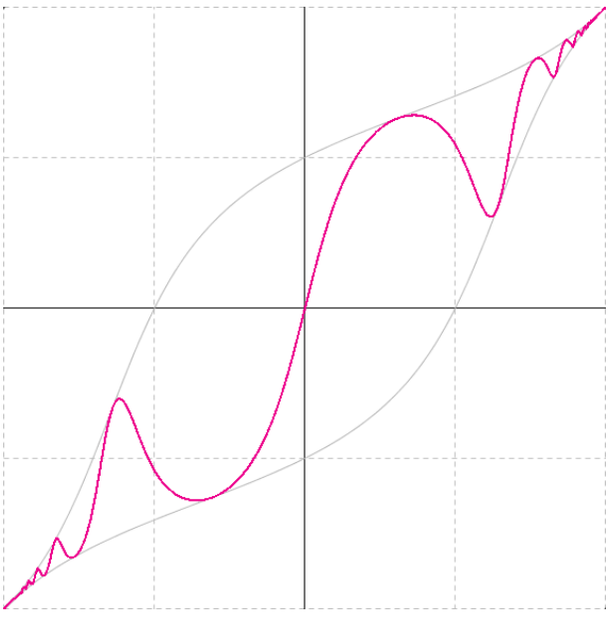
SPIS TREŚCI
NUMERU 12 (463)

W następnym numerze polecamy



nieznane wykresy znanych funkcji

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: `delta@mimuw.edu.pl` tel. 22-55-44-402.

Skład systemem TEX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA
Fran-Press: `www.franpress.pl`, infolinia 801-679-466
Garmond Press: `www.garmondpress.pl`
Kolporter: `www.kolporter.com.pl`
Pol-Perfect: `www.polperfect.com.pl`
RUCH S.A.: `www.ruch.com.pl`, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:
Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Prenumerata krajowa:
Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta. `www.prenumerata.ruch.com.pl` e-mail: `prenumerata@ruch.com.pl`

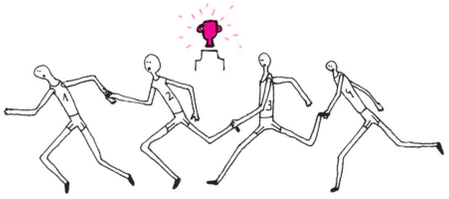
Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:
Informację o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania można uzyskać pod nr. tel. +48 (22) 693 67 75 `www.ruch.pol.pl` e-mail: `prenumerataz@ruch.com.pl`

Telefoniczne Biuro Obsługi Klienta (koszt połączenia wg taryfy operatora):
– połączenie z telefonów stacjonarnych 801 800 803
– połączenie z telefonów komórkowych +48 (22) 717 59 59

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): `deltami.edu.pl`

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**



Cztery zadania, jedno rozwiązanie

Kamila MURASZKOWSKA[*], *Edmund PUCZYŁOWSKI*[*]

Spójrzmy na cztery z pozoru zupełnie niezwiązane zadania.

Zadanie 1. n-tą liczbę Fermata definiujemy wzorem $F_n = 2^{2^n} + 1$. Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, która dzieli F_n, to $p = 2^{n+1}k + 1$ dla pewnej liczby naturalnej k.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5, to rozwinięcie dziesiętne $1/p$ jest ułamkiem okresowym, którego okres dzieli $p - 1$.

Zadanie 3. Udowodnij, że liczba osi symetrii n-kąta jest równa 0 lub dzieli n.

Zadanie 4. Na pewnej tablicy świetlnej można wyświetlać różne konfiguracje za pomocą przełączników. Każdy przełącznik ma ustalony obszar działania. Gdy się go naciśnie, to w jego obszarze zgasną wszystkie zapalone żarówki i zapalą się wszystkie te, które się nie paliły. Wykaż, że liczba konfiguracji, które możemy wyświetlić na tej tablicy, jest potęgą 2.

Może się wydawać, że byłoby bardzo trudno wskazać jakieś wspólne elementy tych problemów. Okazuje się jednak, że rozwiązania wszystkich czterech opierają się na tym samym spostrzeżeniu – fundamentalnej własności pewnych obiektów algebraicznych, o których opowiemy dalej. Spróbujemy odkryć tę własność, rozwiązując ostatnie zadanie.

Tablica świetlna składa się ze zbioru n żarówek $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Konfigurację tablicy utożsamimy z podzbiorem $K \subseteq Z$ zawierającym dokładnie te żarówki, które są w tej konfiguracji zapalone. Przełącznikowi natomiast przyporządkujemy podzbiór $P \subseteq Z$ będący obszarem jego działania. W wyniku naciśnięcia przełącznika P przy wyświetlonej konfiguracji K otrzymamy konfigurację odpowiadającą różnicy symetrycznej

$$K \oplus P = (K \cup P) \setminus (K \cap P)$$

zbiorów K i P. Liczba konfiguracji, które możemy wyświetlić, jest więc równa liczbie różnych podzbiorów zbioru Z, które możemy otrzymać ze zbiorów odpowiadających przełącznikom, stosując operację „$\oplus$”.

Przyjrzyjmy się kilku własnościom tej operacji. Wprost z własności różnicy symetrycznej zbiorów wynika, że dla dowolnych konfiguracji:

i. $\emptyset \oplus K = K \oplus \emptyset = K$,
ii. $K \oplus K = \emptyset$,
iii. $(K_1 \oplus K_2) \oplus K_3 = K_1 \oplus (K_2 \oplus K_3)$ (dzięki temu możemy pomijać nawiasy).

Zamiast pojedynczych konfiguracji rozpatrzymy teraz pewne ich zbiory. Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem przełączników, a $\mathcal{K}$ – zbiorem wszystkich konfiguracji możliwych do otrzymania za ich pomocą z konfiguracji pustej $\emptyset$ (wszystkie żarówki początkowo zgaszone). Oczywiście, jeśli dwie konfiguracje K_1 i K_2 należą do zbioru $\mathcal{K}$, to również konfiguracja $K_1 \oplus K_2$ należy do $\mathcal{K}$.

Załóżmy teraz, że naszą konfiguracją początkową jest pewna niepusta konfiguracja R. Wtedy zbiór

$$R \oplus \mathcal{K} = \{R \oplus K : K \in \mathcal{K}\}$$

opisuje wszystkie konfiguracje możliwe do uzyskania za pomocą przełączników ze zbioru $\mathcal{P}$, zaczynając od konfiguracji początkowej R. Zastanówmy się nad związkiem między zbiorami $R \oplus \mathcal{K}$ i $S \oplus \mathcal{K}$ dla różnych konfiguracji początkowych R i S. Naturalnym pytaniem jest, czy za pomocą przełączników ze zbioru $\mathcal{P}$ można uzyskać tę samą konfigurację, zaczynając od dwóch różnych konfiguracji początkowych. Załóżmy więc, że zbiory $R \oplus \mathcal{K}$ i $S \oplus \mathcal{K}$ mają niepustą część wspólną, to znaczy pewna konfiguracja możliwa jest do uzyskania zarówno z konfiguracji początkowej R, jak i z S. Innymi słowy, $R \oplus K_R = S \oplus K_S$ dla pewnych konfiguracji $K_R, K_S \in \mathcal{K}$. Wtedy na mocy własności dodawania konfiguracji $R = R \oplus K_R \oplus K_R = S \oplus K_S \oplus K_R$.

[*]Instytut Matematyki,
Uniwersytet Warszawski

Mamy więc $R \in S \oplus \mathcal{K}$, a zatem konfigurację R można uzyskać z konfiguracji S za pomocą przełączników z $\mathcal{P}$. Analogicznie dowodzimy, że $S = R \oplus K_R \oplus K_S \in R \oplus \mathcal{K}$, a stąd $R \oplus \mathcal{K} = S \oplus \mathcal{K}$.

Okazuje się więc, że dla różnych stanów początkowych tablicy zbiory konfiguracji możliwych do uzyskania za pomocą przełączników ze zbioru $\mathcal{P}$ są takie same lub rozłączne. Zbiór wszystkich możliwych konfiguracji tablicy dzieli się zatem na sumę rozłącznych zbiorów $R_1 \oplus \mathcal{K}, \ldots, R_m \oplus \mathcal{K}$ dla pewnych konfiguracji początkowych $R_1, \ldots, R_m$. Wykorzystamy jeszcze prostą obserwację, że każdy ze zbiorów $R_i \oplus \mathcal{K}$ ma tyle samo elementów co $\mathcal{K}$. Stąd liczba wszystkich możliwych konfiguracji tablicy jest wielokrotnością liczby zbiorów w $\mathcal{K}$. Oczywiście, liczba wszystkich konfiguracji tablicy jest równa 2^n (każda z n żarówek może być zgaszona lub zapalona), a więc liczba elementów zbioru $\mathcal{K}$ musi być potęgą dwójki.

Decydującą rolę w powyższym rozumowaniu odegrały własności (i)–(iii) operacji $\oplus$ oraz to, że dla dowolnych K_1, K_2 z $\mathcal{K}$ również $K_1 \oplus K_2$ jest w $\mathcal{K}$. Okazuje się, że podobne rozumowanie można zastosować w wielu innych sytuacjach – w szczególności w rozwiązaniach pozostałych zadań. Podobnie bowiem dowodzi się twierdzenia Lagrange'a dotyczącego grup, które stanowi tutaj kluczowy element rozumowań.

Rozpatrzmy zbiór G, w którym określone jest działanie „$\circ$". Zbiór ten nazwiemy *grupą*, jeśli działanie „$\circ$" spełnia następujące warunki:

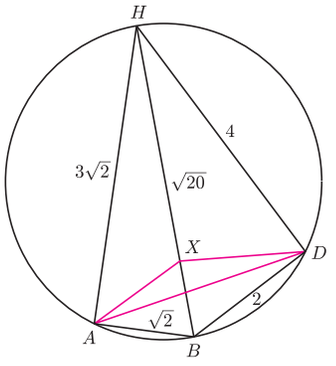
(1) jest łączne, czyli $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,
(2) ma element neutralny, oznaczany jako e, spełniający $g \circ e = e \circ g = g$ dla dowolnego elementu g z G,
(3) dla każdego elementu g z G istnieje element (oznaczany przez g^{-1}) odwrotny do niego, czyli taki, że $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Oczywiście, każda z podgrup danej grupy sama też jest grupą.

Podgrupą grupy G nazywamy podzbiór $H \subseteq G$ zamknięty na działanie „$\circ$" oraz na branie elementu odwrotnego względem tego działania. To znaczy, że jeśli elementy h_1 i h_2 należą do zbioru H, to należą do niego również elementy h_1^{-1}, h_2^{-1} i $h_1 \circ h_2$. Liczbę elementów grupy G nazywamy jej rzędem i oznaczamy $|G|$.

Rozwiązanie zadania M 1369.
Odpowiedź: minimalna wartość wyrażenia $AX + XD$ wynosi $\sqrt{10}$.

Rysując trójkąty prostokątne HAB i HDB na jednej płaszczyźnie, dostajemy czworokąt $HABD$ wpisany w okrąg.



Oczywiście, $AX + XD \geqslant AD$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X jest punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta. Szukana minimalna wartość wyrażenia $AX + XD$ to długość odcinka AD, którą możemy obliczyć z twierdzenia Ptolemeusza:

$$4 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot 3\sqrt{2} = AD \cdot \sqrt{20},$$

więc $AD = \sqrt{10}$.

Zauważmy, że określony powyżej zbiór konfiguracji tablicy świetlnej wraz z operacją „$\oplus$" jest grupą. Konfiguracja pusta $\emptyset$ jest tu elementem neutralnym, a każda konfiguracja K jest swoją odwrotnością, gdyż $K \oplus K = \emptyset$. Łatwo również sprawdzić, że zbiór konfiguracji możliwych do uzyskania za pomocą danego zbioru przełączników (gdy startuje się z konfiguracji $\emptyset$) jest podgrupą tej grupy.

Wspomniane wyżej twierdzenie Lagrange'a brzmi następująco:

Twierdzenie (Lagrange'a)**.** *Jeśli zbiór G wraz z działaniem „$\circ$" jest skończoną grupą, a H jej podgrupą, to $|H|$ dzieli $|G|$.*

Idea dowodu tego twierdzenia opiera się na pomyśle przedstawionym w rozwiązaniu zadania: zbiór elementów G można podzielić na rozłączne podzbiory postaci $gH = \{gh : h \in H\}$, równoliczne z H.

Zastosowanie tego twierdzenia do grupy konfiguracji tablicy świetlnej i jej podgrupy konfiguracji, otrzymywanych za pomocą podanego zbioru przełączników, daje natychmiastowe rozwiązanie zadania 4.

W dalszych rozważaniach będzie użyteczny pewien szczególny przypadek twierdzenia Lagrange'a. Niech G będzie grupą skończoną, a g jej dowolnym elementem. Wtedy istnieje taka liczba naturalna k, że element

$$\underbrace{g \circ \ldots \circ g}_{k}$$

(co zapisujemy w skrócie g^k) jest równy elementowi neutralnemu grupy G. Istotnie, ponieważ grupa G jest skończona, to dla pewnych liczb naturalnych $l < m$ musi zachodzić $g^m = g^l$. Ale wtedy $g^{m-l} = g^m \circ (g^{-1})^l = g^l \circ (g^{-1})^l = e$.

Najmniejszą liczbę k, taką że $g^k = e$, nazywamy rzędem elementu g i oznaczamy $o(g)$. Jest jasne, że elementy $e, g, g^2, \ldots, g^{o(g)-1}$ są parami różne oraz $\{e, g, g^2, \ldots, g^{o(g)-1}\}$ jest podgrupą grupy G. Nazywa się ją podgrupą generowaną przez g i oznacza (g). Zatem $|(g)| = o(g)$ i na mocy twierdzenia Lagrange'a $o(g)$ jest dzielnikiem $|G|$. Zauważmy jeszcze, że jeśli dla pewnej liczby całkowitej m zachodzi równość $g^m = e$, to $o(g)$ dzieli m, oraz że $g^{|G|} = e$.

Przyjrzymy się teraz przykładowi – grupie, którą wykorzystamy w rozwiązaniach zadań 1 i 2.

Niech p będzie liczbą pierwszą. Rozpatrzmy zbiór $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ z działaniem „$\odot$" określonym dla dowolnych $n, m \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ za pomocą wzoru

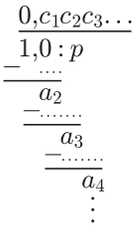
$$n \odot m = nm \bmod p.$$

Nietrudno sprawdzić, że jest to grupa. Łączność działania „$\odot$" wynika z łączności mnożenia, a elementem neutralnym jest 1. Istnienie elementu odwrotnego do danego elementu n można uzasadnić następująco. Dla różnych liczb $k, l \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ reszty z dzielenia nk i nl przez p są różne i niezerowe. W przeciwnym razie mielibyśmy, że $p \mid n(k-l)$, a stąd $p \mid n$ lub $p \mid (k-l)$, co jest niemożliwe. Dla pewnego $m \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ reszta z dzielenia nm przez p jest więc równa 1, czyli $n \odot m = 1$.

Grupę tę nazywamy *grupą multiplikatywną reszt modulo p* i oznaczamy ją przez $\mathbb{Z}_p^*$. Rząd $\mathbb{Z}_p^*$ jest, oczywiście, równy $p-1$, a więc z tego, co wiemy o własności rzędów elementów, wynika, że w $\mathbb{Z}_p^*$ dla dowolnego $r \in \mathbb{Z}_p^*$ mamy $r^{p-1} = 1$. Mamy stąd natychmiast Małe Twierdzenie Fermata, które mówi, że dla dowolnej liczby całkowitej n i dowolnej liczby pierwszej p liczba $n^p - n$ jest podzielna przez p.

Teraz możemy już rozwiązać pozostałe zadania.

Zadanie 1. Załóżmy, że liczba pierwsza p dzieli $2^{2^n}+1$. Rozpatrzmy grupę $\mathbb{Z}_p^*$ i przyjrzyjmy się rzędowi elementu 2 w tej grupie. Z założenia p dzieli liczbę $2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1)$. Zatem 2 podniesiona do potęgi 2^{n+1} w $\mathbb{Z}_p^*$ daje w wyniku 1, a więc $o(2)$ dzieli 2^{n+1}. Ponieważ jednak 2 do potęgi 2^n w $\mathbb{Z}_p^*$ to -1, więc $o(2)$ nie dzieli 2^n. Wiemy zatem, że $o(2) = 2^{n+1}$. Ponadto $o(2)$ dzieli rząd grupy $\mathbb{Z}_p^*$ równy $p-1$, więc dla pewnego naturalnego k zachodzi równość $p - 1 = 2^{n+1}k$. Stąd wynika, że $p = 2^{n+1}k + 1$.



Zadanie 2. Niech $0{,}c_1c_2c_3\ldots$ będzie rozwinięciem dziesiętnym liczby $\frac{1}{p}$. Aby wyznaczyć to rozwinięcie, wyobraźmy sobie, jak przebiega dzielenie pisemne 1 przez p. Widać, że n-ta cyfra c_n jest wynikiem dzielenia całkowitego a_n przez p, gdzie liczba a_n określona jest rekurencyjnie jako reszta z dzielenia a_{n-1} przez p pomnożona przez 10. Mamy więc $a_{n+1} = (a_n \bmod p) \cdot 10$, przy czym $a_1 = 10$. Stąd łatwo otrzymujemy jawny wzór $a_{n+1} = (10^n \bmod p) \cdot 10$.

Aby ułamek $\frac{1}{p}$ był okresowy, dla pewnych liczb naturalnych k i l musi zachodzić $a_{l+k} = a_k$. Okresem tego ułamka nazywa się najmniejszą liczbę l o tej własności. Ponieważ liczba p jest różna od 2 i 5, więc 10 mod p należy do $\mathbb{Z}_p^*$. W tej sytuacji $l = o(10)$ jest najmniejszą liczbą, dla której 10^l jest równe 1 w $\mathbb{Z}_p^*$, a w konsekwencji $a_{l+1} = a_1$. Ułamek $\frac{1}{p}$ jest więc okresowy, a jego okres równy rzędowi $o(10)$ w $\mathbb{Z}_p^*$, zatem na mocy twierdzenia Lagrange'a dzieli $p-1$.

Zadanie 3. Zbiór izometrii wielokąta składa się z symetrii osiowych o osiach przechodzących przez jeden punkt i obrotów względem tego punktu. Można wykazać, że wraz z działaniem składania przekształceń tworzy on grupę (jej elementem neutralnym jest obrót o zerowy kąt). Wynika to z następujących geometrycznych własności:

(1) złożenie dwóch obrotów jest obrotem,
(2) złożenie obrotu z symetrią lub symetrii z obrotem jest symetrią,
(3) złożenie symetrii względem przecinających się osi jest obrotem.

Wykażemy najpierw, że jeśli wielokąt ma co najmniej jedną oś symetrii, to w grupie jego izometrii jest tyle samo symetrii i obrotów. Niech O będzie zbiorem obrotów,

S – zbiorem symetrii, a s – pewną ustaloną symetrią danego wielokąta. Wtedy składając s z dowolnym obrotem, otrzymamy symetrię. Łatwo też udowodnić, że symetrie $s \circ o_1$ i $s \circ o_2$ będą różne dla różnych $o_1, o_2 \in O$, a więc $|O| \leqslant |S|$. Analogicznie, składając s z dowolną symetrią, otrzymamy obrót, a ponadto $s \circ s_1 \neq s \circ s_2$ dla różnych $s_1, s_2 \in S$. Stąd $|O| \geqslant |S|$, a zatem $|O| = |S|$.

Powodem, dla którego wygodniej rozpatrywać zbiór obrotów O, jest zamkniętość tego zbioru na działanie składania przekształceń. Zbiór obrotów z tym działaniem ma więc strukturę grupy. Jak obroty zmieniają zbiór wierzchołków wielokąta? Każdy obrót powoduje pewne cykliczne przesunięcie wierzchołków. Jeśli ponumerujemy kolejne wierzchołki od w_0 do w_{n-1}, to k-te przesunięcie cykliczne F_k przeprowadza wierzchołek w_i na $w_{(i+k) \bmod n}$. Nietrudno sprawdzić, że zbiór $\{F_0, \ldots, F_{n-1}\}$ przesunięć cyklicznych z działaniem składania tworzy grupę. Zbiór obrotów O tworzy więc podgrupę tej grupy, a zatem rząd O (równy liczbie symetrii danego n-kąta) dzieli n.

Jak zostać wynalazcą?

Stanisław BEDNAREK
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Łódzki

Wielu z nas marzyło zapewne o momencie, w którym chce się zakrzyknąć *Eureka!*, bo oto nasze działania doprowadziły do powstania nowej wiedzy, metody lub urządzenia. Część szczęśliwców lub osób z większym doświadczeniem na pewno taką chwilę z własnego życia pamięta. Mogła ona być kulminacją szeregu żmudnych prób w większości zakończonych porażkami, jak u Thomasa Edisona usiłującego skonstruować żarówkę.

Czasami odkrycia są dziełem przypadku, o czym przekonał się japoński badacz Hideki Shirakawa, pracujący nad ulepszeniem metody otrzymywania polietylenu: przy kolejnej próbie pomylił naczynia z substratem i katalizatorem, dodając tego ostatniego tysiąc razy za dużo. Otrzymana przez Shirakawę folia nie nadawała się do pakowania kanapek, ale za to świetnie przewodziła prąd elektryczny. Warto wiedzieć, że opisane tu odkrycie było początkiem drogi Shirakawy do Nagrody Nobla z chemii w 2000 roku.

Kiedy jednak mija początkowa euforia związana ze stworzeniem czegoś nowego, warto zastanowić się, co dalej. Przepisy prawa stwarzają możliwości uzyskania korzyści przez wynalazców, czyli osoby, które dokonały wynalazku. Powszechnie przyjmuje się, że wynalazek to dokonane przez człowieka rozwiązanie pewnego problemu związanego z ludzką egzystencją, które spełnia trzy podstawowe kryteria: nowości, poziomu wynalazczego i stosowalności przemysłowej. Takie sformułowanie wyklucza spośród wynalazków odkrycia naukowe, m.in. zjawisk, praw przyrody, procesów czy nowych gatunków organizmów żywych, ponieważ nie są one wytworzone przez człowieka, lecz istnieją albo zachodzą samoistnie. Wynalazkami nie są też sformułowania tych praw za pomocą wzorów matematycznych, a także teorie naukowe, wyjaśniające duże grupy zjawisk w oparciu o przyjęte założenia i modele, np. mechanika kwantowa. Wynalazkami nie są też wytwory ludzkiej działalności o charakterze czysto estetycznym czy informacyjnym, a więc wszelkiego rodzaju dzieła sztuki: rzeźby, powieści, utwory muzyczne, a także roczniki, kroniki itd. Wynalazkami mogą być natomiast sposoby wytwarzania różnego rodzaju przedmiotów czy otrzymywania związków chemicznych.

Czy zatem z grona wynalazców wykluczeni są automatycznie odkrywcy, teoretycy, matematycy i artyści? Niekoniecznie. Odkrywca może zbudować przyrząd wykorzystujący stwierdzone przez siebie zjawisko, a artysta może być twórcą choćby specjalnego podnośnika eksponującego jego dzieło sztuki. Na przykład Roger Penrose, badający ongiś pewne układy wielokątów całkowicie pokrywających płaszczyznę w sposób aperiodyczny, stwierdził, że przy odpowiednio dobranej kolorystyce mają one zachęcające walory estetyczne i mogą służyć do pokrywania ścian lub podłóg. Opatentował zatem te układy, znane dziś jako kafelki Penrose'a, a później wygrał nawet batalię sądową z firmą Kimberly-Clark, produkującą pokryty podobnym wzorem papier toaletowy. Z kolei Rogerowi Schlafly'emu udało się opatentować nawet… dwie bardzo duże liczby pierwsze, co wzbudziło ożywioną dyskusję o granicach stosowalności prawa patentowego.

Dla lepszego wyjaśnienia definicji wynalazku warto dokładniej przedyskutować trzy wymienione w niej kryteria. **Kryterium nowości** oznacza, że istotne cechy rozwiązania przedstawionego przez twórcę jako wynalazek nie mogą występować w innych rozwiązaniach służących do tego samego celu i znanych z wszelkich dostępnych i sprawdzalnych źródeł informacji. Te źródła to przede wszystkim: bazy danych urzędów patentowych, podręczniki, artykuły, katalogi, prospekty, strony internetowe, a także produkty występujące na rynku. Spełnienie **kryterium poziomu wynalazczego**, zwanego też niekiedy **kryterium nieoczywistości**, polega na tym, że nowe rozwiązanie nie może w sposób oczywisty wynikać ze znanych rozwiązań i dostępnej wiedzy, która ich dotyczy. Nie będzie więc wynalazkiem dźwignia dwustronna o wydłużonym ramieniu przykładanej przez nas siły, ułatwiająca podnoszenie dużych ciężarów. Jest bowiem jasne, że wartość siły działającej na ciało na końcu ramienia dźwigni jest odwrotnie proporcjonalna do długości tego ramienia. **Kryterium stosowalności przemysłowej** jest dość zrozumiałe, a jego spełnienie oznacza możliwość produkcji wynalezionego przedmiotu lub zastosowania sposobu, stanowiącego przedmiot wynalazku, na szerszą skalę. Kryterium to powinno dać się spełnić przy obecnych możliwościach technicznych naszej cywilizacji.

Stąd też sposób wydobywania surowców z powierzchni Księżyca może mieć szanse uznania za wynalazek, a sposób pozbywania się śmieci przez wystrzelenie ich w kierunku czarnej dziury – zdecydowanie nie.

Potwierdzeniem dokonania wynalazku jest uzyskanie dokumentu, nazywanego patentem. Dokument pozwala wynalazcy, nazywanemu w języku prawniczym twórcą wynalazku, na odpłatne udzielenie innym osobom lub instytucjom prawa do komercyjnego wykorzystania wynalazku, czyli zysku ze sprzedaży licencji. Uprawnionym jest zazwyczaj twórca wynalazku lub instytucja zatrudniająca twórcę, która zapewniła odpowiednie środki do dokonania wynalazku. Aby uzyskać patent, należy przesłać odpowiednie dokumenty do urzędu patentowego jednego lub większej liczby krajów, w których przewiduje się uzyskanie potwierdzenia i ochrony wynalazku. Jest to tzw. zgłoszenie wynalazku.

Dawniej do każdego z krajów, w których wynalazek miał być chroniony, należało występować oddzielnie i w każdym z nich obowiązywały nieco inne zasady. W 1990 roku Polska podpisała „Układ o współpracy patentowej" (*Patent Cooperation Treaty*, PCT) i procedura zgłoszeniowa została uproszczona. Zamiast wielu zgłoszeń wystarczy zgłoszenie międzynarodowe, dokonane tylko w jednym spośród 139 krajów, które przystąpiły do PCT. Dokumentacja zgłoszeniowa, oprócz standardowego formularza podania, zawiera opis zgłaszanego wynalazku, sporządzony według ściśle określonego wzoru. Opis ten musi zawierać: tytuł wynalazku, jego przeznaczenie, stan techniki, istotę wynalazku i jego zalety, a także szczegółowe przedstawienie budowy i zasady działania, rysunki, zastrzeżenia patentowe oraz skrót opisu. Oto kilka najważniejszych informacji o wymienionych składnikach opisu. W tytule nie podaje się nowych cech, które ma zgłaszany wynalazek, a jedynie odwołuje się do znanych rozwiązań. Jeżeli więc zgłaszany jest samochód elektryczny o zwiększonej sprawności, zasilany bateriami polimerowymi, to tytuł powinien brzmieć „Samochód elektryczny". Stan techniki musi zawierać krótkie opisy znanych rozwiązań, mających takie same zastosowanie, jak zgłaszany wynalazek, ze szczególnym zwróceniem uwagi na cechy różniące je od tego, co zgłaszamy. Jest to zwykle najbardziej obszerna i pracochłonna część zgłoszenia, ale należy sporządzić ją bardzo wnikliwie. Jeżeli bowiem pominiemy jakieś znane rozwiązania, to zapewne wykryją to eksperci urzędu patentowego i nowość naszego rozwiązania zostanie podważona. Istota wynalazku określa w skrócie, co jest nowością i różni nasz wynalazek od znanych rozwiązań. Następnie podaje się opis budowy i zasady działania, który powinien ujawniać wszystkie ważne elementy tego, co zgłaszamy. Uzupełnieniem tej części są rysunki lub schematy. Jeżeli pominiemy jakiś istotny element i eksperci z urzędu patentowego będą mieli wątpliwości, wtedy spotkamy się z zarzutem „niedostatecznego ujawnienia wynalazku" i wezwaniem do uzupełnienia opisu, co wydłuży całe postępowanie. Zastrzeżenia patentowe to zwięźle zapisane (w punktach) nowe cechy, które różnią nasze rozwiązanie od innych i które zamierzamy chronić. Cechy te podaje się po charakterystycznym zwrocie *znamienny tym, że...* Skrót opisu stanowi streszczenie pełnego przedstawienia budowy zgłaszanego przez nas rozwiązania. Skrót ten wraz z jednym rysunkiem przedstawiającym rozwiązanie w całości posłuży do publikacji informującej wszystkich zainteresowanych o naszym zgłoszeniu.

Po przesłaniu zgłoszenia do urzędu patentowego i uiszczeniu odpowiedniej opłaty (w przypadku Urzędu Patentowego RP wynosi ona obecnie 550 zł) zgłoszenie jest sprawdzane pod względem formalnym i wstępnie badane przez ekspertów. Twórca otrzymuje potwierdzenie przyjęcia zgłoszenia wraz z nadanym mu numerem. Gdy wszystko okaże się w porządku, po 18 miesiącach wspomniany skrót opisu zostaje opublikowany w „Biuletynie Urzędu Patentowego", a pełny opis zamieszczony w bazie danych dostępnej za darmo przez stronę internetową Urzędu, `www.uprp.pl`. Dzięki temu wszystkie osoby zainteresowane mogą wypowiedzieć się na temat nowości, poziomu wynalazczego i innych cech zgłoszenia. Na te wypowiedzi Urząd czeka jeszcze 3 lata. Gdy nikt tych cech nie zakwestionuje (nie zgłosi tzw. przeciwstawień), eksperci jeszcze raz badają sprawę. Jeżeli wynik jest pozytywny, to Urząd wydaje decyzję o udzieleniu patentu. Po kilku miesiącach od tej decyzji twórca otrzymuje dokument z godłem państwa na kolorowej okładce kryjącej pełny opis zgłoszenia wynalazku, nazywany odtąd opisem patentowym.

O udzieleniu patentu Urząd informuje również w specjalnym czasopiśmie pt. „Wiadomości Urzędu Patentowego". Od tego momentu można nie tylko czuć się wynalazcą, ale także czerpać z tego korzyści materialne, jeżeli uda się sprzedać licencję. Oczywiście, nie wszystkie zgłoszenia przechodzą pozytywnie opisaną wyżej procedurę – w Urzędzie Patentowym RP jest ich około 50%.

A jeżeli czujemy, że wypełnianie opisanych wyżej dokumentów przerasta nasze siły lub zabiera cenny czas, który można by wykorzystać do uzyskania innych wynalazków? Zadanie kontaktów z Urzędem Patentowym i załatwianie wszelkich spraw formalnych możemy wówczas powierzyć (odpłatnie) specjalnie przygotowanej osobie, czyli rzecznikowi patentowemu. W dużych miastach są też Regionalne Ośrodki Informacji Patentowej, w których rzecznicy pełnią czasem dyżury, przeznaczone na bezpłatne konsultacje i pomoc początkującym wynalazcom. Warto dodać, że wynalazcą może być też osoba niepełnoletnia – wówczas w postępowaniu przed urzędem jest ona reprezentowana przez rodzica lub opiekuna prawnego.

Urząd Patentowy RP udzielił dotychczas około 200 tys. patentów, a Urząd Patentowy USA około 7 mln – liczba obywateli w Polsce wynosi około 38 mln, zaś Stany Zjednoczone mają ich około 308 mln. Należy przy tym pamiętać, że twórcami części wynalazków opatentowanych w USA są obywatele innych krajów, podczas gdy Polski dotyczy to w bardzo małym stopniu. Na podstawie tych danych łatwo obliczyć, że gdyby nawet twórcami połowy wynalazków opatentowanych w USA byli obywatele innych krajów, to wynalazku dokonuje jeden na 44 statystycznych Amerykanów i jeden na 190 statystycznych Polaków. Piszący te słowa absolutnie nie ma zamiaru podejmować tematu „wynalazek a sprawa polska", uważa jednak, że także Czytelnicy *Delty* mają twórczy potencjał mogący przyczynić się do poprawy tych wskaźników (oraz innych aspektów życia, których dotyczą ich wynalazki!) na korzyść naszego kraju.

Więcej informacji można znaleźć w książce *Poradnik wynalazcy* pod redakcją A. Pyrży (Warszawa 2009), dostępnej bezpłatnie w Ośrodkach Informacji Patentowej i na stronie Urzędu Patentowego RP `www.uprp.pl`. Warto też zajrzeć do działu „Klub wynalazców" w miesięczniku *Młody Technik*.

Dlaczego niepotrzebne nam hasło do skrzynki mailowej?

Michał ZAJĄC[*]

Zapewne zdecydowana większość Czytelników ma skrzynkę poczty elektronicznej. Dostęp do takiej skrzynki uzyskuje się przez podanie w specjalnym formularzu na stronie internetowej nazwy użytkownika i hasła. Te dane są następnie wysyłane w zaszyfrowanej formie do serwera pocztowego, który porównuje je z umieszczonymi na nim wzorcami. Tak, w dużym uproszczeniu, wygląda proces weryfikacji użytkownika na serwerze.

Ściśle rzecz biorąc, do serwera wysyłane jest nie hasło, ale wartość funkcji skrótu obliczona na jego podstawie.

Czy można wyobrazić sobie inną metodę uzyskiwania dostępu do skrzynki pocztowej? Taką, by nie trzeba było podawać hasła? W końcu stanowi to pewne zagrożenie dla naszego bezpieczeństwa: jeśli ktoś przechwyci, w ten czy inny sposób, nasze hasło i nazwę użytkownika, to uzyska nieograniczony dostęp do naszych zasobów – listów, dokumentów, historii przejrzanych stron – czego zapewne sobie nie życzymy.

Dowody z wiedzą zerową

Z pomocą przychodzą wtedy tzw. dowody z wiedzą zerową. Są to protokoły pozwalające na potwierdzenie faktu znajomości pewnej informacji bez ujawniania jej. Dla lepszego zilustrowania tego typu protokołów rozpatrzmy następujący przykład weryfikacji tożsamości w banku:

Przykład 1. W protokole tym będzie brało udział dwóch „graczy” – pierwszy będzie chciał potwierdzić swoją tożsamość i oznaczany będzie literą P (od angielskiego słowa *Prover*; gracz ten jest nazywany także klientem), drugi będzie weryfikował informacje przesyłane przez gracza P i oznaczany będzie literą V (od angielskiego słowa *Verifier*; inna nazwa tego gracza to weryfikator).

W protokole wykorzystywane są dwa grafy o n wierzchołkach, G_0 i G_1. Gracz P będzie starał się udowodnić, że są one izomorficzne. Należy tu nadmienić, że stwierdzenie, czy dane dwa grafy są izomorficzne, jest w ogólnym przypadku problemem trudnym obliczeniowo i nie jest znane jego rozwiązanie działające w czasie wielomianowym.

Grafy G_0 i G_1 są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja π przeprowadzająca wierzchołki grafu G_0 na wierzchołki grafu G_1 zachowująca strukturę krawędzi. Dokładniej, jeśli wierzchołki każdego z grafów ponumerujemy od 1 do n, to szukana bijekcja π jest permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ o następującej własności: jeśli $u, v \in G_0$ są połączone krawędzią, to $\pi(u), \pi(v) \in G_1$ również są połączone krawędzią, i odwrotnie, jeśli $u', v' \in G_1$ są połączone krawędzią, to $\pi^{-1}(u'), \pi^{-1}(v')$ również. Piszemy wówczas, że $\pi(G_0) = G_1$.

Ale jaki związek ma dowodzenie izomorficzności grafów z uwierzytelnianiem? Możemy przyjąć, że w bazie danych banku znajduje się informacja z imieniem i nazwiskiem gracza P oraz grafami G_0 i G_1, znanymi publicznie, podanymi przez gracza P podczas zakładania konta. Gracz P, chcąc przekonać bank, że on to on, przedstawia się, a następnie wykazuje, że jest osobą, która potrafi udowodnić izomorficzność grafów G_0 i G_1. Mógłby to, oczywiście, zrobić, zdradzając permutację π, jednak po takim zabiegu nic nie stałoby na przeszkodzie, by nieuczciwy gracz V^* po poznaniu permutacji podszył się pod klienta P, wypłacając w jego imieniu dużą ilość gotówki. Zamiast tego gracze P i V przeprowadzą między sobą k razy następujący protokół (oznaczmy go jako $\mathcal{P}$):

1. Klient P wybiera losową permutację φ zbioru n-elementowego i przesyła do weryfikatora V graf $H = \varphi(G_0)$.
2. Weryfikator V przysyła graczowi P losowy bit $b \in \{0, 1\}$.
3. Jeśli otrzymany przez gracza P bit ma wartość 0, to wybiera on nową permutację $\psi = \varphi^{-1}$, a w przeciwnym przypadku $\psi = \pi\varphi^{-1}$. Gracz P wysyła następnie permutację ψ do weryfikatora V.
4. Weryfikator V sprawdza teraz, czy $\psi(H) = G_b$. Jeśli tak, to uznaje, że gracz P pomyślnie przeszedł proces weryfikacji. Jeśli nie, odrzuca jego próbę i przerywa protokół.

Od takiego protokołu będziemy wymagać trzech rzeczy. Po pierwsze, protokół przeprowadzony przez uczciwego gracza P musi zostać zaakceptowany. Po drugie, próba udowodnienia nieprawdziwego twierdzenia (w tym przypadku – próba wykazania, że dwa nieizomorficzne grafy są izomorficzne) powinna

[*]Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

powodować zatrzymanie i brak akceptacji protokołu (z prawdopodobieństwem bliskim 1). Podobnie będzie z próbą udowodnienia prawdziwego twierdzenia przy braku znajomości przez gracza permutacji wyznaczającej izomorfizm. Trzecią własnością jest wiedza zerowa, tj. weryfikator V po wykonaniu (nawet wielokrotnym) protokołu $\mathcal{P}$ nie może podszyć się pod gracza P.

Na początku wykażemy, że jeśli klient P jest uczciwy, to weryfikator V zaakceptuje jego próbę uwierzytelnienia się. Otóż jeżeli bit wysłany przez weryfikatora V w drugim kroku protokołu miał wartość 0, to uczciwy klient P odpowiedział na niego permutacją φ^{-1}, co daje $\psi(H) = \varphi^{-1}(H) = \varphi^{-1}\varphi(G_0) = G_0$. Załóżmy teraz, że przesłany bit miał wartość 1. Klient P wysyła wtedy permutację $\psi = \pi\varphi^{-1}$, więc $\psi(H) = \pi\varphi^{-1}(H) = \pi\varphi^{-1}\varphi(G_0) = \pi(G_0) = G_1$. Zatem w obu przypadkach $\psi(H) = G_b$ i weryfikator V akceptuje wykonanie protokołu.

Wykażemy teraz, dlaczego protokół $\mathcal{P}$ zostanie przerwany przez weryfikatora V, jeśli oszust P^* będzie próbował przekonać go do nieprawdziwego twierdzenia. Przyjmijmy więc, że klient P^* został pozytywnie zweryfikowany przez V, podczas gdy grafy G_0 i G_1 nie są izomorficzne. Załóżmy, że w każdym z k wykonań protokołu oszust umiał odpowiedzieć poprawnie, zarówno wtedy, gdy zadany w drugim kroku bit miał wartość 0, jak i 1. Niech ψ_0 i ψ_1 oznaczają funkcje ψ otrzymane w trzecim kroku algorytmu, gdy zadany przez weryfikatora V bit miał odpowiednio wartość 0 i 1. Mamy wtedy $\psi_0(H) = G_0$ i $\psi_1(H) = G_1$ oraz $G_1 = \psi_1\psi_0^{-1}(G_0)$. Czyli, znając ψ_0 i ψ_1, oszust P^* jest w stanie wskazać izomorfizm pomiędzy grafami G_0 i G_1, co nie jest możliwe. Mogło oczywiście być tak, że w każdym z k wykonań protokołu gracz P^* poprawnie zgadł wartość bitu, o jaki zostanie zapytany przez sprawdzającego V (łatwo wykazać, że stworzenie takiego grafu H, iż oszust P^* jest w stanie poprawnie odpowiedzieć na dokładnie jedną wartość bitu b, nie stanowi problemu, jednak wtedy szansa na powodzenie tej iteracji protokołu wynosi dokładnie $\frac{1}{2}$, gdyż takie jest prawdopodobieństwo, że weryfikator V wylosuje bit b o ustalonej wartości). Jednak to zdarzenie ma prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{2^k}$, a więc dla odpowiednio dużego k jest zaniedbywalnie małe.

Powyższe rozumowanie wykazuje również, iż nieuczciwy gracz P^*, który próbuje przekonać weryfikatora V do tego, że zna permutację κ, taką że $\kappa(G_0) = G_1$, mimo braku tej wiedzy, też nie zakończy protokołu sukcesem (tj. zaakceptowaniem przez weryfikatora V).

Aby wykazać, że weryfikator V w podanym protokole nie dowiaduje się niczego istotnego o sekrecie gracza P, tj. mimo wielokrotnego przeprowadzenia protokołu nie jest w stanie podszyć się pod niego, wprowadza się pojęcie symulatora działającego w czasie wielomianowym (z prawdopodobieństwem równym $1 - \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest zaniedbywalnie małe). Symulator M wykonuje protokół z weryfikatorem V, „podszywając się" pod P (M nie ma dostępu do prywatnych informacji gracza P, a jedynie zna jego odpowiedzi na pewną liczbę zapytań w procesie weryfikacji). Protokół $\mathcal{P}$ jest bezpieczny, gdy weryfikator V nie jest w stanie stwierdzić, czy operacje, które wykonuje, przeprowadza z prawdziwym graczem P, czy z symulatorem M (prawdopodobieństwo, że odpowie dobrze, jest równe $\frac{1}{2} + \delta$, gdzie $\delta > 0$ jest zaniedbywalnie małe). Formalny opis symulatora M i przeprowadzenie pełnego rozumowania wymaga wprowadzenia dużej ilości nowej terminologii i zostanie w tym artykule pominięte. Zainteresowani Czytelnicy są zachęcani do przeczytania literatury podanej na końcu artykułu.

Inny przykład protokołu z wiedzą zerową (opartego nie na izomorfizmie grafów, ale na znajdowaniu w nich cyklu Hamiltona) znajdą Czytelnicy w artykule Krzysztofa Kulewskiego z *Delty* 4/2005.

Σ-protokoły

Zaprezentowany powyżej protokół musiał być wykonywany wiele razy pod rząd, by można go było użyć do weryfikacji, ponieważ poprawne „przejście" jego pojedynczej iteracji przez nieuprawnionego gracza ma szansę powodzenia $\frac{1}{2}$.

Aby ograniczyć liczbę iteracji do minimum (czytaj: do jednej), wprowadzono protokoły, w których gracz weryfikujący V przesyła w drugim kroku zamiast pojedynczego bitu b ciąg $e \in \{0,1\}^k$ zwany *wyzwaniem*, który traktujemy jako liczbę naturalną zapisaną binarnie. Ilustracją tej metody może być protokół zaprezentowany poniżej:

Przykład 2. Niech p i q będą liczbami pierwszymi, takimi że q jest dzielnikiem $p-1$, i niech g będzie elementem rzędu q w grupie $\mathbb{Z}_p^*$. Ponadto niech $h = g^w \bmod p$. W zaprezentowanym protokole wartości p, q, g i h są publiczne, a gracz P będzie przekonywać gracza V, że zna wartość w. Zrobi to w następujący sposób:

1. Gracz P wybiera losowo liczbę r z ciała $\mathbb{Z}_q$, a następnie wysyła graczowi V liczbę $a = g^r \bmod p$.
2. Weryfikator V wybiera losowe wyzwanie $e \in \{0,1\}^k$ i wysyła je graczowi P.
3. Gracz P oblicza $z = ew + r$ i wysyła tę wartość weryfikatorowi.
4. Weryfikator sprawdza, czy $g^z \equiv ah^e \pmod p$. Jeśli tak, akceptuje protokół, a jeśli nie, przerywa go.

Teraz już widać, czemu Σ-protokoły zawdzięczają swoją nazwę. Jeśli wiadomości przesyłane pomiędzy graczami oznaczymy strzałkami, otrzymana łamana będzie przypominała grecką literę Σ.

Przede wszystkim zauważmy, że uczciwy gracz P zostanie zawsze zaakceptowany przez gracza V. Jak łatwo sprawdzić, $g^z = g^{ew+r} = g^r \cdot (g^w)^e \equiv ah^e \pmod p$, co jest zgodne z ostatnim punktem protokołu.

Σ-protokoły mają jeszcze jedną interesującą własność: jeśli gracz P potrafi przy danym a odpowiedzieć na dwa różne wyzwania e i e', to potrafi znaleźć świadka w (a zatem odpowiedzieć na dowolne wyzwanie). Przyjmując, że odpowiedzią gracza P na wyzwanie e było z, a odpowiedzią na wyzwanie e' było z', mamy:

$$g^z \equiv ah^e \pmod p, \qquad g^{z'} \equiv ah^{e'} \pmod p.$$

Dzieląc jedno równanie przez drugie i mając na uwadze fakt, że $e - e' \neq 0$, otrzymamy

$$g^{z-z'} \equiv h^{e-e'} \pmod p, \qquad g^{\frac{z-z'}{e-e'}} \equiv h \pmod p.$$

W ten sposób uzyskaliśmy $w = \frac{z-z'}{e-e'} \bmod q$ (dzielenie rozumiemy tutaj jako mnożenie przez odwrotność modulo q). Zatem jeśli gracz P nie zna sekretu w, to jest w stanie odpowiedzieć poprawnie na co najwyżej jedno wyzwanie weryfikatora V (na jakie wyzwanie konkretnie będzie chciał odpowiadać, wybiera, tworząc wiadomość a). Prawdopodobieństwo, że gracz V wyśle mu wybrane przez niego wyzwanie e, wynosi $\frac{1}{2^k}$, a więc jest zaniedbywalnie małe.

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że Σ-protokoły nie mają wspomnianej wcześniej własności bycia protokołem z wiedzą zerową. Są nimi, jeśli przyjmiemy dodatkowe założenie – o uczciwości weryfikatora V. Wydaje się, że jest ono niezbyt praktyczne, ale własność ta jest wystarczająca do budowy wielu bardziej złożonych konstrukcji, które mają zastosowanie w realnym świecie. Na przykład, można dzięki nim zbudować efektywny system obsługi płatności elektronicznych, który zapewnia taką samą anonimowość jak płacenie gotówką. Ale to już całkiem inna historia...

Rozwiązanie zadania M 1370.
Zauważmy, że dla $x \geqslant -1$ zachodzi

$$x \leqslant \frac{1}{3} + \frac{4}{3}x^3,$$

gdyż

$$\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3} - x = \frac{1}{3}(4x^3 - 3x + 1) =$$
$$= \frac{1}{3}(4x(x^2-1) + x + 1) =$$
$$= \frac{1}{3}(x+1)(2x-1)^2 \geqslant 0.$$

Zatem

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n}{3} + \frac{4}{3}(x_1^3 + \ldots + x_n^3) = \frac{n}{3}.$$

Literatura

[1] M. Bellare, O. Goldreich, *On defining proofs of knowledge*, Crypto 92.
[2] I. Damgård, *On Σ-protocols*, `https://services.brics.dk/java/courseadmin/CPT/documents/getDocument/Sigma.pdf?d=33739`.
[3] I. Damgård, J. B. Nielsen, *Commitment schemes and zero-knowledge protocols*, `https://services.brics.dk/java/courseadmin/CPT/documents/getDocument/ComZK08.pdf?d=30199`.
[4] A. Fiat and A. Shamir, *How to prove yourself: practical solutions to the identification and signature problem*, Crypto 86.
[5] O. Goldreich, S. Micali, A. Wigderson, *Proofs that yield nothing but their validity and a methodology of cryptographic protocol design*, FOCS 86, 174–187.
[6] C. Schnorr, *Efficient signature generation by smart cards*, J. Cryptology 4(3), 1991.

życie na żywo 27

Jesień noblistów

Tegoroczne Nagrody Nobla w dziedzinie nauk przyrodniczych wnikają w intymny świat komórek i atomu. Dotyczą wielu lat pracy i wątpliwości, upadków i zwycięstw, nadziei i zniechęcenia. Tak, te wszystkie odczucia towarzyszą gigantom nauki!

Nagrodzone badania w dziedzinie chemii wykonano dzięki zastosowaniu wiedzy w zakresie biochemii, genetyki, biofizyki, fizyki, informatyki. Nagrodę przyznano za odkrycie receptorów sprzężonych z białkami G. W tym złożonym układzie długi łańcuch białkowy 7 razy przenika pętlami przez błonę komórkową. Łańcuch jednym koniuszkiem wystaje poza komórkę i z tym fragmentem oddziałują różne czynniki zewnętrzne. Drugi koniec „pływa" we wnętrzu komórki. Receptor zmienia kształt w momencie zetknięcia się z czynnikiem zewnętrznym, wtedy od końca wewnętrznego oddzielają się inne, dotychczas sprzężone z nim białka, zwane białkami G, wywołując różne „zachowania" komórki. Są setki receptorów, reagujących na różne czynniki, dlatego wydzielenie jednego, specyficznego receptora, na przykład dla adrenaliny, kończy się uzyskaniem znikomych ilości substancji do dalszych badań. Zadziwia natomiast wspólny typ reakcji na zewnętrzne czynniki dla jednokomórkowców i człowieka. Bardzo stary i bardzo skuteczny ewolucyjnie.

Robert Lefkowitz rozpoczął badania receptorów sprzężonych z białkami G w latach 70. (miał dwadzieścia kilka lat, pewno właśnie skończył studia), a było to wtedy, gdy największy autorytet w farmakologii ogłosił, że takich receptorów nie ma. Po 10 latach, choć uzyskał bardzo przekonujące wyniki, nie miał „w ręku" wyodrębnionych receptorów i wielu uczonych dalej kwestionowało realność takich bytów. Oczyszczenie receptorów, podzielenie ich na składniki, odtworzenie znowu z tych składników funkcjonalnego układu i wprowadzenie odtworzonego receptora do żywej komórki, która własnych receptorów nie ma – ten długi cykl badań dopiero pod koniec XX wieku zamknął usta niedowiarków. No i jeszcze w laboratorium Lefkowitza pojawił się młody doktorant (Brian Kobilka), którego temat zafascynował. Ten sklonował gen kodujący receptor, dzięki czemu wyprodukował tego receptora tyle, że mógł przystąpić do prób krystalizacji. O krystalizacji białek związanych z błoną komórkową wiedziano jedynie, że jest niezwykle trudna, jeżeli nie niemożliwa. Kobilka wspomina nawet, że sam podjął się tego zadania, bo nie chciał proponować beznadziejnych badań doktorantowi lub stażyście po doktoracie.

Polskim młodym naukowcom dedykuję wiadomość, że jeszcze 10 lat temu Kobilka, mający dwójkę dzieci i niepracującą wówczas zawodowo żonę, musiał wziąć dodatkową pracę zarobkową jako lekarz w pogotowiu ratunkowym.

W decyzji Komitetu Noblowskiego powiedziano, że modele struktury receptorów należą do najpiękniejszych obrazów naukowych, jakie stworzyli uczeni. Piękno nauki nie jest przez wszystkich dostrzegane, choć ta jej cecha jest bardzo pociągająca. Trudno jest znaleźć taki proces fizjologiczny, w którym nie uczestniczą receptory sprzężone z białkami G. Mają one wielkie znaczenie praktyczne: dziś 50% leków działa na te receptory (np. β-blokery w chorobach układu krążenia). 4% naszych genów koduje receptory, dla 600 z nich nie znamy jeszcze ich funkcji. Receptory uczestniczą w procesach widzenia, węchu, odpowiadają za działanie całej dużej grupy hormonów, za reakcje na stresy różnego rodzaju, regulują ciśnienie krwi, bilans wodny, pracę przewodu pokarmowego. I tak dalej, tak dalej...

Ciekawych relacji z pierwszej ręki namawiam na obejrzenie pod `http://www.youtube.com/` filmu zatytułowanego „Robert Lefkowitz (Duke University) Part 1 Seven Transmembrane Receptors".

Magdalena FIKUS

Zostać fizykiem cząstek choć na jeden dzień

Tomasz FRÜBOES[*]

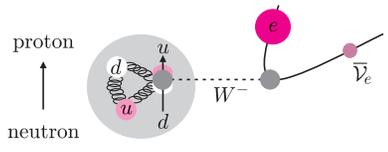
Na wiosnę tego roku grupa uczniów z XIV liceum im. Stanisława Staszica w Warszawie miała okazję posmakować pracy fizyków. Badacze z Uniwersytetu Warszawskiego oraz Narodowego Centrum Badań Jądrowych gościli w gmachu liceum w pewną deszczową sobotę, by poprowadzić warsztaty w ramach programu *International Masterclasses – hands on particle physics*. Ich celem miało być pokazanie, na czym *naprawdę* polega doświadczalne badanie cząstek elementarnych. W niniejszym artykule chcielibyśmy zapoznać z tymi zagadnieniami także Czytelników *Delty*.

Krótkiemu wprowadzeniu do fizyki cząstek elementarnych i podstaw działania detektorów poświęcone były otwierające zajęcia wykłady.

Materia, jaką znamy, zbudowana jest z kwarków i leptonów. Znamy sześć różnych rodzajów kwarków – górny (u), powabny (c) i top (t), każdy o ładunku $+\frac{2}{3}$e (e jest ładunkiem równym ładunkowi elektronu), oraz kwarki dolny (d), dziwny (s) i bottom (b) o ładunku $-\frac{1}{3}$e. Z kwarków zbudowane są nukleony: protony (dwa kwarki u oraz kwark d, co w sumie daje ładunek +e), a także neutrony (jeden kwark u oraz dwa kwarki d – łączny ładunek 0). Znamy również 6 różnych rodzajów leptonów – elektron, mion oraz taon (wszystkie o ładunku $-$e) oraz odpowiadające im neutrina – elektronowe, mionowe i taonowe (wszystkie o ładunku 0). Dla każdej z wymienionych wyżej cząstek istnieje antycząstka o dokładnie takich samych własnościach, ale o ładunku przeciwnym; na przykład antycząstką elektronu jest pozyton o ładunku +e.

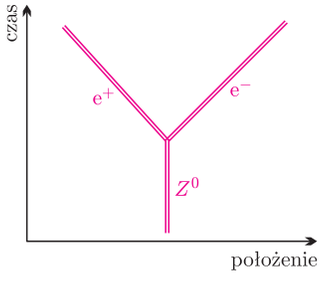
Oddziaływania elektromagnetyczne i słabe są tak naprawdę przejawami tego samego oddziaływania elektrosłabego, ale to temat na oddzielną opowieść. Snuliśmy ją np. w *Delcie* 5/2000.

Składniki materii mogą ze sobą oddziaływać. Na przykład, dzięki przyciąganiu elektromagnetycznemu proton łączy się z elektronem, tworząc atom wodoru. Trzy z czterech znanych oddziaływań fundamentalnych są opisywane na poziomie kwantowym w ramach Modelu Standardowego (MS) cząstek elementarnych. Pozostałe oddziaływania w MS to: oddziaływanie silne, odpowiedzialne m.in. za łączenie kwarków w hadrony (np. proton), oraz oddziaływanie słabe, odpowiedzialne np. za rozpad neutronu. MS nie opisuje natomiast oddziaływań grawitacyjnych.



Rys. 1. Rozpad neutronu zachodzi dzięki oddziaływaniom słabym przenoszonym tutaj przez bozon W.

Oddziaływania w MS zachodzą dzięki wymianie cząstek nazywanych nośnikami oddziaływań. Nośnikiem oddziaływania elektromagnetycznego jest znany wszystkim foton, oddziaływanie słabe zapewniają cząstki W^+, W^- oraz Z^0 (indeks oznacza ładunek elektryczny w jednostkach e), silne zaś – gluony. Rysunek 1 przedstawia przykład oddziaływania słabego, w którym neutron rozpada się na proton, elektron oraz neutrino przez wymianę bozonu W^-.



Rys. 2. Diagram czasoprzestrzenny przedstawiający rozpad cząstki Z na parę elektron-pozyton w układzie odniesienia, w którym cząstka Z spoczywa. Cząstki potomne mają pędy równe co do wartości, ale przeciwnie skierowane.

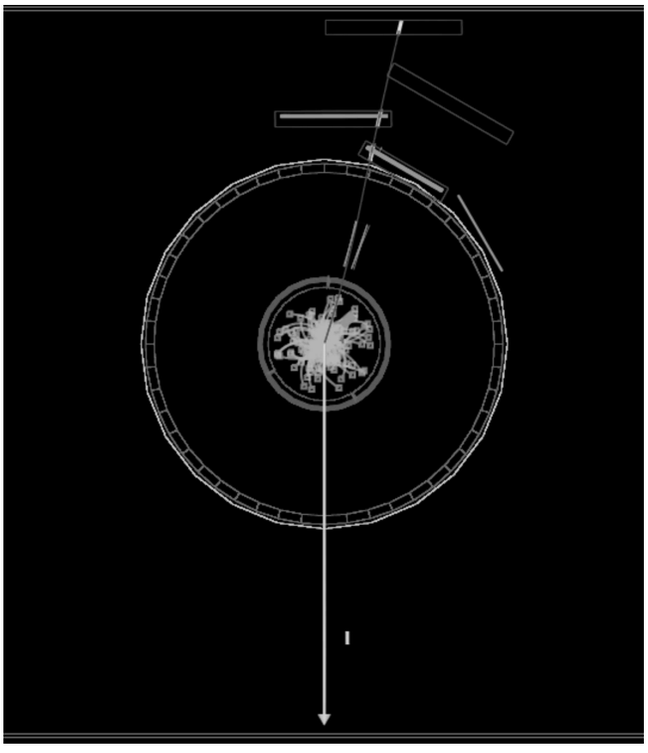
Wielkie polowanie doświadczalne coraz bardziej osacza ostatni pozostający do odkrycia składnik MS: bozon Higgsa, związany z pewnym polem, które powoduje różnicowanie oddziaływań elektromagnetycznych i słabych oraz jest źródłem masy innych cząstek MS. Istnieje spora szansa, że gdy ten numer *Delty* trafi do kiosków i Internetu, zespoły eksperymentów działających przy LHC (ang. *Large Hadron Collider*, Wielki Zderzacz Hadronów) w laboratorium CERN pod Genewą będą świętować odkrycie bozonu Higgsa.

Cząstki W i Z żyją bardzo krótko – rozpadają się na inne w czasie krótszym niż 10^{-24} s, co nie pozwala ich bezpośrednio zaobserwować w doświadczeniach. MS przewiduje, że cząstka Z niemal tak samo często rozpada się na elektron i pozyton jak na mion i antymion (rys. 2). Innym przewidywaniem MS jest konkretny stosunek liczby zderzeń w LHC, w których produkowana jest cząstka W, do liczby przypadków z produkcją cząstki Z. Przewidywania te można (i należy!) sprawdzać, badając przypadki zarejestrowane przez eksperymenty działające przy LHC. Jednym z takich eksperymentów jest eksperyment CMS (ang. *Compact Muon Solenoid*), w który zaangażowani są fizycy z UW i NCBJ.

Uczestnicy zajęć własnoręcznie zanalizowali niemal dwie setki prawdziwych przypadków zarejestrowanych w LHC.

Uzbrojeni w przypomniane wyżej podstawowe wiadomości z fizyki cząstek elementarnych możemy zabrać się za analizę prawdziwych danych z LHC.

[*]doktorant, Narodowe Centrum Badań Jądrowych



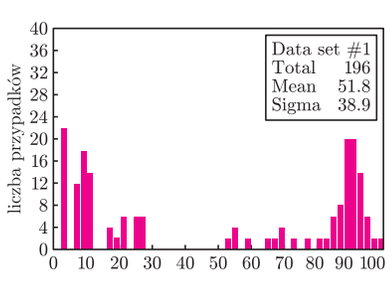
Rys. 3. Jeden z analizowanych przypadków zarejestrowanych w LHC.

W szczególności, powinniśmy móc określić, czy dany przypadek oddziaływania zarejestrowany w detektorze to taki, w którym produkowana jest cząstka W czy Z, a także, na jakie cząstki potomne się rozpada – elektrony czy miony.

Rysunek 3 przedstawia jeden z zarejestrowanych w detektorze przypadków. Długa, skierowana ku górze linia przedstawia zrekonstruowany w detektorze tor mionu o dużym pędzie (słabo zakrzywiony przez pole magnetyczne w detektorze). Gąszcz zakrzywionych linii w centralnej części obrazuje zrekonstruowane tory innych cząstek powstałych w tym samym zderzeniu dwóch protonów. Ostatnim ważnym elementem rysunku jest wektor skierowany w dół, równy co do wartości i kierunku sumie tzw. pędów poprzecznych (składowych pędu prostopadłych do osi wiązki) wszystkich cząstek zrekonstruowanych w zderzeniu. Z zasady zachowania pędu wynika, iż suma ta powinna być równa zeru (taka była przed kolizją, bo zderzające się protony mają pędy tej samej wartości skierowane przeciwnie). W tym przypadku wartość sumy była istotnie różna od zera, co wskazuje na produkcję neutrina, które oddziałuje zbyt słabo, by mogło zostać zarejestrowane. Z dużym prawdopodobieństwem można zatem przyjąć, że był to przypadek, w którym nastąpiła produkcja cząstki W, która następnie rozpadła się na mion i neutrino. W zasadzie cząstka taka może jeszcze rozpaść się na parę elektron-neutrino, taon-neutrino lub dwa kwarki. Możliwości te odpowiadałyby jednak innemu obrazowi zarejestrowanemu w detektorze. Elektron, chętnie oddziałujący z materią, ma znacznie krótszy zasięg w detektorze od mionu, taon żyje bardzo krótko i rozpada się, zaś produkcja kwarków powoduje powstanie innych cząstek naładowanych silnie, które ostatecznie łączą się w hadrony tworzące strumienie cząstek zwane dżetami.

Z powyższego wynika, że tylko w przypadku rozpadów cząstki Z możemy zarejestrować obydwie cząstki potomne (elektrony i pozytony lub miony i antymiony) i zmierzyć ich pędy. Wielkości te możemy następnie wykorzystać do wyznaczenia tzw. masy niezmienniczej, odpowiadającej całkowitej relatywistycznej energii rozpadającej się cząstki w układzie odniesienia, w którym cząstka ta spoczywa. Wówczas jednak jedyną formą energii, posiadaną przez rozpadającą się cząstkę, jest energia spoczynkowa, dana wzorem $E = mc^2$. Pomiar masy niezmienniczej odpowiada zatem w rozważanym przypadku pomiarowi masy cząstki Z. Wykres uzyskanych w różnych przypadkach mas niezmienniczych cząstki Z przedstawiony jest na rysunku 4. Wiadomo, że masa ta jest równa około 91,2 GeV/c^2, co dobrze widać na rozkładzie, podobnie jak fakt, że w badanej próbce wystąpiło wiele przypadków, w których para leptonów powstała z rozpadu cząstek innych niż Z.

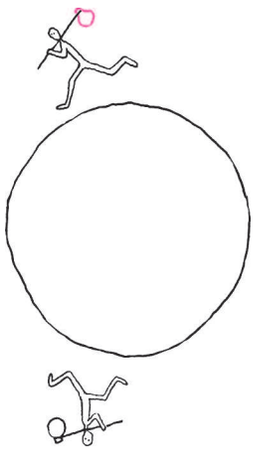
Na zakończenie dnia odbyła się wideokonferencja prowadzona przez fizyków z CERN-u. Podczas niej prezentowane były wyniki uzyskane tego dnia w Warszawie oraz w dwóch innych szkołach z Belgii i Niemiec.



Rys. 4. Rozkład masy niezmienniczej dla przypadków, w których obserwowano dwa naładowane leptony.

Czy tego typu analizy, dotyczące wszak cząstek znanych od 30 lat i dobrze od tego czasu zbadanych, mogą być ważne lub interesujące dla *prawdziwych* fizyków? Oczywiście! Nie wolno zapominać, że LHC i działające przy nim detektory to stanowiąca fascynujące osiągnięcie techniczne, ale także bardzo skomplikowana maszyneria. Zanim użyjemy jej do wyprawy w zakresy energii, gdzie spodziewamy się znaleźć nowe cząstki i nowe oddziaływania, powinniśmy mieć pewność, że nasze pomiary mają sens – dla cząstek i oddziaływań znanych.

Następne warsztaty *Materclasses* odbędą się wiosną 2013 roku na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w dwie z marcowych sobót. Więcej informacji można uzyskać, pisząc na adres `masterclasses@fuw.edu.pl`.

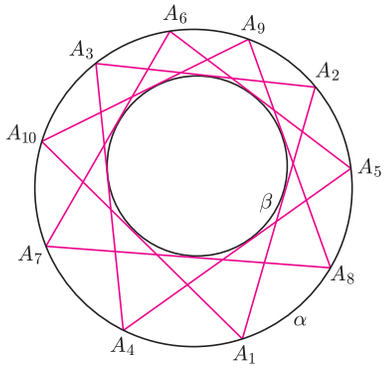


Wędrówki po okręgu

Urszula SWIANIEWICZ

Matematycy od wielu lat zajmują się wędrówką po okręgu. Jednym z najbardziej znanych przykładów jest chyba skakanie po nim w określonym kierunku tak, by między kolejnymi punktami, w których się znajdziemy, była określona odległość a (mierzona wzdłuż łuku). Naturalne staje się wówczas pytanie, czy skacząc tak po okręgu, wrócimy kiedykolwiek do punktu wyjścia (widać, że rozwiązanie problemu nie zależy od punktu startowego)? Odpowiedź nasuwa się prędko – powrót nastąpi tylko wówczas, gdy stosunek długości okręgu do liczby a jest liczbą wymierną. Spróbujmy tym razem powędrować w inny sposób, określony geometrycznie.

Oznaczmy nasz okrąg przez α, a w jego wnętrzu umieśćmy drugi (niekoniecznie współśrodkowy) okrąg β. Wędrówka będzie wyglądała następująco: z punktu A_1 na okręgu α prowadzimy styczną do okręgu β. Niech punkt A_2 będzie drugim (różnym od A_1) punktem przecięcia stycznej z okręgiem α – tam właśnie powędrujemy. Kolejne kroki wyglądają analogicznie – z punktu A_n wędrujemy po stycznej do okręgu β aż do punktu A_{n+1} leżącego na okręgu α (jak na rysunku 1).



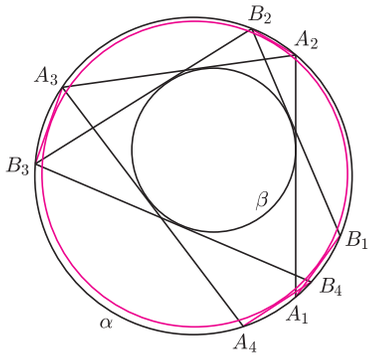
Rys. 1

Przy tak określonej wędrówce również pojawia się niejedno pytanie. Czy wrócimy kiedyś do punktu wyjścia, tak jak na rysunku? I jak wygląda na α zbiór punktów, do których uda nam się powrócić? Odpowiedzi okazują się niezwykle zaskakujące – to, czy uda nam się wrócić do punktu wyjścia, nie zależy od wyboru tego punktu! Jeśli wędrując z pewnego miejsca, zakończymy wędrówkę, to zaczynając z dowolnego innego miejsca, również nam się to uda, co więcej – nastąpi to po tej samej liczbie „kroków”, a w czasie wędrówki tyle samo razy „obejdziemy” okrąg. Mówi o tym szczególny przypadek tzw. Wielkiego Twierdzenia Ponceleta, który sformułowany formalnie brzmi następująco:

Wielkie Twierdzenie Ponceleta różni się od dowodzonego tu twierdzenia tym, że α i β mogą być dowolnymi, niekoniecznie tego samego rodzaju stożkowymi (elipsami, parabolami, hiperbolami), nie zakłada się niczego o ich wzajemnym położeniu oraz rozszerza się styczność także na asymptotyczność.

Twierdzenie. *Dany jest okrąg α oraz okrąg β, leżący w jego wnętrzu. Niech A_1 będzie dowolnym punktem na okręgu α, zaś $A_2, A_3, \ldots$ takimi punktami na α, że dla każdego i prosta A_iA_{i+1} jest styczna do okręgu β oraz $A_i \neq A_{i+2}$. Analogicznie określmy punkty B_i. Wówczas, jeśli dla pewnego n zachodzi $A_n = A_1$, to również $B_n = B_1$.*

Choć twierdzenie to można udowodnić dzięki metodom geometrii rzutowej, istnieje również niezwykle pomysłowy dowód wykorzystujący jedynie proste fakty geometryczne. Rozwiązania wielu problemów geometrii uzyskuje się przez dorysowanie na rysunku pewnej prostej lub odcinka. Nam przyda się okrąg (można zobaczyć go na rysunku 2), choć fakt jego istnienia (czyli styczności wszystkich odcinków A_iB_i do jednego okręgu) nie jest wcale oczywisty.



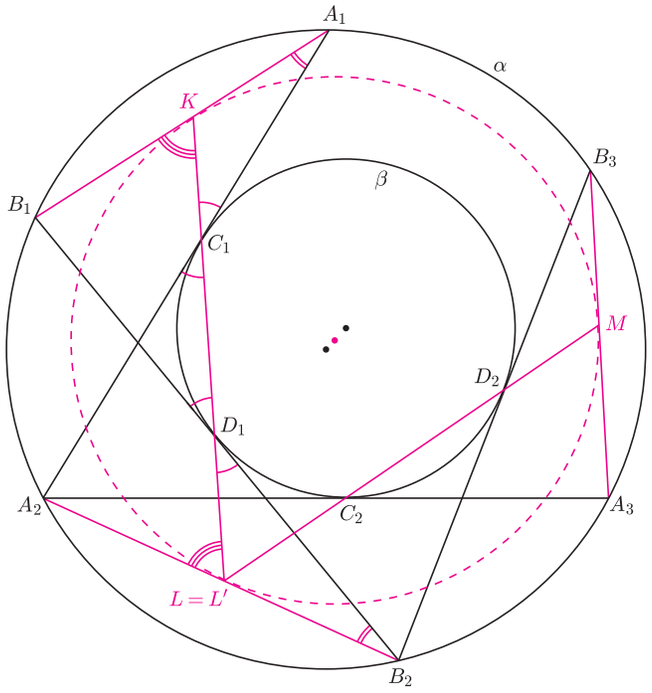
Rys. 2

Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że B_1 leży po drugiej stronie prostej A_1A_2 niż okrąg β oraz że B_2 leży po drugiej stronie prostej A_2A_3 niż okrąg β. Czytelnik Wnikliwy bez trudu wykaże, że wynika z tego twierdzenie w całej ogólności. Nie będziemy również zajmować się przypadkiem, gdy okręgi α i β są współśrodkowe – wówczas twierdzenie jest oczywiste.

Przyjrzyjmy się punktom A_1, A_2, B_1, B_2. Niech C_1 i D_1 będą odpowiednio punktami styczności okręgu β z prostymi A_1A_2 i B_1B_2, zaś K i L niech będą punktami przecięcia prostej C_1D_1 odpowiednio z odcinkami A_1B_1 i A_2B_2 (jak na rysunku 3). Mamy wówczas

$$\sphericalangle KC_1A_1 = \sphericalangle A_2C_1D_1 = \sphericalangle B_1D_1C_1 = \sphericalangle LD_1B_2$$

oraz $\sphericalangle B_1A_1A_2 = \sphericalangle B_1B_2A_2$. Stąd $\sphericalangle B_1KL = \sphericalangle A_2LK$ (są to kąty zewnętrzne



Rys. 3

w trójkątach KC_1A_1 i LD_1B_2). W takim razie istnieje okrąg ω_1 styczny do prostych A_1B_1 i A_2B_2 odpowiednio w punktach K i L. Stosunek pól trójkątów $A_2D_1C_1$ i $B_2D_1C_1$ jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na wspólną podstawę D_1C_1, a więc również stosunkowi odcinków A_2L i B_2L. Z tego faktu i z otrzymanych równości kątów wynika, że

$$\frac{A_2L}{B_2L} = \frac{[A_2D_1C_1]}{[B_2D_1C_1]} = \\ = \frac{A_2C_1 \cdot C_1D_1 \cdot \sin \sphericalangle A_2C_1D_1}{B_2D_1 \cdot C_1D_1 \cdot \sin \sphericalangle B_2D_1C_1} = \frac{A_2C_1}{B_2D_1},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Stąd i z podobieństwa trójkątów LB_2D_1 i KA_1C_1 oraz A_2LC_1 i B_1KD_1 mamy

$$\frac{A_1K}{A_1C_1} = \frac{B_2L}{B_2D_1} = \frac{A_2L}{A_2C_1} = \frac{B_1K}{B_1D_1}.$$

Z poniższego lematu (którego dowód Czytelnik Pracowity może przeprowadzić z pomocą wskazówek z marginesu) otrzymujemy wniosek, że środki okręgów α, β i ω_1 są współliniowe.

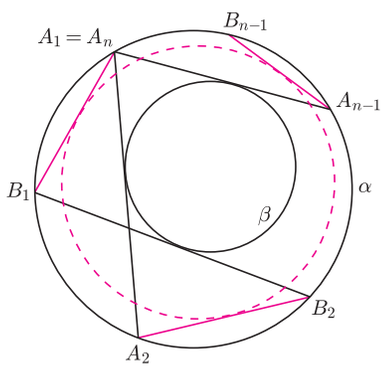
Dowód lematu najłatwiej przeprowadzić metodami analitycznymi – wprowadzając współrzędne punktu P oraz środków okręgów o_1 i o_2 oraz długości promieni o_1 i o_2. Wyrażając a_P i b_P przez te wartości, łatwo przekształcić zależność $\frac{a_P}{b_P} = \lambda$ do równania na współrzędne punktu P, które okazuje się równaniem okręgu. Współliniowość środków trzech okręgów z lematu wynika z symetrii warunku na punkt P względem tej prostej.

Lemat. *Dane są dwa okręgi o_1 i o_2 oraz liczba $\lambda \neq 1$. Dla dowolnego punktu P leżącego na zewnątrz okręgów a_P, b_P oznaczają odległości punktu P od punktów styczności prostych przechodzących przez P stycznych odpowiednio do okręgów o_1 i o_2. Wówczas zbiór punktów P, dla których $\frac{a_P}{b_P} = \lambda$, jest zbiorem pustym lub okręgiem o środku leżącym na prostej łączącej środki o_1 i o_2.*

Niech C_2 i D_2 będą punktami styczności okręgu β odpowiednio z prostymi A_2A_3 i B_2B_3, zaś L' i M – punktami przecięcia prostej C_2D_2 odpowiednio z odcinkami A_2B_2 i A_3B_3. Powtarzając wcześniejsze rozumowanie, stwierdzamy, że istnieje okrąg ω_2 styczny do A_2B_2 i A_3B_3 w punktach L' i M, a jego środek leży na prostej przechodzącej przez środki okręgów α i β. Zauważmy, że $L = L'$ – punkty te leżą na odcinku A_2B_2 oraz

$$\frac{A_2L}{B_2L} = \frac{A_2C_1}{B_2D_1} = \frac{A_2C_2}{B_2D_2} = \frac{A_2L'}{B_2L'}.$$

Wynika z tego, że okręgi ω_1 i ω_2 są styczne do prostej A_2B_2 w tym samym punkcie, a ich środki leżą na pewnej ustalonej prostej k (przechodzącej przez środki okręgów α i β). Jeśli $A_2B_2 \not\perp k$, mamy $\omega_1 = \omega_2$. Ten sam wniosek możemy otrzymać, jeśli $A_2B_2 \perp k$, wówczas bowiem punkty A_1 i B_1 są symetryczne względem prostej k odpowiednio do punktów B_3 i A_3, więc okręgi ω_1 i ω_2 są symetryczne względem prostej k, a ich środki leżą na tej prostej. Czytelnik Spostrzegawczy dostrzeże, że pokazaliśmy w ten sposób styczność prostej A_iB_i do okręgu ω_1 dla dowolnego i.



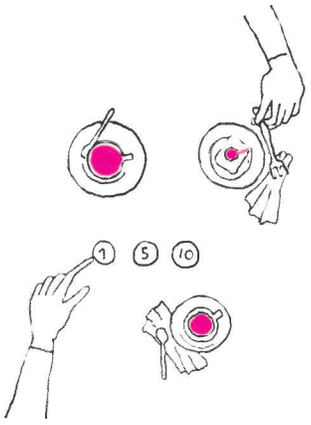
Rys. 4

Przyjrzyjmy się ostatniemu rysunkowi, by dokończyć nasz dowód. Odcinki A_1B_1 i A_2B_2 są rozłączne i styczne do okręgu ω_1, stąd A_1A_2 przecina ten okrąg. Skoro $A_n = A_1$, zachodzi również $A_{n+1} = A_2$. Ponieważ punkty A_i oraz B_i leżą na okręgu α na zmianę (punkt B_i leży po przeciwnej stronie łuku A_iA_{i+1} niż okrąg β), to B_1 i B_n leżą na tym samym łuku A_1A_2, a więc po tej samej stronie prostej A_1A_2. Proste A_1B_1 i $A_nB_n = A_1B_n$ są styczne do okręgu ω_1, a zatem $B_1 = B_n$.

Tak oto znaleźliśmy odpowiedź na pytanie o zbiór punktów, dla których wędrówka po okręgu α zakończy się po skończonej liczbie kroków – jest to zbiór pusty lub cały okrąg. Jak jednak rozpoznać, z którą z tych dwóch sytuacji mamy w danym przypadku do czynienia? Poszukiwanie odpowiedzi na to i wiele innych pytań pozostawiamy Czytelnikom.

Numizmatyka dla zachłannych

Wyobraźmy sobie następującą grę. Na stole w jednym rzędzie leży n monet o różnych nominałach. Dwoje graczy – Ania i Bartek – wykonuje na przemian ruchy, zaczyna Ania. Ruch polega na zabraniu jednej monety z lewego lub prawego końca rzędu. Wynikiem gry jest, oczywiście, suma nominałów monet zgromadzonych przez każdego z graczy. Jak powinna grać Ania, by uzyskać jak największą sumę, jeśli wie ona, że Bartek będzie grał optymalnie (tzn. będzie starał się zmaksymalizować swoją sumę)?



Na rozgrzewkę rozważmy prosty przykład dla $n = 4$:

1 5 10 2

Spróbujmy zastosować strategię zachłanną, polegającą na tym, że w każdym ruchu wybieramy ten kraniec, na którym znajduje się moneta o większym nominale. Zatem w pierwszym ruchu Ania weźmie 2:

1 5 10

Optymalnym ruchem Bartka w takiej sytuacji jest wzięcie 10. Po czym Ania weźmie 5, a Bartek 1. W takiej sytuacji *przewaga* Ani nad Bartkiem wyniosła $2 - 10 + 5 - 1 = -4$ (przez przewagę rozumiemy tu sumę nominałów zgromadzonych przez jednego z graczy pomniejszoną o sumę nominałów przeciwnika – nie przeszkadza nam to, że czasem ta przewaga będzie ujemna).

Okazuje się jednak, że w powyższym przykładzie Ania mogła zagrać lepiej. Wzięcie 1 w pierwszym ruchu powoduje, że Bartek bierze 5, z kolei Ania bierze 10, a Bartek 2. W takiej sytuacji przewaga Ani wynosi $1 - 5 + 10 - 2 = 4$.

Naiwna strategia zachłanna nie zawsze się opłaca, potrzebujemy zatem czegoś lepszego. Okazuje się, że jeśli liczba monet n jest parzysta, to Ania ma bardzo prostą strategię, dzięki której może zawsze uzyskać nieujemną przewagę, niezależnie od nominałów monet. Wyróżnijmy co drugą monetę w rzędzie:

1 5 10 2

Zauważmy, że istnieje strategia, w której Ania zabierze wszystkie wyróżnione monety. Istotnie, przed każdym ruchem Ani dokładnie na jednym krańcu będzie wyróżniona moneta (i tę monetę zabierze Ania), zaś przed każdym ruchem Bartka żadna z monet na krańcach nie będzie wyróżniona (więc Bartek nie będzie miał szans zabrać żadnej wyróżnionej monety).

Ania ma jednak wybór: może wyróżnić albo monety na pozycjach nieparzystych, albo monety na pozycjach parzystych. Oczywiście, wybierze ona ten wariant, który da jej większą sumę nominałów.

Jasne jest, że suma ta będzie równa co najmniej połowie całkowitej sumy nominałów.

Czytelnicy zechcą sprawdzić, że dla poniższego przykładu z bardziej „egzotycznymi” nominałami

(∗) 

Ania może uzyskać przewagę równą $17 - 16 = 1$, zabierając monety z pozycji parzystych. Pytanie brzmi, czy ta strategia jest optymalna, tzn. czy gwarantuje Ani najlepszy możliwy wynik? Spróbujmy podejść do sprawy metodycznie. Oznaczmy wartości kolejnych nominałów w rzędzie przez $a[1], a[2], \ldots, a[n]$. Zauważmy, że w dowolnym momencie gry na stole znajduje się spójny podciąg monet. Dla ustalenia uwagi niech będą to monety na pozycjach o numerach $i, i+1, \ldots, j$ (dla $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$). Oznaczmy przez $d[i,j]$ maksymalną możliwą do uzyskania przewagę dla gracza, który w tej sytuacji wykonuje ruch – powiedzmy, że będzie to Ania. Ma ona do wyboru dwie możliwości. Wzięcie monety z lewego krańca (o numerze i) spowoduje przejście do sytuacji, w której na stole znajdują się monety o numerach $i+1, i+2, \ldots, j$. W tej sytuacji przewaga przeciwnika (Bartka) wyniesie $d[i+1,j]$, zatem przewaga Ani będzie równa $-d[i+1,j]$. Dodając zysk $a[i]$ z i-tej monety, widzimy, że po tym ruchu przewaga Ani wyniesie $a[i] - d[i+1,j]$. Rozumując analogicznie, otrzymujemy, że wzięcie monety z prawego krańca (o numerze j) daje jej przewagę $a[j] - d[i,j-1]$. Zatem wartości tablicy d można wyznaczyć za pomocą następującej rekurencji:

$$d[i,j] = \begin{cases} a[i] & \text{dla } i = j, \\ \max(a[i] - d[i+1,j], a[j] - d[i,j-1]) & \text{dla } i < j. \end{cases}$$

Na marginesie znajduje się tablica dla naszego ciągu (∗). Przykładowo, aby wyznaczyć wyróżniony element tablicy, obliczamy

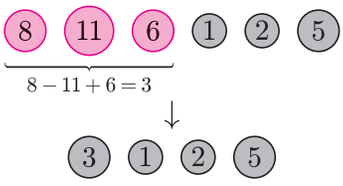
$$d[1,6] = \max(a[1] - d[2,6], a[6] - d[1,5]) = \max(8-9, 5-2) = 3.$$

Tak więc przewaga Ani w naszym przykładzie wynosi 3. Można ją uzyskać, biorąc w pierwszym ruchu monetę o nominale 5, a dalej grając zachłannie.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	8	3	3	2	2	**3**
2		11	5	6	6	9
3			6	5	5	2
4				1	1	4
5					2	3
6						5

Powyższa tabelka koduje optymalną strategię dla całej gry. Problematyczne jest jednak to, że do jej wyznaczenia potrzebujemy wykonać $n(n-1)/2$ obliczeń, nawet jeśli chcemy wyznaczyć tylko pierwszy ruch Ani lub jej przewagę w grze. Podamy teraz prostszy sposób na wyznaczanie tych rzeczy.

Znajdźmy w ciągu trzy monety na kolejnych pozycjach $i, i+1, i+2$, których nominały spełniają nierówności $a[i] \leqslant a[i+1] \geqslant a[i+2]$, i zastąpmy je jedną monetą o nominale $a[i] - a[i+1] + a[i+2]$. Jeśli istnieje więcej takich trójek, to wybieramy dowolną z nich. Okazuje się (choć nie jest to ani oczywiste, ani łatwe do uzasadnienia), że taka operacja nie zmienia przewagi Ani. Stosując ją w naszym przykładzie (∗), dostajemy:



Jeśli ciąg nominałów jest bitoniczny (tzn. do pewnego momentu malejący, a dalej rosnący – czyli nie uda się znaleźć trzech monet spełniających powyższy warunek), to w takim przypadku działa już strategia zachłanna. Jest tak dlatego, że niezależnie od kolejnych ruchów

Ciąg bitoniczny to również taki, który do pewnego momentu rośnie, a potem maleje, ale tu takimi nie będziemy się zajmowali.

największa moneta będzie zawsze znajdowała się na jednym z krańców ciągu. Zatem przewagę Ani w przypadku ciągu bitonicznego bardzo łatwo obliczyć – wystarczy zsumować liczby w porządku nierosnącym, biorąc co drugą liczbę ze znakiem minus. W naszym przypadku będzie to $5-3+2-1=3$.

Czytelnicy zechcą sprawdzić, że w przykładzie

(**) 

po zastosowaniu trzech operacji uzyskujemy bitoniczny ciąg

zatem i tym razem przewaga wynosi $5-4+2=3$.

A co z wyznaczeniem optymalnego ruchu? Otóż, jeśli w bitonicznym ciągu, powstałym po serii operacji, lewy nominał wynosi co najmniej tyle ile prawy (a zatem wzięcie monety z lewego krańca jest optymalnym ruchem), to również w pierwotnym ciągu wzięcie monety z lewego krańca jest optymalnym ruchem. Analogicznie w przypadku prawego krańca. Zatem w ciągu (**) wzięcie 6 z lewego krańca jest optymalne, gdyż w ciągu bitonicznym nominał na lewym krańcu jest większy niż ten na prawym ($5>4$).

Ostatecznie otrzymujemy przepis, który pozwala nam wyznaczyć optymalny ruch i wymaga jedynie liczby obliczeń rzędu n.

Małą Deltę przygotował Tomasz IDZIASZEK

Kącik przestrzenny (14): Inwersja w przestrzeni i rzut stereograficzny

Kiedy na płaszczyźnie mamy do czynienia z okręgami, to bardzo często posługujemy się rachunkiem na kątach, ponieważ znamy wiele przydatnych twierdzeń i faktów z tego zakresu. Niestety, trudno o analogiczne narzędzia w przestrzeni. Stanowi to wielki kłopot, gdy zmagamy się z zadaniami o sferach. Istnieje jednak kilka innych technik, skutecznych w zadaniach o okręgach, które działają również w przestrzeni. Są to: potęga punktu, jednokładność oraz inwersja. O tej ostatniej metodzie opowiemy w tym kąciku.

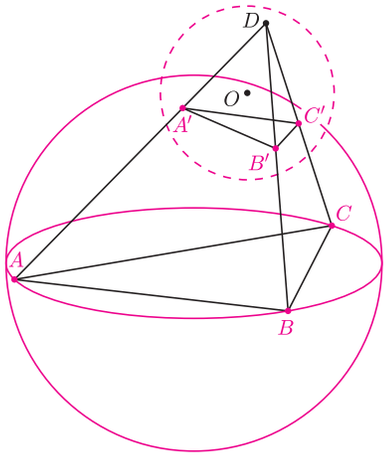
Przypomnijmy najpierw definicję i proste własności. Inwersją względem sfery S o środku O i promieniu R (mówi się o nich często: środek inwersji i promień inwersji) nazywamy przekształcenie, które przypisuje punktowi $A\neq O$ taki punkt A^*, leżący na półprostej $OA^{\rightarrow}$, że $OA^*\cdot OA=R^2$. Widać podobieństwo do definicji inwersji względem okręgu: ona wnętrze okręgu rozciąga na całe zewnętrze, a zewnętrze wpycha do wewnątrz – inwersja względem sfery podobnie zamienia jej wnętrze z zewnętrzem.

Inwersja względem sfery ma wiele przydatnych własności – oto niektóre z nich:

- inwersja jest przekształceniem odwrotnym do siebie,
- płaszczyzny i sfery przechodzą na płaszczyzny lub sfery,
- proste i okręgi przechodzą na proste lub okręgi,
- płaszczyzny i proste przechodzące przez środek inwersji przechodzą na siebie,
- płaszczyzny i proste nieprzechodzące przez środek inwersji przechodzą odpowiednio na sfery i okręgi przechodzące przez środek inwersji,
- sfery i okręgi nieprzechodzące przez środek inwersji przechodzą odpowiednio na sfery i okręgi nieprzechodzące przez środek inwersji,
- inwersja zachowuje kąty między krzywymi – kąt między krzywymi to kąt między prostymi stycznymi do tych krzywych w ich punkcie przecięcia.

Czytelnik dostrzeże, iż – niestety – nie można mówić o zachowaniu kąta między powierzchniami, gdyż pojęcie kąta między powierzchniami sensu nie ma: płaszczyzny styczne do dwóch powierzchni w różnych ich punktach wspólnych mogą tworzyć różne kąty dwuścienne.

Wygodnie jest jednak mówić o kątach między płaszczyznami, czy między sferami, czy też między płaszczyznami i sferami, bo w tych przypadkach rozwartość powstałych kątów dwuściennych nie zależy od tego, który punkt wspólny rozpatrujemy. Takie kąty są również przez inwersję zachowywane. Wykorzystamy to w następującym zadaniu, którego płaski odpowiednik jest banalnym rachunkiem na kątach.



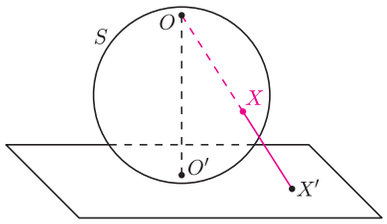
Rys. 1

1. (Rosja 2001) *Sfera S o środku w środku okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina krawędzie DA, DB, DC czworościanu $ABCD$ odpowiednio w punktach A', B', C'. Płaszczyzny styczne do tej sfery odpowiednio w punktach A', B', C' przecinają się w punkcie O. Wykazać, że punkt O jest środkiem sfery opisanej na czworościanie $A'B'C'D$.*

Rozwiązanie. Najpierw przetłumaczmy tezę na język inwersji. Należy po prostu wykazać, że sfera przechodząca przez punkty A, B, C, A', B', C' i sfera opisana na czworościanie $A'B'C'D$ są prostopadłe (rys. 1). Zauważmy, że

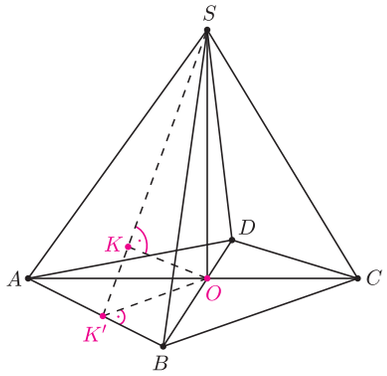
$$DA \cdot DA' = DB \cdot DB' = DC \cdot DC' = r^2$$

dla pewnej liczby r. Rozważmy inwersję o środku D i promieniu r. Zauważmy, że sfera S przechodzi na siebie, a punkty A', B', C' odpowiednio na A, B, C (i na odwrót). Obrazem drugiej z rozważanych sfer będzie więc płaszczyzna przechodząca przez punkty A, B, C. Jednakże środek sfery S leży właśnie na płaszczyźnie ABC, skąd wniosek, że płaszczyzna ta jest do niej prostopadła. A skoro inwersja zachowuje kąty między powierzchniami, to sfera przechodząca przez punkty A, B, C, A', B', C' i sfera opisana na czworościanie $A'B'C'D$ też są prostopadłe.



Rys. 2

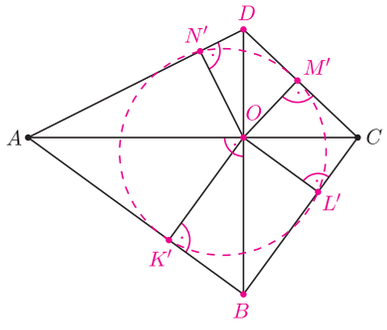
Bardzo ważnym, szczególnym przypadkiem inwersji jest tak zwany *rzut stereograficzny*. Załóżmy, że punkt O leży na sferze S, zaś płaszczyzna π jest styczna do tej sfery w punkcie O' symetrycznym do O względem środka tej sfery (rys. 2). Obrazem dowolnego punktu X na sferze jest punkt X' przecięcia prostej OX z płaszczyzną π. Niezwykle ważną własnością rzutu stereograficznego jest to, że jest on niczym innym, jak inwersją o środku O i promieniu OO', chociaż interesuje nas jedynie obraz sfery S w tej inwersji. W szczególności przekształcenie to ma wszystkie własności inwersji. Popatrzmy, jak je wykorzystać w następującym zadaniu.



Rys. 3

2. (OM 15-III-6) *Dany jest ostrosłup $ABCDS$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$ o prostopadłych przekątnych AC i BD, a rzutem prostokątnym wierzchołka S na podstawę jest punkt O przecięcia przekątnych podstawy. Udowodnić, że rzuty prostokątne punktu O na ściany boczne ostrosłupa leżą na jednym okręgu.*

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że rozważane rzuty leżą na sferze o średnicy OS. Weźmy rzut stereograficzny tej sfery z punktu S na płaszczyznę $ABCD$ (rys. 3). Niech K będzie rzutem prostokątnym punktu O na ścianę ABS. Płaszczyzna OSK jest prostopadła do krawędzi AB, skąd wynika, że obraz K' punktu K w tym przekształceniu będzie rzutem prostokątnym punktu O na krawędź AB. Analogicznie udowodnimy, że obrazami pozostałych rzutów są rzuty punktu O na pozostałe boki czworokąta $ABCD$. Jednakże w czworokącie o prostopadłych przekątnych rzuty prostokątne punktu przecięcia przekątnych leżą na jednym okręgu (łatwy dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi – rys. 4). Przeciwobrazy tych rzutów leżą więc na okręgu położonym na sferze o średnicy OS.



Rys. 4

Zadania

3. (Rosja 1999) *Przez wierzchołek A czworościanu $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę styczną do sfery opisanej na tym czworościanie. Udowodnić, że proste, wzdłuż których płaszczyzna ta przecina płaszczyzny ścian ABC, ACD, ABD, tworzą sześć równych kątów wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

4. *Wykazać, że dla dowolnego czworościanu istnieje trójkąt, którego boki są równe co do wartości iloczynom przeciwległych krawędzi tego czworościanu. Wykazać dodatkowo, że pole tego trójkąta jest równe $6VR$, gdzie V i R oznaczają odpowiednio objętość i promień sfery opisanej na czworościanie (wzór Crellego).*

5. (Zwardoń 2007) *Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór kół na płaszczyźnie o parami rozłącznych wnętrzach, że każde z danych kół jest styczne do dokładnie 5 spośród pozostałych kół.*

Więcej zadań znajduje się na stronie internetowej *Delty*.

Michał KIEZA

Nierówność Ptolemeusza

Jacek GANCARZEWICZ[*],
Magdalena STASZEK[**]

W klasycznym najczęstszym sformułowaniu **twierdzenie Ptolemeusza** to:

Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to iloczyn jego przekątnych równa się sumie iloczynów jego przeciwległych boków.

Autorstwo tego twierdzenia jest przypisywane greckiemu matematykowi Ptolemeuszowi pochodzącemu z Tebaidy, który kształcił się i działał w Aleksandrii na początku naszej ery (100–175).

Udowodnimy twierdzenie ogólniejsze zwane **nierównością Ptolemeusza**:

Niech a, b, c, d będą kolejnymi bokami dowolnego czworokąta oraz niech e, f będą jego przekątnymi. Wtedy

$$(*) \qquad ac + bd \geqslant ef.$$

W warunku $(*)$ zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie można opisać okrąg.

W dowodzie drugiej części powyższego twierdzenia będziemy korzystali z następującego prostego faktu, często znanego ze szkoły:

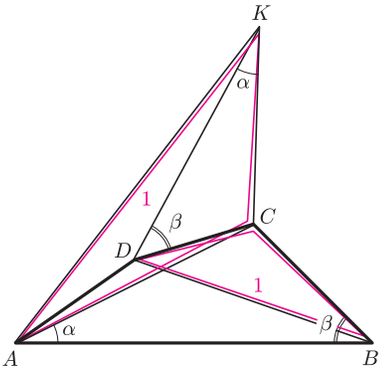
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy jego przeciwległych kątów wynoszą po 180°.

Oczywiście, wystarczy, że suma jednej pary przeciwległych kątów czworokąta wynosi 180°, bo suma wszystkich kątów czworokąta wynosi 360°.

Jego dowód, jak wiadomo, opiera się na dobrze znanym twierdzeniu o kącie środkowym i kątach wpisanych opartych na tym samym łuku.

Dowód nierówności Ptolemeusza. Niech $ABCD$ będzie dowolnym czworokątem. Mamy pokazać, że

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$



Oznaczmy przez α kąt CAB, a przez β kąt CBA. Narysujmy półprostą wychodzącą z punktu D, leżącą na zewnątrz czworokąta $ABCD$ i tworzącą z bokiem CD kąt β. Na tej półprostej wyznaczmy taki punkt K, aby kąt DKC był równy α. Dzięki temu trójkąty KDC i ABC są podobne. Zachodzą zatem proporcje

$$(1) \qquad \frac{KC}{AC} = \frac{DC}{BC} = \frac{DK}{AB},$$

skąd w szczególności wynika, że

$$(2) \qquad DK = \frac{DC \cdot AB}{BC}.$$

Oznaczmy przez γ kąt DCA. Teraz $\sphericalangle ACK = \sphericalangle DCK + \gamma$. Z trójkąta KDC mamy $\sphericalangle DCK = 180^\circ - \alpha - \beta$, czyli ostatecznie $\sphericalangle ACK = 180^\circ - \alpha - \beta + \gamma$. Analogicznie, $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB + \gamma$, a z trójkąta ABC otrzymujemy $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$, czyli $\sphericalangle DCB = 180^\circ - \alpha - \beta + \gamma$. Zatem mamy $\sphericalangle ACK = \sphericalangle DCB$. Ponieważ zachodzi proporcja

$$\frac{CB}{AC} = \frac{DC}{KC}$$

wynikająca z (1), zatem trójkąty KAC i CDB również są podobne (na rysunku zostały oznaczone kolorem, jedną parę odpowiednich boków oznaczyliśmy jedynką). Wynika stąd proporcja

$$\frac{AK}{DB} = \frac{AC}{CB},$$

z której otrzymujemy

$$(3) \qquad AK = \frac{AC \cdot DB}{CB}.$$

Z nierówności trójkąta wynika, że

$$(4) \qquad AK \leqslant AD + DK,$$

[*] Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński
[**] Polish School in Galway, Holy Trinity National School, Irlandia

przy czym w warunku tym zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, D, K są współliniowe. Podstawiając do tej nierówności otrzymane wcześniej warunki (2) i (3), otrzymujemy nierówność

$$\frac{DB \cdot AC}{CB} \leqslant AD + \frac{DC \cdot AB}{CB}$$

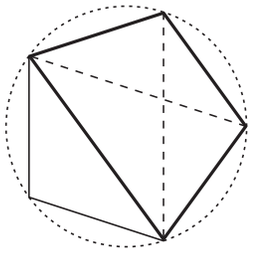
i mnożąc ją obustronnie przez CB, otrzymujemy nierówność Ptolemeusza.

Równość w tym warunku jest równoważna faktowi, że w warunku (4) zachodzi też równość, a to ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkt D leży na prostej AK, co jest równoważne równości

$$\sphericalangle KDC + \sphericalangle CDA = 180^\circ.$$

Równość ta oznacza, że suma kątów wewnętrznych czworokąta, leżących przy wierzchołkach B i D, wynosi 180°. W konsekwencji, również suma kątów wewnętrznych czworokąta, leżących przy wierzchołkach A i C, wynosi 180°. Twierdzenie pomocnicze gwarantuje, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Przykłady prostych zastosowań

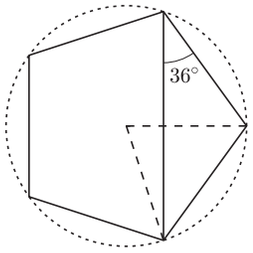


Obliczanie przekątnej pięciokąta foremnego. Rozważmy pięciokąt foremny o boku a i nazwijmy jego przekątną b. Zbudujemy z jego pomocą czworokąt o trzech bokach będących bokami pięciokąta i jednym boku będącym przekątną pięciokąta (na rysunku obok rozważany czworokąt został oznaczony pogrubioną linią).

Zbudowany czworokąt ma dwie przekątne długości b (są to również przekątne pięciokąta foremnego) oraz trzy boki równe a i jeden bok długości b (też przekątna pięciokąta foremnego). Ponieważ czworokąt jest wpisany w okrąg, zatem zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza zachodzi równość $b^2 = ba + a^2$, czyli b jest tym rozwiązaniem równania kwadratowego, które wynosi (drugie rozwiązanie nie interesuje nas, bo jest ujemne)

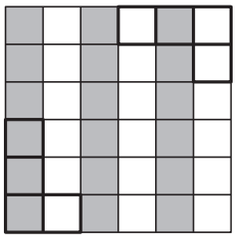
$$b = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Obliczenie przekątnej pięciokąta foremnego bez użycia twierdzenia Ptolemeusza jest bardziej skomplikowane i mozolne.



Obliczanie wartości funkcji sin **i** cos **dla kąta** 36°**.** Najpierw zauważmy, że w pięciokącie foremnym kąt pomiędzy jego przekątną a sąsiednim bokiem wynosi 36°, bo jest to połowa kąta środkowego, wynoszącego $360^\circ/5 = 72^\circ$, opartego na tym samym łuku. Po uwzględnieniu wzoru na przekątną pięciokąta foremnego otrzymujemy

$$\cos 36^\circ = \frac{b}{2a} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \qquad \sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$



Rozwiązanie zadania M 1371.
Odpowiedź: Pokrycie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 4.

Przyjmijmy, że kwadrat $n \times n$ udało się pokryć dostępnymi płytkami. Skoro pole płytki wynosi 4, to n musi być parzyste, powiedzmy $n = 2m$. Rozważmy kolorowanie naszego kwadratu w pasy jak na rysunku. Zauważmy, że każda płytka jest jednego z dwóch rodzajów: zawiera 3 czarne pola lub 1 czarne pole. Niech liczba płytek pierwszego rodzaju wynosi k, a drugiego l. Zliczając czarne i białe pola, otrzymujemy $3k + l = n^2/2 = 2m^2$ oraz $k + 3l = 2m^2$ (dzięki temu, że n jest parzyste, mamy po równo pól czarnych i białych!). Stąd w szczególności $k = l$, więc $4k = 2m^2$, zatem m jest parzyste, a n – podzielne przez 4.

Z drugiej strony, dwie płytki dają pokrycie prostokąta 4×2, zatem łatwo można znaleźć pokrycie kwadratu 4×4, więc także dowolnego kwadratu $n \times n$ dla n będącego wielokrotnością 4.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania różni się od rozwiązania podobnego zadania z poprzedniego numeru jedynie sposobem pokolorowania szachownicy.

Nobel za kwantowe manipulacje

Tegoroczną Nagrodą Nobla z fizyki podzielili się Serge Haroche i David J. Wineland za *przełomowe metody doświadczalne umożliwiające mierzenie pojedynczych układów kwantowych oraz manipulowanie nimi*.

Osiągnięcia świeżo upieczonych noblistów rzeczywiście robią wrażenie, ale wybór laureatów, jak zwykle, jest trochę kontrowersyjny. Zajmują się oni dziedziną, która niezwykle intensywnie rozwija się w ciągu ostatnich 20–30 lat. Na szczęście, to nie my musimy podejmować decyzje, kogo uhonorować, a kogo pominąć. Co więcej, u bukmacherów najwyżej obstawiano Petera Higgsa i spółkę, ale, jak widać, odkrycie nowej cząstki będzie musiało poczekać na noblowskie laury co najmniej rok.

W krótkich wywiadach telefonicznych sami nobliści zwrócili uwagę na to, że są przedstawicielami dużo większej grupy badaczy, dokonujących przełomowych odkryć w uprawianej przez nich dziedzinie (Wineland), oraz że traktują tę nagrodę jako uhonorowanie całych zespołów z nimi współpracujących (Haroche). Laureaci przyjaźnią się, na dodatek obaj urodzili się w 1944 roku.

W swoich badaniach zajmują się wzajemnym wpływem pojedynczych atomów (jonów) i pojedynczych fotonów. Są jednak przedstawicielami komplementarnych nurtów. Wineland więzi pojedyncze jony, aby je badać i wpływać na nie za pomocą fotonów, natomiast Haroche więzi pojedyncze fotony, a bada je za pomocą pojedynczych, specjalnie spreparowanych atomów. Wydaje się również, że trochę inną mają pierwotną motywację. Wineland dąży do otrzymania jak najdokładniejszego zegara atomowego, a Haroche bardziej interesuje się samym procesem dekoherencji kwantowej. Są to jednak tylko niuanse, bo obydwaj prowadzą badania jak najbardziej podstawowe.

Jednym z kluczowych osiągnięć grupy Winelanda było wykazanie możliwości przekazania splątania stanów wibracyjnych (tzw. zewnętrznych) jonu w pułapce na splątanie stanów wzbudzenia (tzw. wewnętrznych) i *vice versa*. Operacje te są dokonywane przy użyciu odpowiednio dobranej sekwencji odpowiednio dostrojonych pulsów laserowych. Pozwala to, między innymi, na przekazanie splątania wewnętrznych stanów wzbudzenia jednego jonu na wewnętrzne stany wzbudzenia drugiego poprzez sprzężenie stanów wibracyjnych. A ponieważ każdy stan splątany można traktować jako zapis informacji kwantowej (qubit), więc prowadzi to do budowy prostych komputerów kwantowych. Nie wiadomo, czy jony w pułapkach pozwolą na zbudowanie (w dającej się przewidzieć przyszłości) komputerów kwantowych o znaczeniu praktycznym, jest to jednak skuteczna droga do najbardziej precyzyjnych zegarów. Udało się polepszyć ich dokładność o dwa rzędy wielkości (głównie dzięki przejściu z zakresu mikrofalowego do optycznego). Pozwoliło to np. na stwierdzenie efektów relatywistycznych związanych z ruchem z prędkościami rzędu metrów na sekundę czy też ze zmianą wysokości (czyli natężenia pola grawitacyjnego) zaledwie o kilkadziesiąt centymetrów!

Z kolei grupa Haroche'a nie poprzestała na uwięzieniu pojedynczych mikrofalowych fotonów we wnęce utworzonej z nadprzewodzących ultrazimnych sferycznych luster. Kluczowym pomysłem było manipulowanie stanem fotonów poprzez przerzucanie przez wnękę nanoskopijnych „frisbee", którymi są bardzo mocno wzbudzone tzw. rydbergowskie atomy, np. z główną liczbą kwantową elektronu walencyjnego atomu rubidu $n = 50$, poboczną $l = 49$ (maksymalny moment pędu) oraz magnetyczną $|m| = 49$ (maksymalny rzut momentu pędu). Atomy te mają rozmiary dwa rzędy wielkości większe niż atomy niewzbudzone. Przechodząc przez wnękę, wprowadzają istniejący tam foton w stan splątania kwantowego. Kolejny atom może posłużyć do odczytania informacji. Badając korelacje między stanami pierwszego i drugiego atomu, uzyskano unikalne wyniki dotyczące procesu dekoherencji kwantowej.

Oba podejścia do manipulacji pojedynczymi stanami kwantowymi są często (również przez samych noblistów) porównywane do słynnego myślowego eksperymentu z kotem Schrödingera.

Badane układy nie są jeszcze wielkości kotów, ale stanowią istotny krok w kierunku mezoskopowych splątanych układów kwantowych, które mogą mieć bardzo konkretne praktyczne zastosowania. Alfred Nobel byłby zadowolony.

Piotr ZALEWSKI

Turniej Młodych Fizyków

Rozpoczął się Turniej Młodych Fizyków 2013. Zawody dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych, o charakterze komplementarnym wobec Olimpiady Fizycznej. W Turnieju uczestniczą pięcioosobowe drużyny. Najlepsi maja szansę wyjazdu na Turniej Międzynarodowy, który odbędzie się latem w Tajpej na Tajwanie. Szczegółowe informacje o Turnieju Młodych Fizyków są dostępne na stronie internetowej `http://tmf.org.pl`. Ewentualne zapytania można kierować pod adresem `tmf@ifpan.edu.pl`.

Przykładowe problemy do opracowania (termin nadsyłania prac – 25 stycznia 2013 r.):

Elastyczna przestrzeń. Oddziaływania między ciężkimi kulami umieszczonymi na naprężonej, poziomej membranie są często stosowane dla zilustrowania oddziaływań grawitacyjnych. Zbadaj taki układ. Czy jest możliwe zdefiniowanie w nim pozornej „stałej grawitacyjnej" oraz jej pomiar?

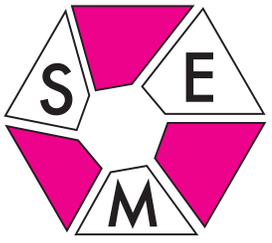
Odbijająca się piłka. Upuszczona piłeczka pingpongowa odbija się od podłoża, na które pada. Charakter tego zjawiska zmienia się, gdy w piłeczce znajduje się ciecz. Zbadaj, jak charakter zderzeń zależy od ilości cieczy wewnątrz piłki oraz innych istotnych parametrów.

Karuzela Helmholtza. Zamocuj bombki choinkowe do karuzeli o małych oporach w taki sposób, aby otwory bombek były skierowane stycznie do okręgu, po którym się poruszają. Gdy urządzenie to znajdzie się w zasięgu dźwięku o odpowiedniej częstotliwości i natężeniu, karuzela zacznie się obracać. Wyjaśnij to zjawisko i zbadaj parametry, przy których osiągana jest maksymalna prędkość obrotowa karuzeli.

Miodowa spirala. Cienki pionowo lejący się strumień lepkiej cieczy, jak np. miodu, często skręca się w spiralę. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



Słowo o *Kwadracie*

Miniony rok przyniósł znaczący wzrost zainteresowania Olimpiadą Matematyczną Gimnazjalistów, a towarzyszył mu szereg inicjatyw Komitetu Głównego mających na celu rzeczone zainteresowanie utrzymać. Jedną z nich było powołanie do życia gazetki *Kwadrat*, na łamach której znajdują się przeznaczone dla gimnazjalistów artykuły matematyczne oraz wiadomości dotyczące organizacji OMG. Pismo jest nieregularnikiem, czyli (w odróżnieniu od tygodników, miesięczników czy kwartalników) odstępy między kolejnymi numerami zależą wyłącznie od aktualnej ilości zgromadzonego materiału, stadium bieżącej edycji OMG i nastrojów w redakcji. Nasz periodyk, oczywiście, jest bezpłatny – wydrukowane egzemplarze wysyłane są do szkół oraz rozdawane podczas zawodów i szkoleń dla nauczycieli, a wersję elektroniczną każdego numeru można pobrać ze strony OMG. Na kartkach wydanych do tej pory sześciu *Kwadratów* młodzi Czytelnicy mogli odnaleźć wspomniane wcześniej teksty matematyczne, a także informacje o sukcesach starszych kolegów i koleżanek na arenie międzynarodowej (zwycięstwa na MEMO 2011, CzPS dla gimnazjalistów czy EGMO 2012), wywiady (m.in. z Anną Czerwińską, zwyciężczynią ostatniej edycji Olimpiady) oraz ciekawostki z zawodów (np. *Chochlik Olimpijski*, gdzie zamieszczane są zabawne fragmenty prac uczniów, czy barwna treść jednego z *odwołań* – oczywiście, za zgodą autora). Zachęcona pozytywnymi reakcjami Czytelników redakcja ma zamiar kontynuować swoją działalność tak długo, jak długo reakcje będą pozytywne. Czytelników *Delty* zachęcamy do zostania Czytelnikami *Kwadratu* (jedno drugiego nie wyklucza!), a także do przesyłania ewentualnych pomysłów i sugestii (zwłaszcza dotyczących rubryki *Chochlik Olimpijski*) pod adresem kwadrat.omg@gmail.com.

Łukasz RAJKOWSKI

Protokół posiedzenia Jury XXXIV Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie:
Antoni Leon Dawidowicz, Wiktor Bartol, Andrzej Dąbrowski, Andrzej Fryszkowski, Waldemar Pompe, na posiedzeniu 27 października 2012 roku w Ameliówce, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, że

- złote medale i nagrody w wysokości 1400 zł otrzymują
  Wojciech Nadara z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie za pracę *Grafy k-dobre*
  oraz **Bartłomiej Zawalski** z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie za pracę *Powrót średnich*,
- srebrne medale i nagrody w wysokości 900 zł otrzymują
  Dominik Burek z III LO im. A. Mickiewicza w Tarnowie za pracę *O tajemniczym punkcie* X_{442}
  oraz **Aleksander Horawa** z I SLO im. I. Bergmana w Warszawie za pracę *Skończone przestrzenie metryczne*,
- brązowy medal i nagrodę w wysokości 600 zł otrzymuje
  Anna Szczepańska z II LO im. Króla Jana III w Krakowie za pracę *Zadanie o spotkaniu*.

Opiekunowie prac: Bogusława Chwastowska, Tomasz Cieśla, Marek Czarnecki, Wojciech Guzicki i Wojciech Martys, otrzymują dyplomy honorowe.

Wszyscy finaliści i opiekunowie prac otrzymali również nagrody ufundowane przez Zibi Casio, Wydawnictwo Oświatowe Omega i Polskie Towarzystwo Matematyczne.

(—) *podpisy Członków Jury*

Prace nadsyłane na Konkurs powinny być samodzielnie przygotowanym przez ucznia opracowaniem, zawierajacym nowe wyniki lub nowe twórcze ujęcie tematu. Szczegółowy regulamin Konkursu znajduje się na stronie deltami.edu.pl. Termin nadsyłania prac w kolejnej edycji Konkursu to **1 kwietnia 2013 roku**.

Informatyczny kącik olimpijski (57): Teleporty

W tej edycji kącika omówimy zadanie pt. *Podlewanie ogórków* (naprawdę!) z rundy 2A konkursu TopCoder Open 2012. W zadaniu dany jest pewien zbiór punktów ustawionych wzdłuż prostej i naszym celem jest odwiedzić wszystkie te punkty w pewnej zadanej kolejności. Innymi słowy, mamy n różnych punktów ponumerowanych od 1 do n (porządek numerów *niekoniecznie* od lewej do prawej) i powinniśmy odwiedzić je wszystkie w kolejności $1, 2, \ldots, n$. Pomóc nam w tym mogą teleporty – mamy możliwość rozstawić w dowolnych punktach prostej łącznie t teleportów. Teleporty działają tak, że w ułamku sekundy możemy teleportować się z dowolnego teleportu do dowolnego innego teleportu. Naszym zadaniem jest tak ustawić dostępne teleporty, aby zminimalizować długość trasy odwiedzającej po kolei punkty $1, 2, \ldots, n$, przy założeniu, że po drodze możemy teleportować się dowolnie wiele razy.

Rozwiązywanie każdego (nietrywialnego) zadania warto rozpocząć od wstępnej analizy problemu, czyli od stwierdzenia, o co w nim tak naprawdę chodzi. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oznaczają współrzędne kolejnych punktów od lewej do prawej, a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – numery tych punktów. Niech wreszcie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ oznaczają współrzędne punktów w porządku zadanych numerów $1, 2, \ldots, n$. Zauważmy, że poszukiwaną optymalną ścieżkę możemy podzielić na fragmenty: od p_1 do p_2, od p_2 do p_3 itd., przy czym każdy z fragmentów biegnie albo w linii prostej między punktami p_i a p_{i+1}, albo ścieżką od punktu p_i do najbliższego mu teleportu i od teleportu najbliższego punktowi p_{i+1} do punktu p_{i+1}.

Na pewno warto coś zrobić z faktem, że zgodnie z treścią zadania liczba możliwych rozstawień teleportów jest nieskończona. Naturalna hipoteza jest taka, że możemy ograniczyć się do teleportów ustawionych w pewnych spośród zadanych n punktów. Łatwo uzasadnić prawdziwość tej hipotezy: Załóżmy, że pewien teleport znajdowałby się gdzieś pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami, czyli na pozycji x, takiej że $a_i < x < a_{i+1}$ dla pewnego i. Rozważmy wszystkie momenty, w których korzystamy z teleportu x. W każdym z nich musimy dojść do tego teleportu albo od punktu a_i (bądź innego, położonego na lewo), albo od punktu a_{i+1} (bądź innego, położonego na prawo). To oznacza, że odcinek $[a_i, x]$ przejdziemy l razy, a odcinek $[x, a_{i+1}]$ przejdziemy r razy. Jeśli więc $l \geqslant r$, to teleport przestawiamy na pozycję a_i, a w przeciwnym razie na pozycję a_{i+1}, i w obu przypadkach długość trasy nam nie wzrośnie.

Mamy już jakąś wizję tego, jak będzie wyglądała optymalna trasa oraz gdzie powinniśmy ustawiać teleporty. To pozwala już skonstruować pierwsze rozwiązanie zadania, rozpatrujące wszystkie możliwe rozstawienia teleportów. Złożoność czasowa takiego rozwiązania to z grubsza $O(t^{k+1})$.

Aby poprawić ten rezultat, powinniśmy jakoś „dobrze uchwycić" nasze zadanie. Problem ewidentnie stanowi w nim obecność dwóch porządków: zadanego porządku odwiedzania punktów oraz naturalnej kolejności „od lewej do prawej", odpowiadającej najkrótszym ścieżkom między kolejnymi punktami. Potrzebujemy jeszcze jakichś spostrzeżeń.

Załóżmy, że znamy pozycje wszystkich rozstawionych teleportów: $a_{j_1} < a_{j_2} < \ldots < a_{j_t}$. Teleporty te wyznaczałyby wówczas podział ciągu wszystkich punktów na fragmenty położone między kolejnymi teleportami. Czy na podstawie tego podziału umielibyśmy łatwo obliczyć wynik?

Rozważmy pewien punkt a_i, taki że $a_{j_m} \leqslant a_i \leqslant a_{j_{m+1}}$. Oznaczmy $L = a_{j_m}$, $R = a_{j_{m+1}}$. Wiemy, że poprzedni punkt w kolejności odwiedzania znajduje się na pozycji $x = p_{k_i - 1}$ (punkt ten może też nie istnieć). Jeśli teraz punkt x szczęśliwym trafem również znajduje się między teleportami L i R, to możemy bardzo łatwo wyznaczyć najkrótszą ścieżkę między nim a a_i: albo idziemy bezpośrednio po prostej, albo korzystamy z kombinacji teleportów L i R. A co, jeśli punkt x znajduje się zupełnie gdzieś indziej? Wiemy wówczas, że najkrótsza ścieżka od x do a_i biegnie od x do najbliższego mu teleportu i dalej od teleportu najbliższego a_i do a_i (zauważmy, że jeśli wynikiem jest najkrótsza ścieżka z x do a_i w linii prostej, to i tak możemy ją opisać w podanej postaci!). To oznacza, że wkład punktu a_i do wyniku możemy opisać całkiem lokalnie: jeśli mianowicie $L \leqslant x \leqslant R$, to do wyniku dodajemy

$$\min(|a_i - x|, \min(x - L, R - x) + \min(a_i - L, R - a_i)), \tag{1}$$

a w przeciwnym razie wynik zwiększamy tylko o

$$\min(a_i - L, R - a_i), \tag{2}$$

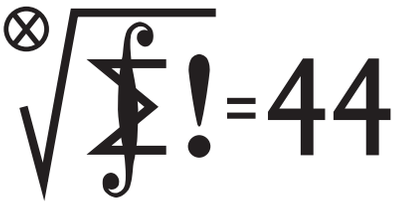
natomiast odległość od punktu x do najbliższego mu teleportu dodamy do wyniku w chwili rozpatrywania tego punktu. Aby ta metoda była poprawna, przy rozpatrywaniu a_i należy jeszcze stwierdzić, czy następny punkt w kolejności odwiedzania, $y = p_{k_i+1}$, znajduje się między teleportami L i R, a jeśli *nie*, jeszcze raz dodać do wyniku składnik (2). (Jeśli p_{k_i+1} nie istnieje, nie musimy niczego dodawać).

To oznacza, że do wyznaczenia wyniku wystarcza nam dla każdego punktu znajomość pozycji dwóch najbliższych mu teleportów. Możemy więc zastosować metodę programowania dynamicznego. W ramach stanu musimy na pewno jakoś zapamiętać zakres rozpatrzonych punktów wzdłuż prostej, liczbę już ustawionych teleportów oraz pozycje skrajnych ustawionych teleportów. Najlepiej jest to zrobić tak: pole $A[i, j]$ tablicy będzie odpowiadać minimalnej sumie wkładów punktów $a_1, a_2, \ldots, a_i$ do wyniku, przy założeniu, że rozstawiliśmy wśród nich j teleportów, z których ostatni znajduje się na pozycji a_i. Wówczas ze stanu $A[i, j]$ mamy $O(n)$ przejść, do stanów postaci $A[i', j + 1]$ dla $i' > i$, i możemy je wszystkie rozpatrzyć w czasie $O(n)$. Żeby uniknąć nieprzyjemnych przypadków brzegowych, postawimy łącznie $t + 2$ teleporty, z czego dwa pomocnicze: jeden na pozycji $a_0 = -\infty$, a drugi na pozycji $a_{n+1} = +\infty$.

Całe rozwiązanie działa w czasie $O(n^3)$ i pamięci $O(n^2)$.

Jakub RADOSZEWSKI

Klub 44

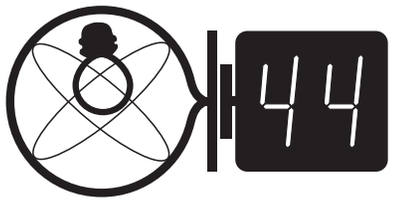


Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 639 ($WT = 2{,}41$) i 640 ($WT = 1{,}99$) z numeru 4/2012

Roksana Słowik	Knurów	43,65
Michał Miodek	Zawiercie	42,37
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Tomasz Wietecha	Tarnów	40,12
Jędrzej Garnek	Poznań	36,40
Paweł Łabędzki	Kielce	35,77
Wojciech Nadara	Warszawa	35,67

Ależ zagęszczenie tuż przed linią mety!



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 538 ($WT = 1{,}96$), 539 ($WT = 3{,}13$) 540 ($WT = 1{,}90$) i 541 ($WT = 1{,}23$) z numerów 5–6/2012

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	39,02
Tomasz Rudny	Warszawa	35,20
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,34
Tomasz Wietecha	Tarnów	27,04
Dariusz Wilk	Rzeszów	26,57

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 651, 652

Redaguje Marcin E. KUCZMA

651. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (m,n), dla których liczby

$$\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m} \quad \text{oraz} \quad \frac{m^2}{n}+\frac{n^2}{m}$$

są także całkowite.

652. Udowodnić nierówność

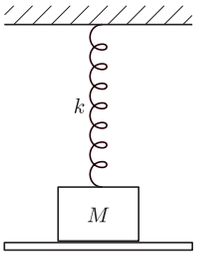
$$\frac{a^{n+1}}{a+b}+\frac{b^{n+1}}{b+c}+\frac{c^{n+1}}{c+a} \geqslant \frac{a^n+b^n+c^n}{2}$$

dla liczb rzeczywistych $a,b,c>0$ oraz liczb całkowitych $n>0$.

Zadanie 652 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Zadania z fizyki nr 548, 549

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



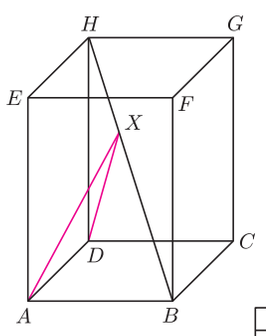
548. Ciężarek o masie M zawieszono na sprężynie o współczynniku sprężystości k i położono na podstawce. W chwili początkowej sprężyna była nieodkształcona. Podstawkę zaczęto opuszczać w dół z przyspieszeniem a. Po jakim czasie ciężarek stracił kontakt z podstawką? Jakie było maksymalne wydłużenie sprężyny?

549. Obwód elektryczny składa się z ogniwa o zaniedbywalnym oporze wewnętrznym i dwóch oporników połączonych szeregowo. Woltomierz wskazał spadek napięcia na pierwszym oporniku $U_1 = 4$ V, na drugim oporniku $U_2 = 6$ V, na obu opornikach $U = 12$ V. Jakie są spadki napięć na każdym z oporników, gdy woltomierz nie jest nigdzie podłączony?

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1369. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ o podstawach $ABCD$ i $EFGH$ będących kwadratami (rys. 1), przy czym $AB = \sqrt{2}$ i $AE = 4$. Punkt X przesuwamy po przekątnej BH. Znaleźć minimalną wartość wyrażenia $AX + XD$.
Rozwiązanie na str. 2



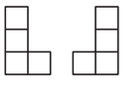
Rys. 1

M 1370. Liczby rzeczywiste $x_1,\ldots,x_n$, które są nie mniejsze niż -1, spełniają równość $x_1^3+\ldots+x_n^3=0$. Udowodnić, że

$$x_1+\ldots+x_n \leqslant \frac{n}{3}.$$

Rozwiązanie na str. 8

M 1371. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których kwadrat złożony z n^2 kwadracików jednostkowych można pokryć płytkami powstałymi z płytek pokazanych na rysunku 2 przez obrót o kąt 0°, 90°, 180° lub 270° w ten sposób, by płytki nie zachodziły na siebie.
Rozwiązanie na str. 19



Rys. 2

Prosto z nieba: Supernowe typu Ia

O świecach standardowych pisaliśmy w *Delcie* 10/2011 (ostatnia Nagroda Nobla z fizyki została przyznana za wykorzystanie supernowych do oceny tempa rozszerzania się Wszechświata).

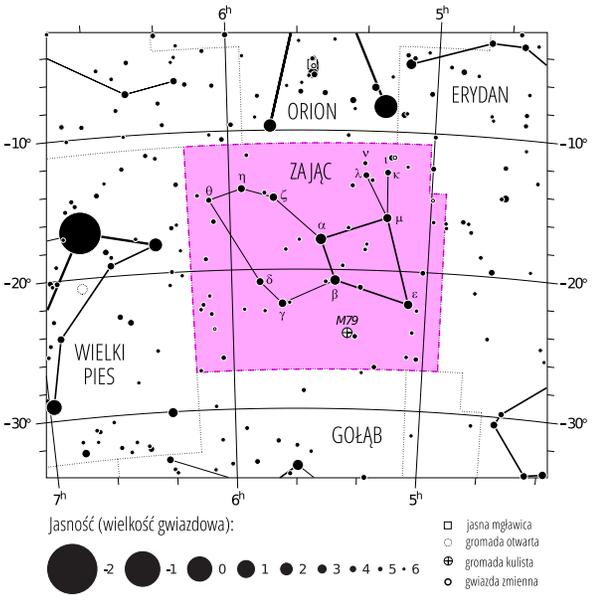
Astronomowie niezwykle lubią gwiezdne wybuchy – im większe, tym lepsze – ponieważ łatwo je dostrzec w ogromie kosmicznej pustki, ale również dlatego, że umożliwiają „podglądanie" materii w niecodziennych warunkach. Sztandarowym przykładem i nieocenionym narzędziem wykorzystywanym do badania Wszechświata są *supernowe typu Ia*: wybuchające białe karły, ostatnie stadium ewolucji gwiazd o początkowej masie mniejszej od około 10 $M_\odot$ (stabilność białych karłów zapewnia ciśnienie zdegenerowanych elektronów, wynikające z zakazu Pauliego). Eksplozje te są znakomitym przykładem *standardowej świecy* – klasy obiektów o podobnej jasności, których parametrów można użyć do określenia odległości. Średnio rzecz biorąc, wybuch supernowej typu Ia zdarza się w przeciętnej galaktyce raz na sto lat. Ostatni dobrze udokumentowany przypadek zdarzył się w Drodze Mlecznej pod koniec XVI wieku. Obserwacji nagłego pojaśnienia w gwiazdozbiorze Kasjopei dokonał słynny Tycho Brahe. Obecnie pozostałość po supernowej SN1572 ma rozmiary około 50 lat świetlnych i ciągle się rozszerza.

Przeciętna masa białego karła to około 0,6 $M_\odot$.

Pomimo wykorzystania supernowych typu Ia w różnych dziedzinach astronomii badacze nie są do końca zgodni, jak w szczegółach dochodzi do końcowej eksplozji. Wiadomo, że kluczowa jest obecność białego karła, który przekraczając masę Chandrasekhara ($\simeq 1{,}4\ M_\odot$), traci stabilność (ciśnienie zdegenerowanych elektronów przestaje być wystarczające) i wybucha. Wyobraźnia teoretyków podsuwa co najmniej dwa scenariusze – w jednym biały karzeł akreuje materię z towarzysza, zwykłej niezdegenerowanej gwiazdy w układzie podwójnym, natomiast w drugim niestabilność wywołana jest przez *połączenie się* dwu białych karłów. Scenariusze te różnią się znacznie ilością obserwowanego po eksplozji gazu, który wykrywany jest tylko w niektórych przypadkach – odpowiadałyby one pierwszej z hipotez. Oznacza to, być może, rzadką w przyrodzie sytuację, w której *oba* przedstawione powyżej pomysły są równie dobre, tzn. typ Ia składa się z dwu podklas! Do wyjaśnienia pozostaje natomiast, czy oba scenariusze istotnie prowadzą do tej samej świecy standardowej, a jeśli nie – czy pomiary wykorzystujące to założenie wymagają weryfikacji.

Michał BEJGER

Niebo jak własna kieszeń: Grudzień



Gwiazdozbiór Zająca. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Orion jest prawdopodobnie najlepiej znaną konstelacją zimowego nieba półkuli północnej. Dokładnie pod nim, a obok Syriusza (najjaśniejszej na nocnym niebie gwiazdy, α Wielkiego Psa) ukrywa się niepozorny Zając (łac. *Lepus*) – to na niego, według Ptolemeusza, poluje Orion. Mimo że Zając nie składa się z gwiazd o dużej jasności, wykreślone przez gwiazdowych kartografów szczegóły (linie łączące λ i κ z μ Leporis!) pozwalają bez trudu wyobrazić sobie sylwetkę długouchego amatora zieleniny. Najjaśniejszy obiekt tego gwiazdozbioru, α Leporis, nosi arabską nazwę Arneb, co po arabsku znaczy… Zając. Jest to gwiazda typu widmowego podobnego do Słońca, ale około 15 razy bardziej masywna: wg modeli teoretycznych skończy swój żywot jako efektowna supernowa.

3 grudnia Ziemia znajdzie się dokładnie pomiędzy Słońcem a Jowiszem. Będzie to moment *opozycji* Jowisza ($-2{,}68^m$) i najlepsza okazja do podziwiania blasku gazowej planety i jej księżyców. Również w wigilijny wieczór Jowisz da o sobie znać: z powodu swojej jasności najprawdopodobniej to on wystąpi w roli Pierwszej Gwiazdki. Wypatrujmy go na wschodzie, w gwiazdozbiorze Byka; w pierwszy dzień Świąt nastąpi jego koniunkcja z Księżycem. Mars ($1{,}20^m$) zachodzi wraz ze Słońcem w gwiazdozbiorze Strzelca, a marginalnie widoczny Uran ($5{,}84^m$) znajduje się w Rybach. Saturn ($1{,}35^m$) w gwiazdozbiorze Wagi, oraz Merkury ($-0{,}47^m$), a w szczególności jasna Wenus ($-3{,}83^m$, obie wewnętrzne planety w Wężowniku) są widoczne na chwilę przed wschodem Słońca, tj. około 7 rano.

Po raz kolejny niebiosa okazały swą przychylność miłośnikom meteorów, ponieważ nów 13. zbiega się niemal dokładnie z maksimum roju Geminidów (13–14). Rój ów, o radiancie w gwiazdozbiorze Bliźniąt, jest związany z przechodzącą bardzo blisko Słońca asteroidą Phaethon i uważany przez wielu za pokaz fajerwerków atrakcyjniejszy od zbliżającego się Sylwestra. Przesilenie zimowe, czyli moment, od którego dzień zaczyna się wydłużać kosztem nocy, nastąpi 21. o godz. (nomen omen) 12:12. Wszystkiego dobrego w nowym roku!

M. B.

delta 48

Kalendarze kostkowe

Joanna JASZUŃSKA

Pewnego grudniowego wieczoru Genowefa zaproponowała swojej siostrze Zenobii:

G: Fajny kalendarz dziś widziałam, może zrobimy taki w prezencie dla rodziców? Składał się z trzech długich prostopadłościanów z nazwami miesięcy, dwóch z nazwami dni tygodnia oraz dwóch kostek z cyframi (rys. 1), wszystko w ozdobnym pudełku. Odpowiednio ustawiając obok siebie kostki, można „napisać" dowolny dzień miesiąca, daty jednocyfrowe poprzedzając zerem: 01, 02 itd.

Rys. 1. Nazwy miesięcy napisane są na podłużnych ścianach trzech szarych prostopadłościanów na dole, a dni tygodnia na prostopadłościanach na górze.

Z: Świetny pomysł! Jak należy rozmieścić cyfry na kostkach?

G: To chyba łatwe – jest tylko 10 cyfr, a na dwóch kostkach mamy aż 12 ścian. Do napisania 11. dnia miesiąca potrzebne są dwie jedynki, po jednej na każdej kostce, podobnie dla 22., ale na szczęście miesiąc ma najwyżej 31 dni, więc w żadnej dacie żadna inna cyfra nie wystąpi dwukrotnie. Wszystko idealnie pasuje: 12 ścian, a na nich 10 różnych cyfr oraz dodatkowa jedynka i dwójka.

Czy rzeczywiście taki układ pozwoli „napisać" każdą datę?

Z: Czy na pewno dla wszystkich dat jednocyfrowych wystarczy jedno zero?

Przed dalszą lekturą zachęcam do próby samodzielnego odpowiedzenia na to pytanie.

G: Hmm... Gdyby zero było tylko jedno, to aby napisać wszystkie daty od 01 do 09, musielibyśmy zmieścić na tej drugiej kostce wszystkie cyfry od 1 do 9. Tego nie da się zrobić, więc zero też musi być na obydwu kostkach.

Z: No to mamy problem... Dla dziesięciu cyfr plus dodatkowego zera, jedynki i dwójki potrzeba 13 ścian. Jak to pomieścić?

Taki kalendarz, wbrew pozorom, da się jednak zrobić. Jak?

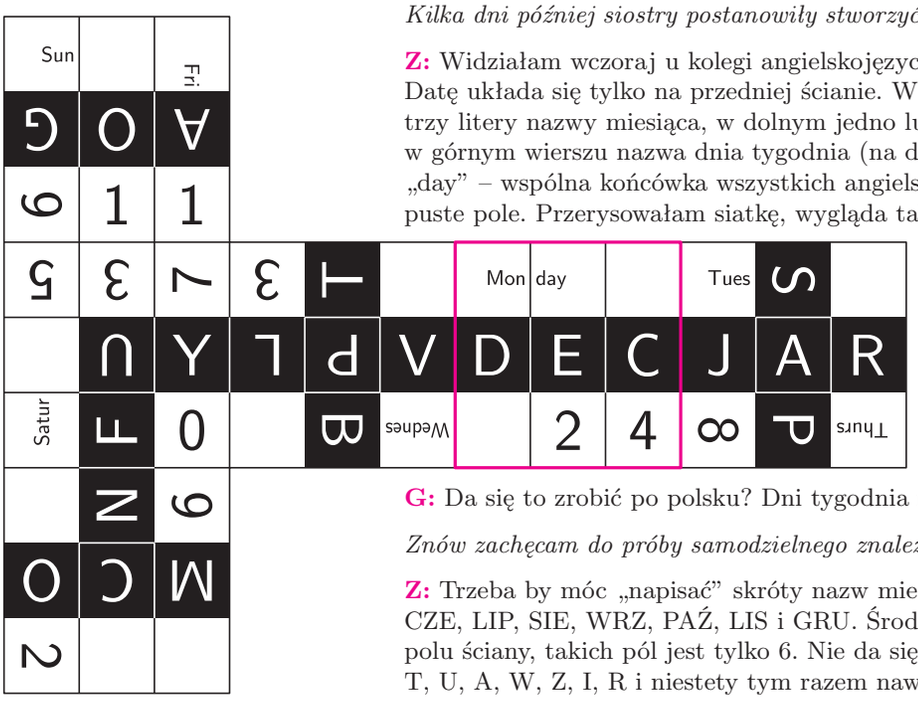
G: Już wiem! Przecież nie musimy mieć dwóch osobnych ścian dla cyfr 6 i 9, wystarczy napisać jedną z nich i w razie potrzeby obracać ją do góry nogami!

Z: Racja! Na każdej kostce umieszczamy więc cyfry 0, 1 i 2, prócz tego na jednej kostce dowolne trzy spośród cyfr 3, 4, 5, 6, 7, 8, a na drugiej kostce trzy pozostałe. Nietrudno teraz sprawdzić, że faktycznie każdą datę od 01 do 31 da się „napisać".

Zenobia narysowała siatki obu kostek i poszła po nożyczki i klej.

Kilka dni później siostry postanowiły stworzyć kolejny wieczny kalendarz.

Z: Widziałam wczoraj u kolegi angielskojęzyczny kalendarz na kostce Rubika. Datę układa się tylko na przedniej ścianie. W środkowym wierszu są pierwsze trzy litery nazwy miesiąca, w dolnym jedno lub dwa puste pola i numer dnia, w górnym wierszu nazwa dnia tygodnia (na dwóch polach, z których drugie to „day" – wspólna końcówka wszystkich angielskich nazw dni tygodnia) i trzecie puste pole. Przerysowałam siatkę, wygląda tak:



Rys. 2. Kolorem zaznaczono ścianę z ułożoną datą. Kalendarz jest opatentowany w USA (patent nr US4409750).

G: Da się to zrobić po polsku? Dni tygodnia można by całe zmieścić w rogach...

Znów zachęcam do próby samodzielnego znalezienia odpowiedzi przed dalszą lekturą.

Z: Trzeba by móc „napisać" skróty nazw miesięcy: STY, LUT, MAR, KWI, MAJ, CZE, LIP, SIE, WRZ, PAŹ, LIS i GRU. Środkowa litera musi być na środkowym polu ściany, takich pól jest tylko 6. Nie da się na nich zmieścić 7 różnych liter: T, U, A, W, Z, I, R i niestety tym razem nawet żadne obracanie nam nie pomoże.

G: Szkoda. Zróbmy więc po angielsku, skoro wiemy, że w tym języku się da.

Siostry kupiły i pięknie okleiły kostkę Rubika, do czego i Czytelników zachęcam.