w innym języku niż jego treść. Zmuszało to uczestników do współpracy i komunikacji między zawodnikami różnych narodowości. W większości przypadków uczestnicy poradzili sobie z tą barierą bez problemów.

W zawodach indywidualnych zwyciężył reprezentant Polski, Konrad Majewski, a część mieszaną wygrała drużyna w składzie Ema Krakowska, Konrad Majewski i Viktor Nemecek. Wszystkim zwycięzcom gratulujemy.

Przedstawiamy pochodzące od uczestników rozwiązania czwartego zadania z serii indywidualnej i trzeciego zadania z serii drużynowej.

**Zadanie 4 (I).** *Udowodnij, że wśród dowolnych 51 wierzchołków 101-kąta foremnego istnieją takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.*

**Rozwiązanie.** Przypuśćmy, że potrafimy tak wybrać 51 wierzchołków 101-kąta foremnego, by żadne trzy nie były wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Oznaczmy wówczas wierzchołki 101-kąta przez  $A_1, A_2, \dots, A_{101}$  w taki sposób, by wierzchołek  $A_{101}$  był wybrany. Podzielmy teraz pozostałe wierzchołki na 50 par postaci  $\{A_i, A_{101-i}\}$  dla  $i = 1, 2, \dots, 50$ . Zauważmy, że każda z tych par tworzy podstawę trójkąta równoramiennego o wierzchołku  $A_{101}$ , zatem z każdej pary dokładnie jeden wierzchołek musiał być wybrany. W szczególności wybrany jest jeden z wierzchołków sąsiadujących z  $A_{101}$  (tzn.  $\{A_1, A_{100}\}$ ) oraz jeden z wierzchołków odległych o dwa miejsca od  $A_{101}$  (czyli  $\{A_2, A_{99}\}$ ). Nie mogą być to jednak sąsiednie wierzchołki, bo wówczas wraz z  $A_{101}$  tworzyłyby trójkąt równoramienny złożony z trzech sąsiednich wierzchołków. Zatem, gdy z jednej strony sąsiadujący z nim wierzchołek został wybrany, z drugiej wybrany został wierzchołek odległy od niego o dwa miejsca. Przypuśćmy zatem bez straty ogólności, że wybrane zostały wierzchołki  $A_1$  i  $A_{99}$ . Stosując powyższe rozumowanie z wierzchołkiem  $A_1$  zamiast  $A_{101}$  oraz z wierzchołkiem  $A_{99}$  zamiast  $A_{101}$ , stwierdzamy, że wybrane musiały być  $A_3$  oraz  $A_{98}$ . Dostajemy zatem trójkąt równoramienny  $A_{98}A_{101}A_3$ , co jest sprzeczne z założeniem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

**Zadanie 3 (D).** *Udowodnij, że jeśli  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba  $2(n^2 + 1) - n$  nie jest kwadratem liczby całkowitej.*

**Rozwiązanie.** Rozważmy reszty z dzielenia liczby  $n$  przez 5. Dla  $n \equiv 0 \pmod{5}$  lub  $n \equiv 3 \pmod{5}$  mamy  $2(n^2 + 1) - n \equiv 2 \pmod{5}$ , a więc  $2(n^2 + 1) - n$  nie może być kwadratem liczby całkowitej. Podobnie dla  $n \equiv 1 \pmod{5}$  lub  $n \equiv 2 \pmod{5}$ , liczba  $2(n^2 + 1) - n$  nie może być kwadratem liczby całkowitej, bo  $2(n^2 + 1) - n \equiv 3 \pmod{5}$ . Przypuśćmy zatem, że  $n = 5k - 1$  dla pewnego  $k$  całkowitego. Wówczas

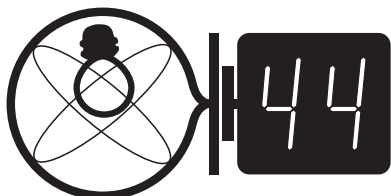
$$2(n^2 + 1) - n = 2((5k - 1)^2 + 1) - (5k - 1) = 50k^2 - 25k + 5,$$

czyli  $2(n^2 + 1) - n \equiv 5 \pmod{5}$ . Zatem liczba  $2(n^2 + 1) - n$  jest podzielna przez 5, ale nie jest podzielna przez 25, czyli i ona nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Filip SMENTEK

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



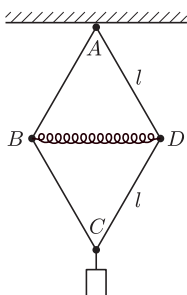
### Rozwiązania zadań z numeru 4/2012

Redaguje Ewa CZUCHRY

Przypominamy treść zadań:

**536.** Na pionowej, obracającej się ze stałą prędkością  $\omega$  osi zamocowany jest poziomo sztywny, nieważki pręt. Wzdłuż niego mogą poruszać się bez tarcia dwie kuleczki, każda o masie  $m$ , połączone sprężyną o stałej sprężystości  $k$  – obie leżą po tej samej stronie osi obrotu. Taka sama sprężyna łączy kulkę bliższą osi z punktem zamocowania osi i pręta. Nierozciągnięte sprężyny mają długość  $l_0$  każda. Znaleźć długości obu sprężyn podczas ruchu. Dla jakich parametrów uzyskane rozwiązanie ma sens fizyczny?

**537.** Cztery nieważkie pręty o długości  $l$ , połączone przegubami w romb, zostały za przegub  $A$  podwieszono na suficie (rys. 1). Przeciwległy przegub  $C$  obciążono ciężarkiem  $N$ , a pozostałe przeguby  $B$  i  $D$  rozparto sprężyną o długości  $\frac{3}{2}l$  i stałej sprężystości  $k$ . W położeniu równowagi okazało się, że pręty są nachylone do pionu pod kątem  $\alpha = 30^\circ$ . Znaleźć okres małych drgań ciężarka.



**536.** Oznaczmy przez  $l_1$  i  $l_2$  szukane długości sprężyn. Dla kulek poruszających się ruchem harmonicznym o częstotliwości  $\omega$  spełnione są równania:

$$m\omega^2 l_1 = k(l_1 - l_0) - k(l_2 - l_0), \quad m\omega^2(l_1 + l_2) = k(l_2 - l_0).$$

Stąd wyznaczamy:

$$l_1 = \frac{l_0}{1 - 3\beta + \beta^2}, \quad l_2 = l_1(1 - \beta),$$

gdzie  $\beta = \frac{m\omega^2}{k} > 0$ . Rozwiązanie to ma sens fizyczny, gdy obliczone wartości  $l_1$  i  $l_2$  są dodatnie, czyli

$$1 - 3\beta + \beta^2 > 0, \quad 1 - \beta \geq 0.$$

Z drugiego warunku wynika  $\beta \leq 1$ , a z drugiego  $\beta > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \approx 2,6$  lub  $\beta < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ . Ostatecznie otrzymujemy  $0 < \beta < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ , czyli

$$\omega < \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}}.$$

**537.** Dla dowolnego odchylenia prętów od pionu o kąt  $\tilde{\alpha}$  pręty działają na ciężarek siłą  $F_1 = 2N \cos \tilde{\alpha}$ , a na sprężynę siłą  $F_2 = 2N \sin \tilde{\alpha}$ . Z prawa Hooke'a mamy  $F_2 = (\frac{3}{2}l - 2l \sin \tilde{\alpha})k$ , gdzie  $k$  jest stałą sprężyny. Zatem  $F_1 = \frac{3}{2}kl / \operatorname{tg} \tilde{\alpha} - 2kl \cos \tilde{\alpha}$ . Przy małej zmianie wysokości  $\Delta h$  ciężarka wokół położenia równowagi  $h_0 = 2l \cos \alpha$ , siła nań działająca zmienia się o

$$\Delta F = \frac{3}{2}kl \Delta(1 / \operatorname{tg} \tilde{\alpha}) - 2kl \Delta(\cos \tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha},$$

gdzie  $\Delta(1 / \operatorname{tg} \tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha} = \frac{d(1 / \operatorname{tg} \tilde{\alpha})}{d\tilde{\alpha}}|_{\tilde{\alpha}=\alpha} \Delta\alpha = -\Delta\alpha / \sin^2 \alpha$  oraz  $\Delta(\cos \tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha} = -\sin \alpha \Delta\alpha$ . Z drugiej strony  $\Delta h = -2l \sin \alpha \Delta\alpha$ , zatem

$$\Delta F = -5kl \Delta\alpha = -5k \Delta h,$$

przy czym uwzględniliśmy to, że  $\alpha = 30^\circ$ . Zatem okres małych drgań wynosi  $T = 2\pi \sqrt{m/5k}$ . Masę  $m$  znajdujemy z warunku równowagi:

$$\frac{3}{2} \frac{kl}{\operatorname{tg} \alpha} - 2kl \cos \alpha = mg.$$

Stąd  $m = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{kl}{g}$ . Ostatecznie, szukany okres drgań ciężarka wynosi:

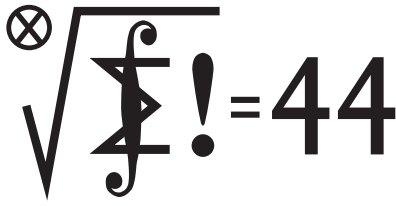
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{10g}}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 532 ( $WT = 3,55$ ) i 533 ( $WT = 2,50$ ) z numeru 2/2012

Jacek Piotrowski	Rzeszów	44,06
Michał Koźlik	Gliwice	42,72
Marian Łupieżowicz	Gliwice	41,85
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	36,71
Krzysztof Magiera	Łosiów	22,60

Pan Piotrowski zdobył 44 punkty po raz drugi.

Redaguje Marcin E. KUCZMA



Przypominamy treść zadań:

**639.** W trójkącie  $ABC$  punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta  $CI$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Prowadzimy przez punkt  $D$  dowolną prostą, przecinającą okrąg opisany na trójkącie  $IAB$  w punktach  $P$  i  $Q$ . Wykazać, że prosta  $CI$  jest dwusieczną kąta  $PCQ$ .

**640.** Ciąg liczb całkowitych dodatnich  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  spełnia warunek

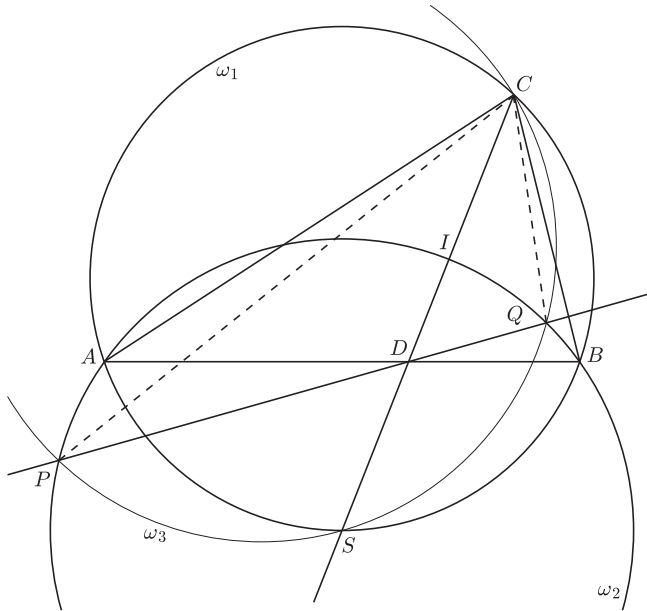
$$\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dowieść, że spełnia on również liniową zależność rekurencyjną

$$a_{n+2} = A a_{n+1} + B a_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wyznaczyć wszystkie pary współczynników  $(A, B)$  oraz wszystkie pary wyrazów początkowych  $(a_1, a_2)$ , dla których ta rekurencja liniowa generuje ciąg  $(a_n)$ , spełniający zadany na wstępie warunek.

**639.** Niech  $\omega_1$  i  $\omega_2$  będą (odpowiednio) okręgami opisanymi na trójkątach  $ABC$  i  $IAB$ . Dwusieczna  $CD$  kąta  $BCA$ , a raczej jej przedłużenie, przecina okrąg  $\omega_1$  w środku łuku  $AB$ . Oznaczmy ten punkt przez  $S$ . Zachodzi równość  $|SA| = |SI| = |SB|$  (znana, a przy tym łatwa do wykazania). Punkt  $S$  jest więc środkiem okręgu  $\omega_2$ . Zatem  $|SP| = |SQ|$ .



W punkcie  $D$  przecinają się cięciwy  $AB$  i  $CS$  okręgu  $\omega_1$ , a także cięciwy  $AB$  i  $PQ$  okręgu  $\omega_2$ . Tak więc

$$|CD| \cdot |DS| = |AD| \cdot |DB| = |PD| \cdot |DQ|.$$

Równość między skrajnymi iloczynami z kolei dowodzi, że istnieje okrąg  $\omega_3$ , przechodzący przez punkty  $C, S, P, Q$ . Jego cięciwy  $SP$  i  $SQ$  mają jednakową długość, więc wyznaczają przystające łuki  $SP, SQ$ . Oparte na nich kąty  $PCS$  i  $QCS$  (wpisane w okrąg  $\omega_3$ ) są równe – a to jest teza zadania.

**640.** Niech  $L_n$  oznacza sumę po lewej stronie zależności, podanej na początku zadania, zaś  $P_n$  – ułamek po prawej stronie. Dla  $n = 1$  mamy  $P_1/L_1 = a_1^2$ , zatem równość  $L_1 = P_1$  wymusza wartość  $a_1 = 1$ . Dalej,

$$L_{n+1} - L_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1} a_{n+2}}, \quad P_{n+1} - P_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}}{a_{n+1} a_{n+2}}.$$

Widać więc, że podana zależność jest spełniona dla wszystkich  $n \geq 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1) \quad a_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^n \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Jeżeli ciąg  $(a_n)$ , spełniający ten warunek, miałby również spełniać rekurencję typu

$$(2) \quad a_{n+2} = A a_{n+1} + B a_n$$

(z  $a_1 = 1$ ), to dla  $n = 1, 2$  mielibyśmy

$$\begin{cases} a_3 = A a_2 + B \\ a_4 = A a_3 + B a_2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} a_2^2 - a_3 = -1 \\ a_3^2 - a_2 a_4 = 1. \end{cases}$$

Pierwsza para równości to układ równań liniowych (z niewiadomymi  $A, B$ ) o wyznaczniku  $a_2^2 - a_3 = -1 \neq 0$ , więc mający dokładnie jedno rozwiązanie. Przy tym jest on spełniony dla  $A = a_2, B = 1$  (co łatwo stwierdzić, korzystając z drugiej pary równości). Stąd wniosek, że *jedynym* kandydatem na postulowaną zależność rekurencyjną jest równanie

$$(3) \quad a_{n+2} = a_2 a_{n+1} + a_n \quad \text{dla } n \geq 1,$$

z warunkiem początkowym  $a_1 = 1$ . Wprowadźmy oznaczenia:

$$D_n = a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}, \quad R_n = a_{n+2} - (a_2 a_{n+1} + a_n)$$

i zauważmy, że (dla  $n \geq 2$ )

$$\begin{aligned} a_{n+1} R_{n-1} &= a_{n+1}^2 - a_{n+1} (a_2 a_n + a_{n-1}), \\ a_n R_n &= a_n a_{n+2} - a_n (a_2 a_{n+1} + a_n), \end{aligned}$$

skąd przez odjęcie stronami

$$(4) \quad a_{n+1} R_{n-1} - a_n R_n = D_n + D_{n-1}.$$

Ponadto (wobec  $a_1 = 1$ ) mamy:  $D_1 + R_1 = -1$ .

Wnioski: Jeżeli ciąg liczb całkowitych dodatnich  $(a_n)$  spełnia wyjściową zależność, czyli warunki (1), to dla wszystkich  $n$  mamy  $D_n = (-1)^n$ , więc prawa strona (4) ma stałą wartość 0; przy tym  $R_1 = -D_1 - 1 = 0$  i ze wzoru (4) wynika, że  $R_n = 0$  dla wszystkich  $n$  – mamy zależność (3).

Na odwrót, jeśli równanie (3) (z wyrazem początkowym  $a_1 = 1$  oraz dowolnym  $a_2$ ) jest dla wszystkich  $n$  spełnione, czyli wszystkie  $R_n$  są zerami, to wobec (4):  $D_n = -D_{n-1}$  dla  $n \geq 2$ ; przy tym  $D_1 = -R_1 - 1 = -1$ , zatem  $D_n = (-1)^n$  – a to jest zależność (1).

Ostatecznie więc, zadana na wstępie zależność jest równoważna rekurencji liniowej (2) z parametrami  $B = a_1 = 1, A = a_2$  – dowolna liczba naturalna.



## Prosto z nieba: O twarzy na Księżycu

Przykłady interesujących pareidolii znajdziemy np. tu: <http://www.netaxs.com/~mhmyers/mnillusion.html>.



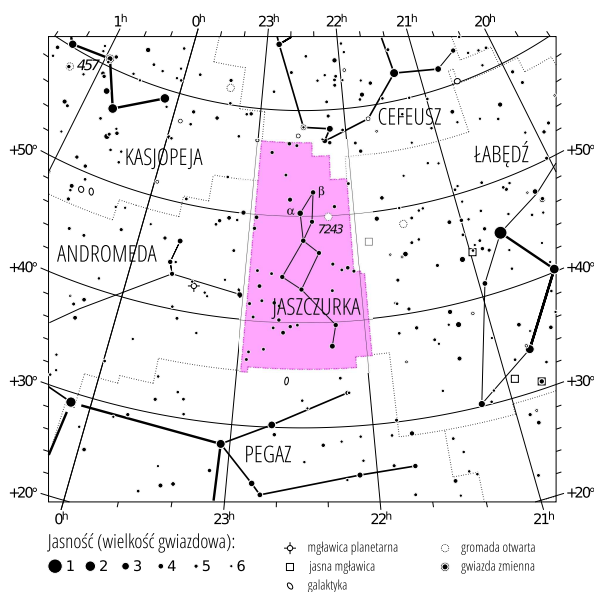
Kadr z filmu Georges Méliès pt. *Podróż na Księżyc*.

Podczas pełni tarcza Księżyca jest podobna, zdaniem niektórych, do uśmiechniętej twarzy; inni twierdzą natomiast, że morza i wzgórza księżycowe układają się w rysunek królika, niewiast (czasami czytających książkę!), a nawet św. Jerzego rozprawiającego się ze smokiem. Odkładając na bok pytanie o mechanizmy działania ludzkiego mózgu, zadajmy inne: czemu widziana przez nas powierzchnia Księżyca jest tak różnorodna i składa się z „mórz” i „łądów”? Okres obrotu Księżyca wokół osi jest obecnie zsynchronizowany z okresem obiegu wokół Ziemi tak, że wciąż widzimy tę samą stronę (w procesie tzw. rotacji synchronicznej obecnej też w innych układach planeta–satelita). Przyczyną tego zjawiska są siły pływowe, odpowiedzialne także za przypiływy Ziemijskich oceanów – kształt Księżyca jest w rzeczywistości dość odmienny od idealnej kuli i przypomina raczej jajowatą piłkę do rugby. W przypadku rotacji wokół osi szybszej/wolniejszej od okresu orbitalnego w układzie Ziemia–Księżyc powstaje moment siły zwalniający/przyspieszający rotację satelity wokół jego osi. Wykonane po raz pierwszy przez misję *Luna* zdjęcia satelitarne drugiej, niewidocznej z Ziemi półkuli Księżyca, ukazują powierzchnię drastycznie różną od dobrze nam znanej – po drugiej stronie Księżyca praktycznie nie ma mórz! Istnieje wiele hipotez tłumaczących ten stan rzeczy. Według jednej z nich przed okresem synchronizacji, w czasach gdy Księżyc był jeszcze płynny, część gęstego wnętrza „przesunęła” się w kierunku Ziemi, co doprowadziło do częstszych i bardziej obfitych wylewów lawy – morza księżycowe to obszary pokryte bazaltową lawą powstałą w wyniku wybuchów starożytnych wulkanów i uderzeń meteorytów. Widoczna z Ziemi strona zawiera także więcej pierwiastków radioaktywnych. Badacze twierdzą również, że w przeszłości Księżyc obracał się o wiele szybciej, ale od około miliarda lat, dzięki dyssypacji związanej z siłami pływowymi, nasz satelita jest na stałe obrócony twarzą w kierunku do Ziemi.

Michał BEJGER

Północnoamerykański tubylczy lud Chumash z okolic dzisiejszej Kalifornii również nazywa ten zbiór gwiazd Jaszczurką.

Johann Bode: ojciec chrzestny Urana i popularyzator reguły odtwarzającej długości półosi wielkich orbit planet w Układzie Słonecznym za pomocą prostego wzoru:  $a = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n$ , gdzie  $n = -\infty, 0, 1, 2, \dots$  (równanie Titiusa–Bodego).



Gwiazdozbiór Jaszczurki. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

## Niebo jak własna kieszeń: Sierpień

Gwiazdozbiór Jaszczurki (łac. *Lacerta*), w sierpniu doskonale widoczny wieczorami na wschodzie nieba, jest położony pomiędzy Łabędziem, Pegazem, Kasjopeją i Cefeuszem. Jaszczurka została zdefiniowana jako osobny gwiazdozbiór przez Jana Heweliusza, jednak wcześniej czyniono wiele prób zagospodarowania tego znajdującego się pomiędzy wyraźnymi gwiazdozbiorami kawałka nieba – współczesny Heweliuszowi Augustin Royer nazywa ten region Berłem i Ręką Sprawiedliwości (*Sceptrum et Manus Iustitiae*), chcąc w ten sposób uhonorować swojego patrona, Ludwika XIV. Nieco później (XIX w.) Johann Bode zaproponował alternatywną nazwę, Chwała Fryderyka (*Frederici Honores*), na cześć Fryderyka II Wielkiego, króla Prus. Najjaśniejsze gwiazdy Jaszczurki tworzą kształt podobny do litery W i z tego powodu nazywana jest ona czasem Małą Kasjopeją. Jaszczurka może „pochwalić się” obiektem *BL Lacertae*, czyli prototypowym *blazarem* – galaktyką o aktywnym jądrze wykazującą dużą zmienność jasności i znaczącą polaryzację światła; początkowo mylono te obiekty z gwiazdami zmiennymi.

Pełnia Księżyca przypada drugiego sierpnia. W środku miesiąca (12–13) będziemy mogli podziwiać maksimum widowiskowych *Perseidów* (60 zdarzeń/godz., radiant w Perseuszu). Dla lubiących wstawać wcześniej atrakcją będą, być może, obserwacje wschodzącej Wenus (−4,2 m, gwiazdozbiór Bliźniąt) oraz Jowisza (−2 m, gwiazdozbiór Byka). Wieczorami natomiast nisko nad horyzontem w gwiazdozbiorze Panny zaobserwujemy obok siebie Saturna (1,34 m) oraz Marsa (1,15 m) – polecamy obserwacje tego ostatniego: na sierpień przewidziano lądowanie łazika „Curiosity”, wystrzelonego w kierunku Czerwonej Planety w listopadzie 2011 r. Obserwatorzy wyposażeni w teleskop będą mogli zapolować na Neptuna, który 24 sierpnia znajdzie się w opozycji (7,8 m, gwiazdozbiór Wodnika).

M. B.



## Zabawy ze słowami

Joanna JASZUŃSKA

Niektóre gry mogą wydawać się trudne, dopóki gracz się nie dowie, o co tak naprawdę w nich chodzi – wtedy nagle te same gry okazują się łatwe, czasem wręcz oczywiste. Dwa takie przykłady opisano w *deltoidzie* 7/2010; oto dwa kolejne.

**Gra 1.** Każde z następujących dziewięciu słów napisano na osobnym kartoniku:

GÓRY, LIST, LONT, ŁUPY, MROK, PISK, POZA, SMAR, TYKA.

Dwaj gracze na przemian biorą sobie po jednym kartoniku. Wygrywa gracz, który jako pierwszy skompletuje trzy wyrazy zawierające tę samą literę.

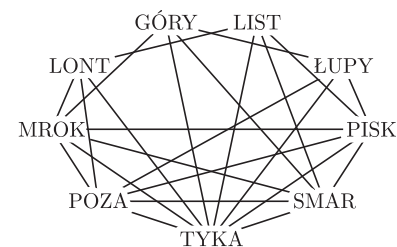
**Czy któryś z graczy może zawsze wygrać? Jeśli tak, to który i jak?**

Połączmy liniami słowa zawierające te same litery, czyli narysujmy graf, którego wierzchołkami są słowa, a krawędź oznacza wspólną literę (rys. 1). Jak widać... nic nie widać, trzeba więc jakoś ten graf uprościć.

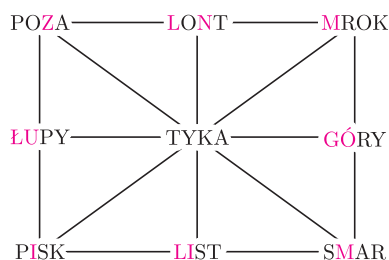
Możemy nie rozważać liter *nieistotnych* – występujących tylko w jednym lub dwóch słowach (np. G, M), bo nie da się skompletować trzech wyrazów z taką literą. Każda z pozostałych liter występuje w dokładnie trzech słowach. Ponadto dowolne dwa wyrazy mają najwyżej jedną wspólną istotną literę.

W grafie na rysunku 2 każde trzy słowa o wspólnej literze leżą na jednej prostej i na odwrót, każde trzy słowa „współliniowe” mają wspólną literę. Narysowano tylko krawędzie od pierwszego z takich słów do drugiego i od drugiego do trzeciego, a krawędź między pierwszym a trzecim (np. POZA-MROK) jest „w domyśle”.

Celem gry jest skompletowanie trzech słów o wspólnej literze, czyli słów z jednego wiersza, jednej kolumny lub jednej przekątnej na rysunku 2. Czyż nie wygląda to znajomo? Ta gra to nic innego niż zakamuflowane „kółko i krzyżyk”! Kto kiedykolwiek grał w „kółko i krzyżyk”, wie już, jak grać, żeby nie przegrać. Gra zazwyczaj kończy się remisem i, niestety, traci na atrakcyjności... chyba że gramy z niewtajemniczonym przeciwnikiem! □



Rys. 1



Rys. 2. Kolorem nieistotne litery.

**Gra 2 (jednoosobowa).** Danych jest dziesięć kartoników z następującymi słowami:

BAL, BEŻ, NIŻ, GNU, GOL, KOT, KIJ, MAJ, MUS, SET.

Celem gracza jest ułożenie ich „w kółko” tak, by każde dwa sąsiadujące słowa miały wspólną literę. Powyższa kolejność byłaby rozwiązaniem, gdyby słowa SET i BAL miały wspólną literę.

**Czy rozwiązanie istnieje? Jeśli tak, to jak je znaleźć?**

Znów narysujmy graf, łącząc krawędziami słowa o wspólnych literach. Można osiągnąć efekt podobnie nieczytelny, jak na rysunku 1, ale można też rozmieścić wierzchołki tak, jak na rysunku 3. Uzyskujemy tzw. *graf Petersena*. Celem gry jest znalezienie cyklu przechodzącego przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz, czyli tzw. *cyklu Hamiltona*. Niestety, tego w grafie Petersena zrobić się nie da... ale jak to udowodnić bez sprawdzania wszystkich możliwości?

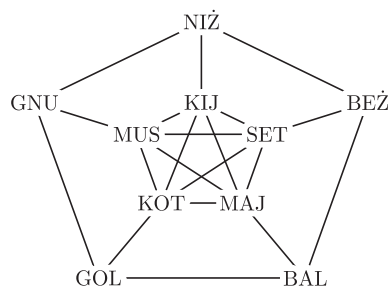
Gdyby cykl Hamiltona istniał, miałby 10 krawędzi (bo tyle jest słów). Można by pokolorować je na przemian w dwóch kolorach i w każdym wierzchołku trzecią z wychodzących z niego krawędzi pomalować trzecim kolorem. Oznaczałoby to, że graf Petersena jest *3-barwny krawędziowo*, tzn. można tak pomalować jego krawędzie trzema kolorami, by krawędzie o wspólnych wierzchołkach miały różne kolory.

Przypuśćmy więc, że graf Petersena jest 3-barwny krawędziowo. Wtedy pewne dwie niesąsiednie spośród pięciu krawędzi obwodu są jednego koloru, powiedzmy GOL-GNU i BAL-BEŻ (rys. 4). Krawędź GOL-BAL jest wówczas drugiego koloru, zatem obie krawędzie GOL-KOT i BAL-MAJ są w kolorze trzecim. Jednocześnie jedna z krawędzi NIŻ-GNU, NIŻ-BEŻ jest drugiego koloru, a jedna trzeciego, więc krawędź NIŻ-KIJ jest w kolorze pierwszym. Wynika z tego, że obie krawędzie KIJ-KOT i KIJ-MAJ są tego samego koloru (drugiego), sprzecznie z założeniem.

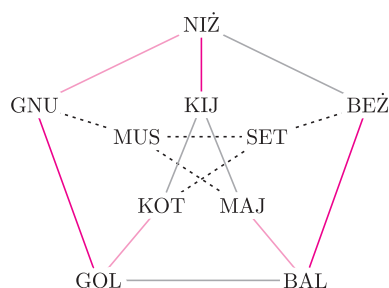
Stąd graf Petersena nie jest 3-barwny krawędziowo, a więc nie ma w nim cyklu Hamiltona, czyli gra 2 nie ma rozwiązania. □

**Zadanie domowe**

Czy gra 2 ma rozwiązanie, jeśli słowa KOT i MUS zastąpić słowami TOM i SUK?



Rys. 3



Rys. 4