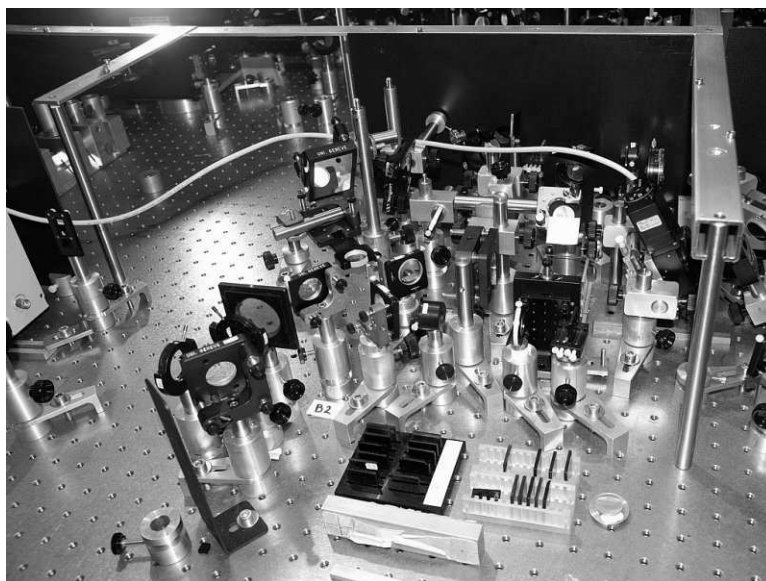


W następnym numerze wyjaśniamy,



SPIS TREŚCI NUMERU 2 (465)

H.E.S.S. II – po co nam taki duży teleskop?
Anna Barnacka str. 1

Tysiąc poznanych genomów ludzkich
Magdalena Fikus str. 3

Lew i człowiek
Jarosław Górnicki str. 4

Zliczanie podziałów liczby: algorytm Eulera
Wojciech Rytter str. 6

Kropki – kreski
Agata Drewniak str.10

Zadania str.11

Lekcja rysunku (4)
Zdzisław Pogoda str.12

Nierówności i styczne
Michał Kieza str.14

Informatyczny kącik olimpijski (59): Odświeżanie
Tomasz Idziaszek str.16

Aktualności str.17

Klub 44 str.18

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej str.23

Prosto z nieba: Granice kosmosu
Michał Bejger str.24

Niebo jak własna kieszeń: Luty str.24

$\sum_{k=1}^n k^3$
Joanna Jaszewska str.25

fotografia na okładce: Anna Barnacka

dlatego do badania powierzchni cieczy potrzebny jest aż tak skomplikowany układ.

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartoł, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7⁰⁰ – 18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Nagrodę Dziekanów

dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie* w roku akademickim 2011/2012

uzyskał

Damian Niwiński

za artykuł *Nieвозмоżliwy skrót*

zamieszczony w numerze 8(459)/2012

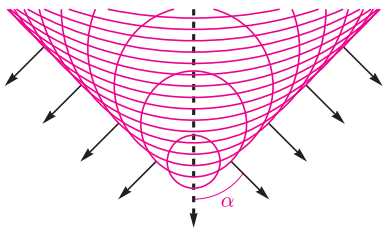
H.E.S.S. II – po co nam taki duży teleskop?

Anna BARNACKA*



Podróżując ze stolicy Namibii, Windhoek, do położonego na afrykańskim wybrzeżu Oceanu Atlantyckiego Walvis Bay, można podziwiać dzięki przyrodę prawie w ogóle nietkniętą ludzką działalnością. Nie zobaczymy tu dużych budynków, masztów telefonii komórkowej, z rzadka daje się dostrzec smugę kondensacyjną samolotu na niebie. Tym bardziej rzuca się w oczy olbrzymia, przypominająca rzeźby Caldera konstrukcja wznosząca się tajemniczo nad horyzontem. Ten gigant w kolorze namibijskiej ziemi to teleskop o rozmiarze lustra 28 metrów, co czyni go największym tego typu teleskopem na świecie. Powierzchnia zwierciadła głównego wynosi prawie 600 m², co w przybliżeniu odpowiada powierzchni dwóch kortów tenisowych. Urządzenie to stanowi część obserwatorium H.E.S.S. (ang. *High Energy Stereoscopic System*). Dotąd wyposażone było w cztery mniejsze teleskopy, każdy o średnicy zwierciadła 12 metrów, co daje powierzchnię zbierającą 113 m² (dwa korty do squasha). Piąty instrument rozpoczął pracę 26 lipca 2012 roku. Wraz z zarejestrowaniem przezeń pierwszego światła realizowany w obserwatorium projekt badawczy rozpoczął nowy etap, nazwany H.E.S.S. II. Nazwa projektu nie jest jedynie akronimem frazy opisującej techniczną stronę przedsięwzięcia, ale ma również uhonorować odkrywcę promieniowania kosmicznego, Victora Hessa, laureata Nagrody Nobla z fizyki w roku 1936. Rok rozpoczęcia projektu H.E.S.S. II jest także szczególny dla społeczności naukowej: obchodziliśmy wtedy setną rocznicę odkrycia promieniowania kosmicznego oraz dziesięciolecie działalności obserwatorium H.E.S.S.

H.E.S.S. rejestrował dotąd fotony w zakresie najwyższych obserwowanych energii, od 200 GeV aż do 10 TeV. Cząstki o tak wysokich energiach na pewno nie są pochodzenia termicznego, gdyż emitujący je rozgrzany obiekt musiałby mieć temperaturę powyżej 700 bilionów stopni – ponad milion razy większą niż temperatura w centrach najbardziej masywnych gwiazd! Inwestycja w piąty teleskop w centrum istniejącego już układu czterech mniejszych, umieszczonych w rogach kwadratu o boku 120 m, umożliwi poszerzenie zakresu czułości energetycznej do „niższych energii”, co dla naukowców związanych z projektem oznacza energie rzędu kilku GeV. Jest to ważne osiągnięcie, gdyż wypełniona zostaje luka pomiędzy zakresami dostępnymi dla obserwatoriów satelitarnych i naziemnych.



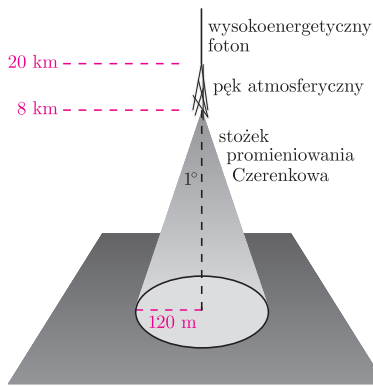
Rys. 1. Zjawisko Czerenkowa. Linia przerywaną zaznaczono tor cząstki naładowanej o prędkości v_{cz} , większej niż prędkość $v_{św}$ rozchodzenia się światła w ośrodku materialnym. Cząstka ta pobudza ośrodek do świecenia. Okręgi (w trzech wymiarach sfery) oznaczają możliwe położenia tych fotonów, wyemitowanych w chwili, gdy cząstka naładowana przechodzi przez środek każdego z okręgów. Obwiednia tych okręgów, gdzie występuje szczególnie duża koncentracja fotonów, jest stożkiem o kącie rozwarcia $\arcsin(v_{św}/v_{cz})$. Fotony Czerenkowa są więc emitowane pod kątem $\alpha = \arcsin(v_{św}/v_{cz})$ do kierunku ruchu cząstki naładowanej.

Obserwacje obiektów astrofizycznych emitujących fotony gamma stanowią nawet dziś duże wyzwanie. Detektor promieniowania gamma, mający średnicę 1 metra, dla typowego źródła obserwowanego w tym zakresie energii zarejestruje zaledwie 1 foton o energii 1 GeV dziennie. Dla wyższych energii fotonów jest jeszcze mniej: dla energii 1 TeV zarejestruje się już tylko 1 foton na rok! Co gorsza (dla badaczy, nie dla innych zamieszkujących Ziemię organizmów), w zasadzie wszystkie te wysokoenergetyczne fotony są pochłaniane przez atmosferę. Ich bezpośrednie wykrywanie wymagałoby więc wyniesienia detektora promieniowania gamma na orbitę okołoziemską. Aby zapewnić zarejestrowanie dostatecznie dużej, tj. nadającej się do dalszej obróbki statystycznej, liczby fotonów o najwyższej energii, detektor taki powinien dysponować efektywną powierzchnią zbierającą rzędu kilometra kwadratowego. O takim przyrządzie można w obecnych realiach technologicznych i finansowych jedynie pomarzyć.

Okazuje się jednak, że fakt oddziaływania wysokoenergetycznych cząstek w atmosferze można wykorzystać do badania tych cząstek – tyle że pośredniego. Wysokoenergetyczne fotony docierające do atmosfery Ziemi oddziałują z cząsteczkami azotu i tlenu, wywołując kaskady cząstek wtórnych, czyli tzw. pęki atmosferyczne. Wiele naładowanych cząstek wtórnych ma prędkości przekraczające prędkość światła w atmosferze i emituje tzw. promieniowanie Czerenkowa, które może być rejestrowane na powierzchni Ziemi. Fotony promieniowania Czerenkowa należą do zakresu optycznego z maksimum w kolorze niebieskim. Ludzkie oko nie jest jednak w stanie dostrzec emisji tego

* doktorantka, Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika w Warszawie

W tym przypadku słowo „kilopiksel” nabiera dosłownego znaczenia...



Rys. 2. Wyemitowane przez pęk atmosferyczny promieniowanie Czerenkowa zostanie zarejestrowane przez teleskop umieszczony w dowolnym punkcie wewnątrz stożka promieniowania Czerenkowa.



promieniowania przez pęki atmosferyczne, gdyż całe zjawisko trwa bardzo krótko – od kilku do kilkudziesięciu nanosekund. Światło Czerenkowa może być jednak rejestrowane przez teleskopy podobne w konstrukcji do teleskopów optycznych, wyposażone w czułe detektory i potrafiące dostatecznie szybko rejestrować dane. Taki jest właśnie piąty teleskop H.E.S.S. II, dysponujący dwutonową kamerą składającą się z 2048 fotopowielaczy.

Wiadomo, że wpadająca do atmosfery cząstka zaczyna tworzyć kaskadę na wysokości około 20 km, a kaskada osiąga swoje maksimum na wysokości około 8 km. Maksymalne rozwarcie stożka promieniowania Czerenkowa to $\alpha_{\max} = \arccos(1/n)$, gdzie n jest współczynnikiem załamania światła w atmosferze. Kąt α_{\max} rośnie w miarę zmniejszania się wysokości nad powierzchnią Ziemi. Dodatkowo cząstki pęku atmosferycznego nie muszą poruszać się dokładnie wzdłuż kierunku pierwotnego wysokoenergetycznego fotonu. Oznacza to, że dla fotonu, którego prędkość początkowa jest prostopadła do powierzchni Ziemi, podstawa stożka promieniowania Czerenkowa ma promień około 120 m i jest w miarę równomiernie oświetlona (rys. 2).

Teleskop umieszczony gdziekolwiek wewnątrz takiego okręgu będzie w stanie zarejestrować światło Czerenkowa pochodzące z pęku. Atmosfera działa tu jak olbrzymi detektor cząstek, którego powierzchnia efektywna jest równa powierzchni koła o promieniu równym maksymalnej odległości na powierzchni Ziemi między osią stożka a teleskopem. Oznacza to, że zastosowanie opisaną technikę pozwala uzyskać efektywną powierzchnię zbierającą rzędu kilkudziesięciu tysięcy metrów kwadratowych, czyli kilku boisk piłkarskich.

Należy jednak pamiętać, że możliwość badania promieniowania Czerenkowa jest uwarunkowana możliwością zebrania odpowiednio dużej liczby fotonów tego promieniowania. Liczba fotonów Czerenkowa produkowanych w pęku atmosferycznym zależy od energii pierwotnego fotonu. Jeśli energia ta wynosi 10 GeV, to do powierzchni Ziemi dociera od jednego do dwóch fotonów Czerenkowa na metr kwadratowy, a należy jeszcze uwzględnić straty związane z absorpcją na powierzchni lusterek (około 10%) oraz z efektywnością użytej kamery (strata ok. 90% fotonów). Zakładając, że do poprawnej interpretacji danych uzyskanych przez teleskop potrzeba około 50 fotonów Czerenkowa dla każdego pęku, możemy oszacować, że rejestracja promieniowania gamma o energii rzędu 10 GeV wymaga detektora o powierzchni zbierającej przekraczającej 600 m², czyli mniej więcej takiego, jak nowe urządzenie w obserwatorium H.E.S.S.

Promieniowanie w zakresie energetycznym od 10 do 200 GeV nie zostało, jak dotąd, zbyt dokładnie zbadane. Dzięki obserwacjom teleskopów H.E.S.S. II będziemy mogli śledzić poczynania supermasywnych czarnych dziur znajdujących się w centrach galaktyk, pulsarów czy pozostałości po supernowych. Nie jest również wykluczone, że H.E.S.S. II dostarczy informacji o własnościach ciemnej materii, która, jeśli składa się z masywnych i słabo oddziałujących cząstek, może anihilować w centrach galaktyk, tworząc promieniowanie gamma o energiach rzędu od kilkudziesięciu do kilkuset GeV. Pomimo olbrzymiego rozmiaru teleskopy H.E.S.S. II zostały zaprojektowane tak, aby można je było szybko skierować w dowolny punkt na niebie, jeśli tylko pojawi się informacja o ciekawym zjawisku. Może to być np. doniesienie o błysku gamma, wysłane przez któregoś satelitę. Do tej pory żadne z naziemnych obserwatoriów nie zarejestrowało takiego błysku. H.E.S.S. II będzie w stanie zrobić to jako pierwszy, przyczyniając się, miejmy nadzieję, do wyjaśnienia, co powoduje te eksplozje. Astronomowie oczekują także, że w rozważanym zakresie energetycznym uda się odkryć zupełnie nowe źródła promieniowania gamma, czyli nowe, niezbadane jeszcze ciała niebieskie. Namibijskie obserwatorium, w pracach którego biorą również udział naukowcy z ośrodków w Warszawie, Krakowie i Toruniu, jest zatem wręcz skazane na sukces, a doniesienia o nowych wynikach są z uwagą studiowane przez astronomów, astrofizyków i fizyków cząstek elementarnych.

Tysiąc poznanych genomów ludzkich

Nie ma na świecie człowieka – nosiciela perfekcyjnego genotypu. W 2008 roku społeczność międzynarodowa (instytucje publiczne i komercyjne) podjęła program sekwencjonowania genomów 1000 różnych ludzi. Ówczesne oceny jego kosztów sięgały 120 mln dolarów. Panował też pogląd, że z małych różnic między genotypami w populacji wynikają różne skłonności do wielu nierozpoznanych co do przyczyny chorób, takich jak nowotwory, cukrzyca, choroby układu krwionośnego.



Podjęcie się takiego zadania umożliwił fakt spadających szybko cen podobnych analiz. Wystarczy przypomnieć, że pierwszy opis genomu ludzkiego, zakończony w 2003 roku, kosztował kilka miliardów dolarów i były to wyniki uśrednione, po przebadaniu DNA dziewięciu osób. Przyniosły nieoczekiwany wówczas wynik: około 98,5% ludzkiego DNA nie koduje białek, a ta funkcja DNA uznawana była za najważniejszą. Rola sekwencji niekodujących, która staje się coraz bardziej widoczna, stanowi obecnie chyba największe wyzwanie dla genomiki.

Uzyskanie indywidualnych sekwencji DNA tysiąca osób (utworzenie bardziej precyzyjnej mapy genomowej człowieka) oznacza, z punktu widzenia statystyki, znalezienie wariantów sekwencji występujących u 95% ludzkości. Niektóre z tych wariantów są częste (powyżej 5% w populacji), inne rzadkie i bardzo rzadkie (poniżej 0,5%). Wstępne wyniki ogłoszono w październiku 2010, w listopadzie 2012 roku program zakończono.



Do badań użyto DNA pochodzący od 1092 ludzi uznanych za zdrowych, z 11 regionów świata (porównaj kropki na mapce) wśród przedstawicieli 14 typów populacyjnych. Średnio każdy z badanych był nosicielem 250–300 genetycznych wariantów uniemożliwiających danemu genowi normalne działanie i każdy z badanych był nosicielem 50–100 wariantów już uprzednio przypisanych dziedzicznym chorobom. Ponieważ jednak mamy w swoich komórkach po dwie kopie każdego genu, uszkodzenie jednej kopii może być zrekompensowane przez poprawnie działającą drugą. Niektóre ze szkodliwych wariantów uruchamiają się tylko w określonych warunkach, na które dany człowiek może nigdy w życiu nie trafić. Dzięki rozmnażaniu płciowemu w większości przypadków w zygocie następuje wymieszanie wariantów, także tych występujących w jednej kopii, ale u każdego w innym rejonie mapy.



Po raz pierwszy zidentyfikowano 56% rzadkich wariantów i aż 87% bardzo rzadkich. Te rzadkie czasem charakteryzują określone pochodzeniem geograficznym sub-populacje, np. z Hiszpanii, Finlandii i Afro-amerykańskie. Ale niezależnie od miejsca pochodzenia zdrowi ludzie mają podobną liczbę szkodliwych, rzadkich wariantów.



Bogactwo wiedzy o molekularnej genetyce jest wielkie, a liczba danych rośnie w tempie oszałamiającym. Wynika to z szybkiego udoskonalania technik pomiarowych i ich rosnącej miniaturyzacji, a także z faktu, że w tej dziedzinie prawie zanikły dwu-, trzy-autorskie prace. Omawiany **Projekt 1000 genomów** wykonywało kilkuset autorów ze 111 instytucji (nie licząc obsługi technicznej). Jeżeli wrócimy do wizji, lubianej przez medycynę molekularną, że genetyka dąży do uzyskania obrazu genomu pojedynczych ludzi, co łatwo pozwoli na diagnozę i propozycje sposobów indywidualnych terapii, to na razie warto przytoczyć wynik poszukiwania obszarów genowych lub wręcz pojedynczych genów odpowiedzialnych za dziedzicznego raka płuc. Owszem, zlokalizowano takie regiony w 15. chromosomie; ich genetyczne warianty bardzo silnie korelują z takim nowotworem, ale oznacza to zwiększenie pięciokrotne prawdopodobieństwa zachorowania, w dodatku niezależnie od tego, czy badany palił papierosy czy nie.

Co sprowadza się do sentencji: gen nie wyrok!

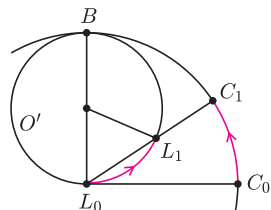
Magdalena FIKUS

Lew i człowiek

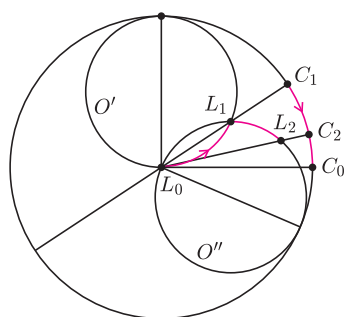
Jarosław GÓRNICKI*

Około 1930 roku Richard Rado (1906–1989) postawił następujący problem:

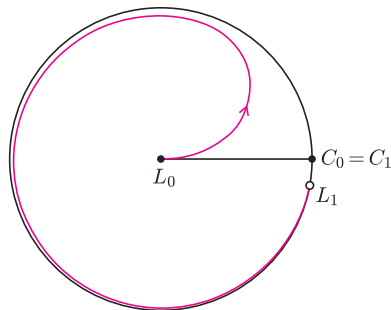
Lew (L) i człowiek (C) – traktowani jako punkty – poruszają się w domkniętym kole jednostkowym z jednakowymi maksymalnymi prędkościami. Czy (głodny) lew zawsze złapie człowieka?



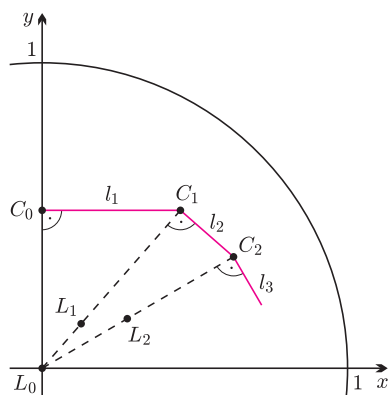
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Przez ponad dwadzieścia lat wierzono, że w tej „grze” lew jest zawsze zwycięzcą. Uzasadniała to następująca strategia:

Strategia lwa. Lew, przechodząc do środka koła, zmusza człowieka do zajęcia pozycji na brzegu koła i ucieczki z maksymalną prędkością wzdłuż brzegu koła (każde odejście człowieka od brzegu to zbliżenie się do lwa). Załóżmy, że lew znajduje się początkowo w punkcie $L_0 = (0, 0)$, a człowiek w punkcie $C_0 = (1, 0)$. Sprytny lew przemieszcza się z maksymalną prędkością, stale pozostając na promieniu L_0C_t , gdzie C_t jest położeniem człowieka w chwili t . Oznacza to, że lew biegnie po łuku mniejszego okręgu O' (o promieniu $\frac{1}{2}$; rysunek 1). Ponieważ łuki L_0L_1 i C_0C_1 są równej długości (lew i człowiek biegną z jednakowymi maksymalnymi prędkościami), więc lew spotka człowieka w punkcie B . Nagła zmiana kierunku ucieczki człowieka, np. w punkcie C_1 , nie poprawia sytuacji człowieka! Lew, odbijając symetrycznie mały okrąg O'' wzdłuż prostej L_0C_1 , będzie biegł po łuku L_1L_2 okręgu O'' (rysunek 2). Zatem, bez względu na tor ucieczki człowieka po brzegu koła, zostanie on złapany i to w czasie nie większym niż czas potrzebny na to, by lew przebiegł połowę obwodu mniejszego okręgu.

Uwaga. Przypadek ten pokazuje, że często spotykana sugestia „najlepszą metodą pościgu jest pościg w kierunku uciekającego” w wielu sytuacjach nie ma żadnego racjonalnego uzasadnienia – gdyby w rozpatrywanej „grze” lew biegł w kierunku uciekającego człowieka – wzdłuż tzw. krzywej pościgu – to pozostałby głodny (rysunek 3).

Dopiero w 1952 r. – ponad dwadzieścia lat po postawieniu problemu – Abram S. Besicovitch (1891–1970) zauważył, że nieuzasadnione jest zakładanie, iż najlepszą strategią dla człowieka jest „być jak najdalej od lwa i poruszać się wzdłuż brzegu koła”, oraz zaproponował błyskotliwy sposób skutecznej ucieczki przed lwem. Opisał to J.E. Littlewood w *A Mathematician's Miscellany*, Methuen and Co., Ltd., London 1953, s. 135–136.

Strategia człowieka (Besicovitch). Załóżmy, że lew znajduje się w punkcie $(0, 0)$, a człowiek w punkcie $(0, \frac{1}{2})$. Kolejne pozycje zajmowane przez lwa i człowieka – zawsze poruszających się z jednakowymi maksymalnymi prędkościami – będziemy oznaczać literami $L_0, L_1, L_2, \dots, C_0, C_1, C_2, \dots$, odpowiednio. Człowiek przemieszcza się wzdłuż łamanej o wierzchołkach C_0, C_1, C_2, \dots utworzonej z odcinków o długościach

$$l_n = |C_{n-1}C_n| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/4}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gdzie każdy odcinek $C_{n-1}C_n$ jest prostopadły do promienia L_0C_{n-1} , $n = 1, 2, \dots$ (rysunek 4).

Wówczas:

Po pierwsze, całkowita długość łamanej $C_0C_1C_2 \dots$ jest nieskończona, bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}} > \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

(gdyby było $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < +\infty$, to wobec

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} > 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = s$$

mielibyśmy sprzeczność).

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska



Po drugie, **lew nie może złapać człowieka.**

Istotnie. Niech człowiek przemieszcza się po odcinku, a lew utrzymuje się na promieniu L_0C , jak zostało to ustalone w Strategii Iwa. Ponieważ odcinek C_0C_1 jest prostopadły do promienia L_0C_0 , więc lew nie może złapać człowieka, gdy człowiek przebiega odcinek C_0C_1 . Podobnie, ponieważ odcinek C_1C_2 jest prostopadły do promienia L_0C_1 ($L_1 \in L_0C_1$), więc lew nie może złapać człowieka, gdy człowiek przebiega odcinek C_1C_2 , i tak we wszystkich pozostałych odcinkach nieskończenie długiej łamanej.

Uwaga. Łamana $C_0C_1C_2 \dots$ nie musi tworzyć „spirali”, biegnąc np. stale zgodnie z ruchem wskazówek zegara, ale w każdym z wierzchołków może zmienić kierunek na przeciwny. Gdy zaś lew porusza się według innych zasad, to należy spojrzeć, gdzie lew znajduje się w n -tym kroku – jeśli L_n znajduje się we wnętrzu jednej z półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą L_0C_n , to człowiek powinien przemieszczać się (wzdłuż łamanej) w kierunku półpłaszczyzny bez lwa.

Co więcej, **łamana $C_0C_1C_2 \dots$ zawiera się we wnętrzu koła jednostkowego.**

Z twierdzenia Pitagorasa bowiem mamy (rysunek 4):

$$\begin{aligned} |L_0C_0|^2 + l_1^2 &= |L_0C_1|^2, \\ |L_0C_1|^2 + l_2^2 &= |L_0C_2|^2, \\ &\dots \\ |L_0C_{n-1}|^2 + l_n^2 &= |L_0C_n|^2, \end{aligned}$$

więc

$$|L_0C_n|^2 = l_n^2 + |L_0C_{n-1}|^2 = l_n^2 + (l_{n-1}^2 + |L_0C_{n-2}|^2) = \dots = \sum_{k=1}^n l_k^2 + |L_0C_0|^2,$$

a stąd dla $n = 1, 2, \dots$, zachodzi

$$(1) \quad |L_0C_n| = \sqrt{\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n l_k^2} \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}}.$$

Aby oszacować (od góry) wartość wyrażenia $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$, rozważmy funkcję $f(x) = x^{-3/2}$, $x > 0$ (rysunek 5). Wówczas

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + f(2) + f(3) + \int_3^{+\infty} f(x) dx.$$

Ponieważ

$$f(1) = 1, \quad f(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad f(3) = \frac{1}{\sqrt{27}}, \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = -2x^{-1/2} \Big|_3^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

więc

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{2}{\sqrt{3}} < 2,8.$$

Stosując oszacowanie (2) w wyrażeniu (1), otrzymujemy

$$|L_0C_n| < \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2,8} = \sqrt{0,95} < 1 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

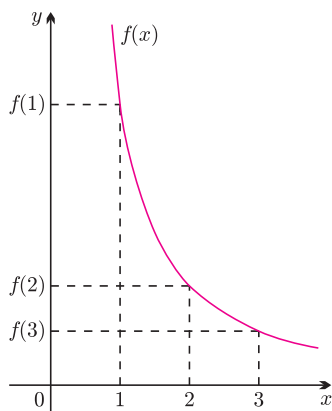
co kończy uzasadnienie poprawności strategii Besicovitcha.

Istnieje wiele wariantów problemu Rado, na przykład:

Szpaki i mucha. W n -wymiarowej kuli jednostkowej znajdują się szpaki i jedna mucha. Wszyscy poruszają się z jednakową maksymalną prędkością. Jaka minimalna liczba szpaków gwarantuje pochwycenie muchy? (Odpowiedź: n szpaków wystarczy, a $n - 1$ nie.)

Niektóre z tego typu problemów wciąż czekają na swoich pogromców. Jeden z nich ma wyjątkowo proste sformułowanie.

Lwy na polu golfowym. Czy dwa lwy złapią człowieka na ograniczonym polu golfowym ze skończenie wieloma jeziorkami? (Zakładamy, że wszyscy uczestnicy „gry” poruszają się z jednakowymi maksymalnymi prędkościami, nie mogą wchodzić do wody, a brzegi jeziorzek są krzywymi gładkimi.)



Rys. 5

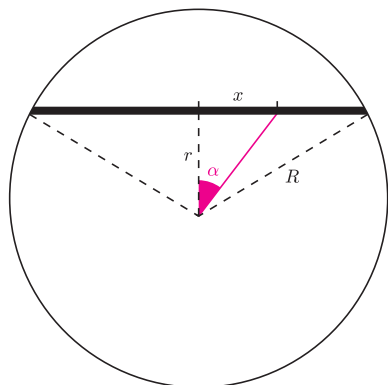


Rozwiązanie zadania M 1377.

Zalóżmy przeciwnie, że wielościan nie jest wpisany w sferę. Wtedy istnieją dwa wierzchołki wielościanu, dla których sfery z zadania M 1376 różnią się. Połączmy te wierzchołki ścieżką złożoną z krawędzi. Wtedy znajdziemy taką krawędź AB na tej ścieżce, że sfera zawierająca wierzchołki ścian spotykających się w A różni się od sfery, w którą są wpisane ściany spotykające się w B . Ale to znaczy, że dla sąsiednich ścian o wspólnej krawędzi AB istnieją dwie różne sfery, w które te ściany są jednocześnie wpisane, co przeczy tezie zadania M 1375.



Rozwiązanie zadania F 826.
Sytuacja opisana w zadaniu przedstawiona jest na poniższym schemacie.



Dla czytelności schemat ten przesadnie ukazuje położenie tunelu względem krzywizny Ziemi. W rzeczywistości odległość między Deltą i Albionem nie przekracza 100 km. Oznacza to, że kąt α przyjmuje wartości bardzo bliskie zeru. Uzasadnia to przybliżenie

$$r/R = \cos \alpha_{\max} \approx 1$$

oraz

$$x = r \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx R\alpha.$$

Przyspieszenie wagonów jest zatem równe iloczynowi promienia Ziemi R i ich przyspieszenia kątownego ε względem środka Ziemi. Składowa siły grawitacji wzdłuż tunelu $F_{g,w}$ wyraża się wzorem $F_{g,w} = F_g \sin \alpha \approx F_g \alpha$, gdzie F_g jest całkowitą siłą grawitacji działającą na wagon. Dla wagonu o masie m mamy więc

$$mR\varepsilon + mg\alpha = 0.$$

Równanie to jest identyczne z równaniem ruchu dla wahadła matematycznego o długości R , wagonik będzie więc wykonywał ruch okresowy o okresie $T = 2\pi\sqrt{R/g}$. Podróż z Deltą do Albionu zajmuje pół okresu, zatem szukany czas jest równy $\frac{1}{2}T = \pi\sqrt{R/g}$. Podstawiając wartości liczbowe, uzyskujemy czas przejazdu równy 42 minuty, niezależny od odległości między Deltą i Albionem.

Zliczanie podziałów liczby: algorytm Eulera

Wojciech RYTTER*

Podziały liczb są ciekawymi obiektami kombinatorycznymi o dosyć skomplikowanych własnościach. W tym artykule przedstawimy dwa algorytmy zliczania takich obiektów. Pierwszy prosty algorytm będzie działał w czasie $O(n^2)$ i pamięci $O(n^2)$, natomiast drugi, pochodzący od Eulera i oparty na tzw. liczbach *pentagonalnych*, w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$.

Podział $\pi = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ liczby naturalnej n na r części to przedstawienie tej liczby w postaci sumy r dodatnich liczb całkowitych

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r, \quad \text{gdzie } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r.$$

Wszystkie podziały liczby n , w porządku antyleksykograficznym, można wygenerować iteracyjnie następująco. Zaczynamy od trywialnego podziału $\pi = (n)$. W celu wygenerowania następnego podziału szukamy pierwszego $\lambda_i \geq 2$ od prawej strony, zastępujemy λ_i przez $\lambda_i - 1$, a pozostałe składniki na prawo dobieramy tak, aby otrzymany podział był jak największy leksykograficznie.

Na przykład podziały $n = 5$ w porządku antyleksykograficznym to:

$$5, \quad 4 + 1, \quad 3 + 2, \quad 3 + 1 + 1, \quad 2 + 2 + 1, \quad 2 + 1 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Oznaczmy przez $p(n)$ liczbę podziałów liczby n , mamy:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Dla $n < 0$ przyjmujemy, czysto formalnie, że $p(n) = 0$.

Oznaczmy przez $p(n, k)$ liczbę podziałów liczby n na k części. Algorytm o czasie kwadratowym wyznaczania $p(n)$ dla $n \geq 1$ polega na obliczeniu (kwadratowej liczby) wartości $p(n, k)$ na podstawie rekurencji:

$$p(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k > n \text{ lub } k \leq 0, \\ p(n-1, k-1) + p(n-k, k) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Rekurencja wynika stąd, że mamy dwa przypadki:

- $\lambda_k = 1$: Wtedy mamy $p(n-1, k-1)$ podziałów z pominięciem λ_k .
- $\lambda_k > 1$: Wtedy możemy odjąć jeden od każdego λ_i , otrzymując podział liczby $n-k$ na k części.

W celu szybszego obliczenia $p(n)$ rozważymy podziały na różne części, tzn.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r.$$

Niech $\tilde{p}(n)$ będzie liczbą takich podziałów. Przez $p_{\text{even}}(n)$, $\tilde{p}_{\text{even}}(n)$, $p_{\text{odd}}(n)$, $\tilde{p}_{\text{odd}}(n)$ oznaczmy liczbę podziałów n na parzystą/nieparzystą liczbę części (o różnych rozmiarach w przypadku symboli z \sim).

Na przykład $\tilde{p}(15) = 27$, $\tilde{p}_{\text{odd}}(15) = 14$, $\tilde{p}_{\text{even}}(15) = 13$, patrz też rysunek 3 (str. 9).

Zauważmy, że liczby $\tilde{p}(n)$ są przeważnie znacznie mniejsze od liczb $p(n)$ (choć na początku niewiele się różnią).

Możemy również zdefiniować $\tilde{p}(n, k)$ – liczbę podziałów n na k różnych części. Na przykład $\tilde{p}(50, 7) = 522$, co Euler obliczył prawie 300 lat temu bez użycia komputera (ani kalkulatora), odpowiadając na pytanie matematyka Philippe'a Naudégo.

Kluczowa okazuje się funkcja:

$$\Delta(n) = \tilde{p}_{\text{odd}}(n) - \tilde{p}_{\text{even}}(n).$$

Funkcje $p(n)$, $\tilde{p}(n)$ są bardzo skomplikowane, natomiast zadziwiające jest, że funkcja $\Delta(n)$ ma bardzo prostą strukturę. Początkowe wartości to:

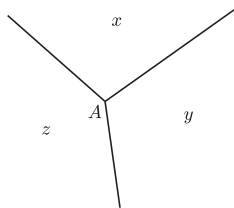
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\Delta(n)$	1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0

*Instytut Informatyki,
Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania M 1376.

Skoro w wierzchołku A spotykają się trzy krawędzie, to w tym wierzchołku spotykają się też trzy ściany. Oznaczmy je jak na rysunku.



Weźmy punkt przecięcia prostej ℓ_x z płaszczyzną symetralną odcinka AC (przyjmujemy definicje i oznaczenia z rozwiązania zadania M 1375). Zauważmy, że należy on też do prostej ℓ_y . Istotnie, należy do płaszczyzny symetralnej AB , bo prosta ℓ_x jest w niej zawarta, i do płaszczyzny symetralnej AC . Przecięcie tych płaszczyzn to właśnie prosta ℓ_y . Podobnie, należy on do prostej ℓ_z . Jest więc równo odległy od wszystkich wierzchołków ścian x, y, z .

Euler odkrył dwie istotne (dla obliczania $p(n)$) własności funkcji Δ :

Własność 1. $p(n)$ spełnia rekurencję:

$$(1) \quad p(n) = \sum_{k=1}^n \Delta(k) \cdot p(n-k).$$

Własność 2. Jak widać z początkowych wartości, $\Delta(k)$ jest ciągiem *rzadkim* (bardzo dużo zer). Jest on łatwo obliczalny za pomocą tzw. liczb pentagonalnych. Wartości tego ciągu to zera, $+1$ lub -1 .

Z tego, że ciąg $\Delta(n)$ jest bardzo rzadki, wynika, iż przy obliczaniu $p(n)$ tylko $O(\sqrt{n})$ składników sumy (1) jest niezerowych.

Zatem $p(n)$ wyznaczamy w czasie $O(\sqrt{n})$, znając $p(n-1), p(n-2), \dots, p(0)$. W sumie mamy algorytm działający w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$, o ile potrafimy łatwo wypisywać niezerowe wartości $\Delta(k)$.

Euler najpierw odkrył własności Δ heurystycznie, a dopiero po 10 latach znalazł dowód (być może wcześniej nie miał czasu).

Zdefiniujmy liczby pentagonalne (pięciokątne)

$$pent(i) = (3i-1)i/2.$$

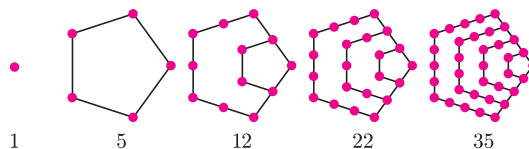
Nazwa pochodzi od interpretacji geometrycznej, podobnie jak dla liczb trójkątnych. Mamy:

$$pent(i) = pent(i-1) + 3i - 2.$$

Liczby pentagonalne będziemy również nazywać liczbami trapezowymi pierwszego typu, a liczby $pent(i) + i$ liczbami trapezowymi drugiego typu, patrz górny/dolny trapez na rysunku 1 (str. 8).

Oto kilka liczb pięciokątnych:

i	1	2	3	4	5	6	7
$pent(i)$	1	5	12	22	35	51	70



Ponadto zdefiniujmy współczynniki pentagonalne:

$$(2) \quad e(k) = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{jeśli } k = pent(i) \text{ lub } k = pent(i) + i, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Lemat kluczowy.

$$(3) \quad \Delta(k) = e(k).$$

Możemy teraz zapisać algorytm (jedną iterację) wyznaczania $p(n)$ następująco:

$$(4) \quad p(n) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \cdot (p(n - pent(i)) + p(n - pent(i) - i)).$$

W równaniu tym korzystamy jedynie z wartości i takich, że $pent(i) \leq n$, mamy jedynie $O(\sqrt{n})$ takich wartości i możemy je wszystkie łatwo obliczyć.

Twierdzenie. Liczby $p(1), p(2), \dots, p(n)$ możemy obliczyć w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$.

Dowód równania (1)

Uzasadnienie jest sprytną manipulacją algebraiczną, korzystającą z tego, że dwa wielomiany będące tą samą funkcją mają takie same współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej. Sztuczka polega na tym, żeby te same wielomiany przedstawić na dwa różne sposoby, z jednego wymnożenia otrzymujemy wynik, który przyrównujemy do wymnożenia w innej formie. Zdefiniujmy:

$$\phi(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^n), \quad \psi(x) = 1 - x$$

oraz

$$W_1(x) = \prod_{i=1}^n \phi(x^i), \quad W_2(x) = \prod_{i=1}^n \psi(x^i).$$



Rozwiązanie zadania F 825.

W rozważanej w zadaniu sytuacji stosujemy wyidealizowany opis polegający na przyjęciu, że podłoże jest powierzchnią nieskończenie ciężkiego ciała. Jeśli natomiast przyjmiemy, że ciało, od którego odbija się piłeczka, ma masę M , to zasadę zachowania pędu i energii dla ruchu jednowymiarowego przy założeniu, że ciężkie ciało początkowo spoczywa, możemy zapisać jako:

$$mv = mv_1 + Mv_2, \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2,$$

gdzie v_1 i v_2 są odpowiednio prędkościami piłeczki i ciężkiego ciała tuż po odbiciu. Są one równe

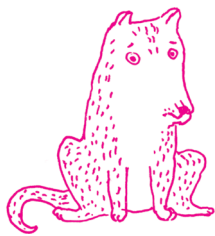
$$v_1 = -\frac{M-m}{M+m}v$$

oraz

$$v_2 = \frac{2m}{M+m}v,$$

a zatem dla $M \gg m$ rzeczywiście mamy $v_1 \approx -v$ oraz $v_2 \approx 0$.

WYBÓR
ZE MNĄ
NA SPACER



Wprowadźmy notację $\stackrel{n}{=}$ dla równości wielomianów z dokładnością do potęg wyższych niż n – inaczej mówiąc, bierzemy resztę z dzielenia przez x^{n+1} . Zauważmy, że zachodzi dosyć łatwe równanie:

$$(5) \quad W_1(x) \cdot W_2(x) \stackrel{n}{=} 1.$$

Na przykład dla $n = 1$ mamy $W_1(x) = 1 + x$, $W_2(x) = 1 - x$ oraz

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 \stackrel{1}{=} 1.$$

Przedstawimy teraz te same wielomiany w innej formie, po wymnożeniu czynników $\phi(x^i)$ i $\psi(x^i)$:

$$(6) \quad \begin{aligned} W_1(x) &\stackrel{n}{=} p(0)x^0 + p(1)x^1 + p(2)x^2 + \dots + p(n)x^n, \\ W_2(x) &\stackrel{n}{=} 1 - \Delta(1)x^1 - \Delta(2)x^2 - \dots - \Delta(n)x^n. \end{aligned}$$

Aby uzasadnić powyższe równości, zauważmy, że przy wymnażaniu czynników $\phi(x^i)$ w $W_1(x)$ na wszystkie możliwe sposoby wybieramy z każdego z nich po jednym jednomianie. Każdy taki wybór, w którym iloczyn wybranych jednomianów to x^k dla $k \leq n$, odpowiada podziałowi liczby k , a jednomian wybrany w $\phi(x^i)$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, oznacza, ile wystąpień składnika i znajduje się w tym podziale. Podobnie sytuacja wygląda w przypadku $W_2(x)$ i czynników $\psi(x^i)$; tutaj jednak dochodzi jeszcze znak jednomianu, wskazujący na parzystość liczby części w odpowiadającym mu podziale.

Z równania (5) dla $n \geq 1$ wynika, że współczynnik przy x^n w iloczynie $W_1(x) \cdot W_2(x)$ wynosi zero. Korzystając z własności (6), możemy ten współczynnik przedstawić jako kombinację iloczynów $p(i), \Delta(j)$, gdzie $i + j = n$, w rezultacie otrzymujemy: $p(n) \cdot 1 - p(n-1) \cdot \Delta(1) - p(n-2) \cdot \Delta(2) - p(n-3) \cdot \Delta(3) - \dots - \Delta(n) \cdot p(0) = 0$. Stąd bezpośrednio wynika równanie (1).

Dowód lematu kluczowego (równania (3))

W sekcji tej rozważamy tylko podziały na różne części. Dowód lematu kluczowego wymaga wprowadzenia interpretacji geometrycznej podziałów.

Podział liczby może zostać przedstawiony w postaci diagramu zwanego diagramem Ferrersa. Liczby elementów w poszczególnych wierszach diagramu odpowiadają poszczególnym składnikom λ_j . Diagramy Ferrersa dla przykładowych podziałów liczb 22 i 26 są przedstawione na rysunku 1. Są to bardzo szczególne podziały, które będziemy nazywać trapezowymi.

Podział trapezowy rzędu k pierwszego typu jest postaci

$$(k + k - 1, k + k - 2, k + k - 3, \dots, k),$$

a drugiego typu – postaci

$$(k + k, k + k - 1, k + k - 2, \dots, k + 1).$$

Obserwacja. Podział trapezowy mający $pent(k)$ lub $pent(k) + k$ elementów składa się z k części.

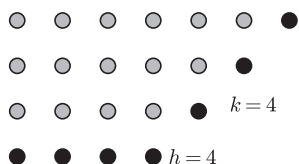
Liczbę n nazywamy liczbą trapezową, gdy istnieje podział n będący podziałem trapezowym. Dla danego n jest zawsze co najwyżej jeden taki podział. Liczby trapezowe są postaci $pent(j)$ lub $pent(j) + j$.

Dla diagramu π (niekoniecznie trapezowego) przez $k(\pi)$ oznaczmy liczbę elementów na prawej diagonalu, poczynając od prawego górnego elementu. Jeśli odpowiadającym podziałem jest $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, to $k(\pi)$ jest największą liczbą naturalną, taką że $\lambda_i - 1 = \lambda_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \dots, k(\pi) - 1$. Przez $h(\pi) = \lambda_r$ oznaczmy długość najkrótszego wiersza diagramu.

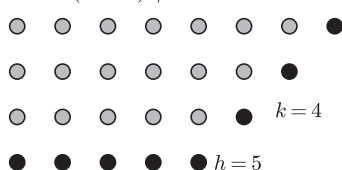
Jeśli podział π nie jest trapezowy oraz $h(\pi) \leq k(\pi)$, to $F(\pi)$ definiujemy jako podział powstający z π poprzez dodanie do każdego z pierwszych $h(\pi)$ wierszy po jednym elemencie i usunięcie najkrótszego (dolnego) wiersza, patrz rysunek 2.

Podziały o parzystej/nieparzystej liczbie części nazywamy parzystymi/nieparzystymi. Zauważmy, że funkcja F zmienia parzystość podziału.

$$n = (3k - 1)k/2 = 7 + 6 + 5 + 4$$

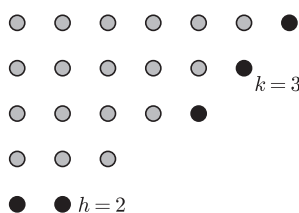


$$n = (3k + 1)k/2 = 8 + 7 + 6 + 5$$



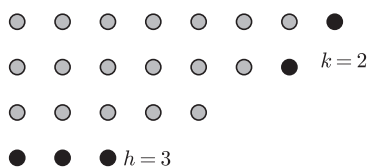
Rys. 1. Trapezy rzędu k dla $k = 4$. Trapez pierwszego typu ma $pent(k)$ elementów, a drugiego typu ma $pent(k) + k$ elementów. Podziały odpowiadające tego typu trapezom nazywamy podziałami trapezowymi.

$$23 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2$$



↕ bijekcja

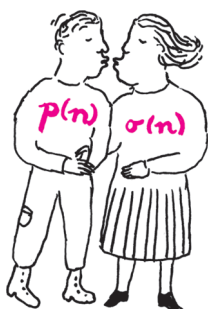
$$23 = 8 + 5 + 7 + 3$$



Rys. 2. Działanie funkcji F .

$14 + 1 \leftrightarrow 15$
 $13 + 2 \leftrightarrow 12 + 2 + 1$
 $12 + 3 \leftrightarrow 11 + 2 + 1$
 $11 + 4 \leftrightarrow 10 + 4 + 1$
 $10 + 5 \leftrightarrow 9 + 5 + 1$
 $9 + 6 \leftrightarrow 8 + 6 + 1$
 $8 + 7 \leftrightarrow 7 + 6 + 2$
 $7 + 5 + 2 + 1 \leftrightarrow 8 + 5 + 2$
 $7 + 4 + 3 + 1 \leftrightarrow 8 + 4 + 3$
 $9 + 3 + 2 + 1 \leftrightarrow 10 + 3 + 2$
 $8 + 4 + 2 + 1 \leftrightarrow 9 + 4 + 2$
 $6 + 5 + 3 + 1 \leftrightarrow 7 + 5 + 3$
 $6 + 4 + 3 + 2 \leftrightarrow 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
 $6 + 5 + 4$ podział trapezowy

Rys. 3. Zgrupowanie podziałów nietrapezowych liczby $n = 15$ zgodnie z działaniem funkcji F .



Zachodzi następujący, dosyć oczywisty fakt.

Własność funkcji F . Funkcja F jest bijekcją między nietrapezowymi podziałami n z $h(\pi) \leq k(\pi)$ i nietrapezowymi podziałami n z $h(\pi) > k(\pi)$.

Na mocy tej własności otrzymujemy:

$$(7) \quad \tilde{p}_{\text{odd}}(n) - \tilde{p}_{\text{even}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \text{ jest nieparzystą liczbą trapezową,} \\ -1 & \text{gdy } n \text{ jest parzystą liczbą trapezową,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Stąd:

$$\tilde{p}_{\text{odd}}(n) - \tilde{p}_{\text{even}}(n) = e(n) \quad \text{dla każdego } n.$$

Nieoczekiwana relacja między funkcjami $p(n)$ i $\sigma(n)$

Jako ciekawostkę podamy, bez uzasadnienia, pewien związek dwóch pozornie odległych funkcji $p(n)$ i $\sigma(n)$, przy czym $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników liczby n (włącznie z n). Mamy

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24

Dla funkcji σ zachodzi prawie taka sama rekurencja jak dla $p(n)$, jedyna różnica to zastąpienie $p(0)$ przez n we wzorze (1):

$$(8) \quad \sigma(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(k) \cdot \sigma(n-k) + \Delta(n) \cdot n.$$

Przykład. Dla $n = 15$ mamy:

$$\begin{aligned} \sigma(15) &= \sigma(15-1) + \sigma(15-2) - \sigma(15-5) - \sigma(15-7) + \sigma(15-12) + 15 = \\ &= 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(15) &= p(15-1) + p(15-2) - p(15-5) - p(15-7) + p(15-12) + p(0) = \\ &= 135 + 101 - 42 - 22 + 3 + 1 = 176. \end{aligned}$$

Korzystając ze związku liczb $\Delta(k)$ z liczbami pentagonalnymi, wszystkie wartości $\sigma(n), \sigma(n-1), \dots, \sigma(1)$ można obliczyć, tak jak poprzednio, w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$. Zachodzi również inny zadziwiający związek:

$$(9) \quad \sigma(n) = \sum_{k=1}^n k \cdot \Delta(k) \cdot p(n-k).$$

Jeśli $n = \prod p_i^{m_i}$ jest rozkładem n na czynniki pierwsze, to

$$\sigma(n) = \prod (p_i^{m_i+1} - 1) / \prod (p_i - 1).$$

Wydaje się, że wyznaczanie σ dla wszystkich liczb $1, 2, \dots, n$ za pomocą wzoru (8) i liczb pentagonalnych jest jednak wygodniejsze niż przy zastosowaniu ostatniego wzoru.

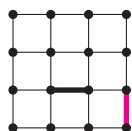
Australijski matematyk Kurt Mahler wykazał, że liczba

0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940...
(każdy wie, jak dalej)

nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Liczby takie stanowią większość liczb rzeczywistych, ale na odkrycie pierwszej takiej liczby czekano aż do 1844 roku (Joseph Liouville). To, że liczba π też jest taka, udało się wykazać dopiero w 1882 roku Ferdinandowi Lindemannowi.

M. K.

W dzisiejszym świecie ludzie stają się coraz bardziej leniwi. Chcą osiągnąć zysk w krótkim czasie, bez zbytecznej pracy. Najłatwiejszym sposobem na „zarabianie” są gry. Ale czym właściwie jest gra? Według słownika matematycznego Edwarda Siwka jest to *matematyczny model ciągu takich sytuacji, że w każdej z nich każdy uczestnik gry ma możliwość wyboru jednej spośród dostępnych dla niego decyzji (strategii), wiążącej się z określonym zyskiem lub stratą*. Celem jakiegokolwiek gry zawsze będzie osiągnięcie przez nas jak największego zysku lub (w gorszej dla nas sytuacji) jak najmniejszej straty. Jednakże nie zawsze mamy wpływ na to, jak potoczy się dana rozgrywka. W niektórych przypadkach możemy liczyć jedynie na łut szczęścia (np. w Lotto czy przy rzucie monetą). Istnieją jednak gry, w których znajomość określonych strategii wygrywających może nas doprowadzić do upragnionego sukcesu. Do tego drugiego rodzaju należy gra KROPKI–KRESKI.

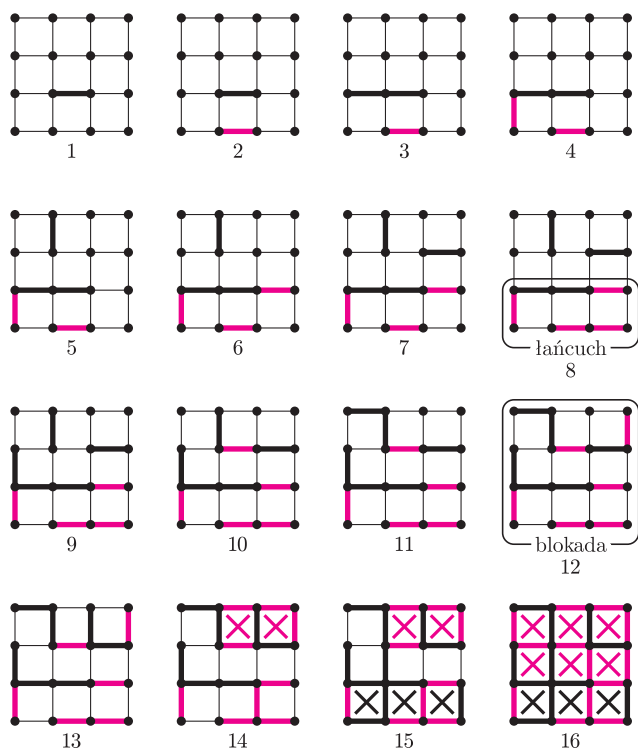


Rys. 1. Plansza 4×4 .

Przyjrzyjmy się zasadom gry. Toczy się ona na prostokątnej planszy zbudowanej z kropek (takiej jak na rysunku 1). Zadaniem graczy jest łączenie kolejno sąsiednich punktów liniami pionowymi lub poziomymi. W momencie, gdy cztery odcinki (niezależnie od tego, kto je narysował) utworzą kwadrat, gracz, który go zamknął, przejmuje to pole i wykonuje kolejny ruch. Wygra ten gracz, który zamknie większą liczbę kwadratów.

Większość ludzi gra w taki sposób, że linie stawiają w takich miejscach, aby nie oddać pola przeciwnikowi. Tak długo poszukują ruchów, które nie zbudują trzeciego boku kwadratu, jak tylko to jest możliwe. Tym sposobem na planszy tworzą się tzw. łańcuchy – figury, w których zamknięcie jednego kwadratu stworzy możliwość zamknięcia kolejnego pola z łańcucha przy jednym ruchu gracza. Gdy cała plansza będzie już podzielona na łańcuchy, dochodzi do blokady – jakikolwiek ruch gracza doprowadzi do zamknięcia kwadratu przez jego przeciwnika. Taki sposób gry określimy mianem gry na poziomie 0.

Gracz A
 Gracz B



Rys. 2. Wynik **3 : 6**.

Przykładową rozgrywkę prezentuje rysunek 2. Widzimy, że gracz B utworzył blokadę złożoną z trzech łańcuchów w 12. kroku. Na poziomie 0 każdy z graczy będzie oddawał przeciwnikowi łańcuch z jak najmniejszą liczbą kwadratów (A oddaje B dwa kwadraty, B oddaje A trzy kwadraty i A oddaje B cztery kwadraty).

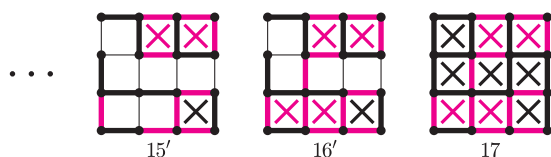
Tym sposobem grę wygra gracz B w stosunku 6 : 3.

Co zatem należy zrobić, żeby wygrać? Powinniśmy przejść na wyższy poziom wtajemniczenia – poziom 1. Musimy zdać sobie sprawę, że o naszej wygranej decydować będą dwa czynniki. Po pierwsze, liczba łańcuchów podczas blokady, i po drugie, liczba kroków, po których doszło do blokady. Przy parzystej liczbie łańcuchów gracz, który otwiera pierwszy łańcuch, wygra, bo to on zamknie ostatni najdłuższy łańcuch, a każdy oddany przeciwnikowi odrobi, najczęściej z bonusem. Przy nieparzystej liczbie łańcuchów przegrywa ten, który otworzył łańcuch jako pierwszy (na rysunku w kroku 13.). Ważna jest również liczba kroków, po których doszło do blokady. W przykładzie z rysunku do blokady doszło po parzystej liczbie kroków. Zatem pierwszy łańcuch otworzy ten gracz, który zaczyna rozgrywkę; drugi gracz uczyniłby to w przypadku blokady przy nieparzystej liczbie kroków.

Załóżmy, że gracz B będzie grać na poziomie 0. Gracz A będzie dążył do tego, aby do blokady doszło po parzystej liczbie ruchów i przy parzystej liczbie łańcuchów. Jeśli mu się to uda, to albo A otworzy pierwszy z parzystej liczby łańcuchów (wygra A), albo B otworzy pierwszy z nieparzystej liczby łańcuchów (wygra A).

*studentka Politechniki Śląskiej

Jednakże gracz B również może grać na poziomie 1. Będzie on dążył do uzyskania nieparzystej sumy ruchów i łańcuchów przy blokadzie. W momencie, gdy gracz A zda sobie sprawę, że przegra, jeśli nadal będzie (tak jak jego przeciwnik) grał na poziomie 1, rezygnuje on z tej strategii na rzecz poziomu 2. W jego zamiarze jest postawienie gracza B pod tzw. przymusem. Jak może to osiągnąć? Popatrzmy na rysunek 3.



Rys. 3. Zmiana strategii w kroku 15. daje wynik 5 : 4.

Gracz A zamiast zabrać cały łańcuch w kroku 15., podzielił go na dwie części – część zostawia sobie, a część oddaje przeciwnikowi. Gracz B został postawiony pod przymusem – cokolwiek zrobi, to otworzy graczowi A najdłuższy łańcuch. Zauważmy, że gracz A za każdym razem może zostawić ostatnie dwa kwadraty w długim łańcuchu (trzy kwadraty i więcej), tym samym powodując, że jego przeciwnik B będzie zmuszony otwierać mu kolejne łańcuchy.

Gracz A może w ten sposób kontrolować grę. Jednakże, jeśli długość łańcucha jest równa 3, to gracz A, wykorzystując tę strategię, będzie oddawał przeciwnikowi większą część łańcucha, przy długości 4 gracze zremisują, a w sytuacji, gdy łańcuch zbudowany będzie z pięciu i więcej kwadratów, gracz A może realnie myśleć o zwycięstwie.

Tak jak każdą grę, również i tę można modyfikować. Zachęcam do tworzenia własnych plansz (np. zastępując podstawowe pole kwadratu innym wielokątem) i rozważań na temat strategii w nich występujących.

Informacje o poziomach gry są zaczerpnięte z: I. Stewart, *Histerie matematyczne. Gry i zabawy z matematyką*, przeł. Paweł Strzelecki, Prószyński i S-ka, Kraków.



Zadania

Redaguje Krzysztof TURZYŃSKI

F 825. Piłeczka upuszczona z pewnej wysokości odbija się elastycznie od podłoża i powraca do wyjściowego poziomu. Oznacza to, że jeśli piłeczka miała masę m , a jej prędkość tuż przed odbiciem wynosiła v , to zmiana pędu piłeczki przy odbiciu jest równa $2mv$, energia zaś się nie zmienia. Jak to możliwe, że zachodzi przekaz pędu bez przekazu energii?

Rozwiązanie na str. 7

F 826. W stanie Michigan między miejscowościami Delta i Albion wykopano idealnie prosty, podziemny tunel. W tunelu ułożono tory, po których wagony pasażerskie mogą poruszać się bez tarcia i bez oporów powietrza. Ruch tych wagonów powodowany jest przez siłę grawitacji: najpierw przybliżają się one do środka Ziemi, później zaś oddalają się od niego. Ile trwa podróż wagonu między Deltą i Albionem?

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Tomasz TKOCZ

Dany jest wielościan wypukły o następujących własnościach: w każdym wierzchołku spotykają się 3 krawędzie, każda ściana jest wielokątem wpisanym w okrąg.

M 1375. Udowodnić, że każde dwie sąsiednie ściany są wpisane we wspólną, jednoznacznie wyznaczoną sferę.

Rozwiązanie na str. 16

M 1376. Udowodnić, że trzy sąsiednie ściany są wpisane we wspólną sferę.

Rozwiązanie na str. 7

M 1377. Udowodnić, że wielościan jest wpisany w sferę.

Rozwiązanie na str. 5

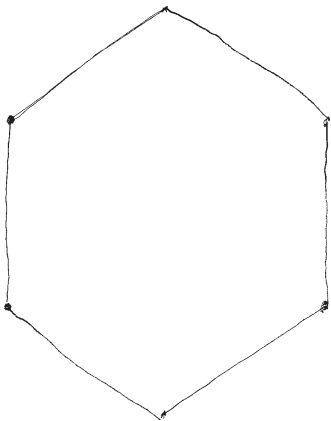




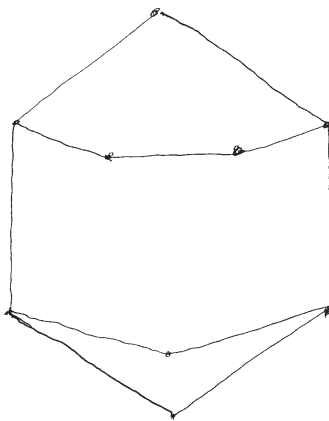
mała delta

Lekcja rysunku (4)

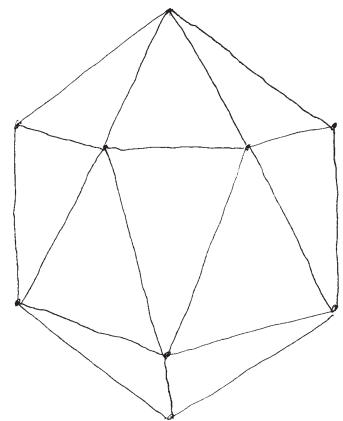
Narysujemy teraz figurę bardziej skomplikowaną: dwudziestościan. Najpierw rysujemy sześciokąt zbliżony do foremnego (rys. 1). Aby zachować symetrię, możemy pomocniczo zaznaczyć oś symetrii i inne „kontrolne” proste. Teraz najważniejszy moment – prowadzimy pięć ważnych kresek łączących symetryczne względem osi punkty: na przykład trzy kreski na górze i dwie na dole (rys. 2).



Rys. 1

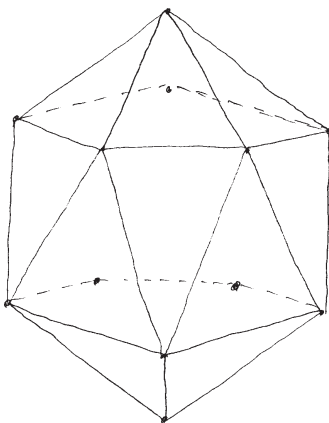


Rys. 2

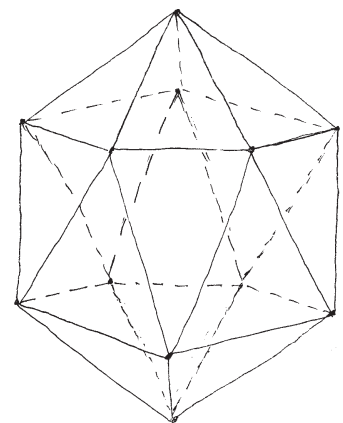


Rys. 3

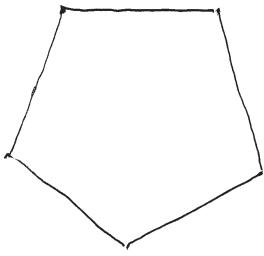
Gdy to zrobimy, wystarczy połączyć odpowiednie punkty (rys. 3), żeby otrzymać widoczne krawędzie dwudziestościanu. Bez problemu zaznaczymy również krawędzie niewidoczne. Uzupełniamy rysunek o kolejne pięć kresek w odwrotnej kolejności niż poprzednio: tam gdzie były trzy kreski, prowadzimy dwie i na odwrót (rys. 4). Wreszcie łączymy odpowiednie punkty (liniami przerywanymi), żeby zaznaczyć niewidoczne krawędzie (rys. 5).



Rys. 4



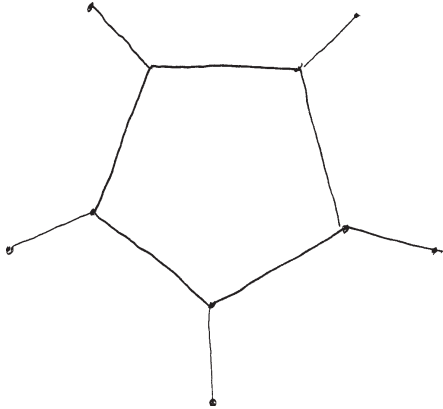
Rys. 5



Rys. 6

Nieco trudniej rysuje się dwunastościan foremny, a powodem jest konieczność dokonania większej liczby wyborów. Zaczynamy od narysowania pięciokąta w przybliżeniu foremnego, ze względu na praktycznych „do góry nogami” (rys. 6).

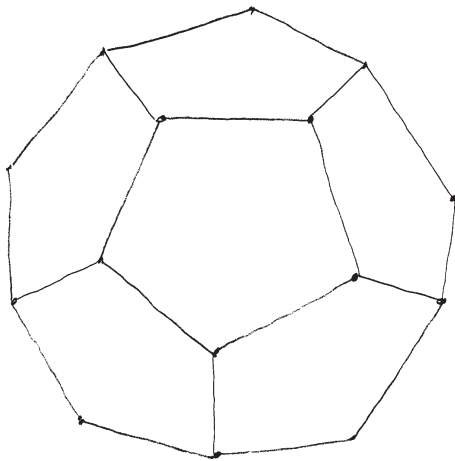
Z każdego wierzchołka wyprowadzamy odcinki (rys. 7).



Rys. 7

W tym miejscu jest największa trudność, bo trzeba te „rączki” narysować metodą prób i błędów: nachylenie i długości odcinków dobieramy doświadczalnie. Sugestia może być taka, żeby końce dorysowywanych odcinków rozłożyły się mniej więcej podobnie, jak wierzchołki pięciokąta foremnego. Podkreślmy jednak – mniej więcej.

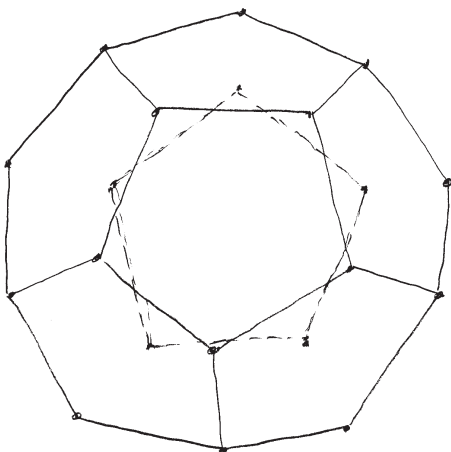
I teraz łączymy sąsiednie „rączki” daszkami składającymi się z dwóch odcinków (rys. 8). Widoczna część dwunastościanu jest gotowa.



Rys. 8

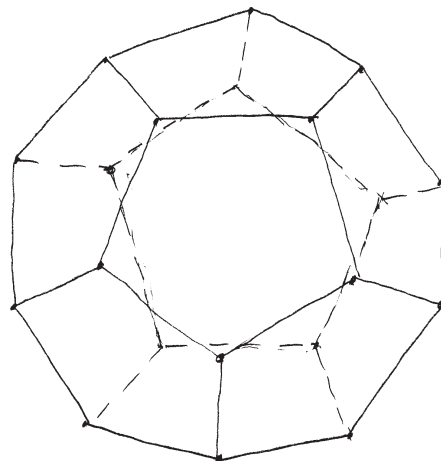
Nie należy się zrażać tym, że za pierwszym razem rysunek może nie być perfekcyjny. Pamiętajmy, że nawet wielcy artyści nieraz wielokrotnie ćwiczyli różne szczegóły swoich późniejszych doskonałych dzieł. Do doskonałości dochodzi się poprzez ćwiczenia.

Jeśli zechcemy dorysować niewidoczne krawędzie, to przerywaną linią rysujemy pięciokąt identyczny jak ten wyjściowy, tylko obrócony o 180 stopni wokół wybranego w przybliżeniu środka danego pięciokąta (rys. 9).



Rys. 9

W praktyce polega to na tym, że rysujemy odcinki równoległe do odpowiednich boków tegoż pięciokąta i potem łączymy z wierzchołkami wcześniej narysowanych daszków. I już (rys. 10).

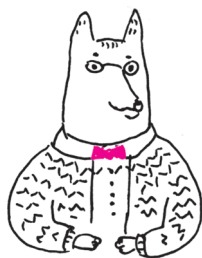


Rys. 10

pisał i rysował Zdzisław POGODA

Nierówności i styczne

Michał KIEZA



W dowodzeniu nierówności często pomocna bywa tak zwana metoda stycznych. Zdarza się, że wykres funkcji leży nad pewną prostą styczną do niego lub pod taką prostą (wszędzie lub tylko na jakimś przedziale). To oznacza, że możemy oszacować wartości tej funkcji przez wartości funkcji liniowej, której wykresem jest wybrana styczna. Żeby takie oszacowanie doprowadziło do celu, wybrana styczna musi przechodzić przez punkt, dla którego badana nierówność jest równością. Przyjrzymy się kilku przykładom zastosowań tej metody. We wszystkich przyda się równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 :

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Sprawnie różniczkujący Czytelnik wyprowadzi ten wzór z łatwością.

1. (XLVII Olimpiada Matematyczna, II etap) Wykazać, że jeśli każda z liczb a, b, c jest nie mniejsza od $-\frac{3}{4}$ oraz $a + b + c = 1$, to

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Rozwiązanie. Daną nierówność możemy przepisać w postaci

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}, \text{ gdzie } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Zauważmy, że równość zachodzi dla $a = b = c = \frac{1}{3}$. Równanie stycznej do funkcji f w punkcie $\frac{1}{3}$ ma postać

$$y = \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}.$$

Zauważmy, że dla liczb a, b, c , spełniających warunek $a + b + c = 1$, suma wartości wyrażenia $\frac{18}{25}x + \frac{3}{50}$ jest równa $\frac{18}{25}(a + b + c) + 3 \cdot \frac{3}{50} = \frac{9}{10}$.

Wystarczy więc, jeśli wykażemy, że dla $x \geq -\frac{3}{4}$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{18}{25}x + \frac{3}{50},$$

co sugeruje wykres na rysunku 1. Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$0 \leq (3x - 1)^2(4x + 3),$$

a ta nierówność jest spełniona, ponieważ $x \geq -\frac{3}{4}$.

2. (Zadanie 506 z Klubu 44M) Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + c^2d + d^3} + \frac{d^4}{d^3 + d^2a + a^3} \geq \frac{a + b + c + d}{4}.$$

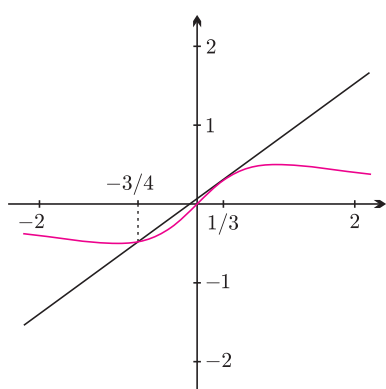
Rozwiązanie. Na pierwszy rzut oka ten przykład jest inny od poprzedniego – tym razem mamy sumę funkcji dwóch zmiennych. Ale to tylko pozorna trudność. Spróbujmy udowodnić nierówność

$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + b^3} \geq \alpha a + \beta b,$$

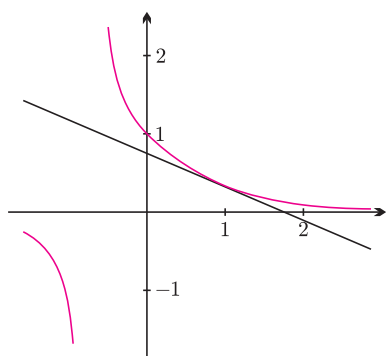
gdzie α i β są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Dzieląc obie strony przez a i podstawiając $x = \frac{b}{a}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{1 + x + x^3} \geq \alpha + \beta x.$$

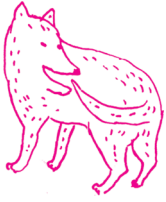
Teraz już wiemy, co robić: w wyjściowej nierówności równość zachodzi dla $a = b = c = d$, więc musimy tak dobrać współczynniki α i β , aby równość zachodziła dla $x = 1$. Znajdując równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x+x^3}$ w punkcie $x = 1$, otrzymujemy współczynniki $\alpha = \frac{7}{9}$ i $\beta = -\frac{4}{9}$.



Rys. 1. Wykres funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ oraz stycznej do wykresu w punkcie $\frac{1}{3}$.



Rys. 2. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{1 + x + x^3}$ i stycznej w $x = 1$.



Udowodnimy teraz, że dla dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1+x+x^3} \geq \frac{7}{9} - \frac{4}{9}x.$$

Równoważnie możemy zapisać $4x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \geq 0$, a następnie doprowadzamy nierówność do postaci $(x-1)^2(4x^2+x+2) \geq 0$ – teraz widać, że to prawda dla dowolnego $x \geq 0$. Zatem dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+b^3} \geq \frac{7}{9}a - \frac{4}{9}b.$$

Szacując w ten sposób każdy ze składników lewej strony wyjściowej nierówności, dostajemy tezę.

3. (Olimpiada Matematyczna USA 2003) Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

Rozwiązanie. Tym razem sytuacja jest jeszcze inna, ponieważ mamy sumę funkcji trzech zmiennych. Jednak i w tym przypadku łatwo można ją sprowadzić do sumy funkcji jednej zmiennej. Zauważmy, że dana nierówność jest jednorodna: liczniki i mianowniki ułamków są wielomianami złożonymi z jednomianów tego samego stopnia, a ponadto stopień licznika i mianownika jest taki sam. Stąd wynika, że możemy bez straty ogólności przyjąć $a+b+c=3$. (Jest to bardziej wygodne niż założenie $a+b+c=1$, gdyż równość zachodzi dla $a=b=c=1$.) Wówczas dana nierówność przyjmuje postać

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 8.$$

Znajdując równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2}$ w punkcie $x=1$, otrzymujemy do udowodnienia nierówność

$$\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2} \leq \frac{4}{3}x + \frac{4}{3},$$

która jest równoważna $0 \leq 12x^3 - 15x^2 - 6x + 9 = 3(x-1)^2(4x+3)$, co jest prawdą dla $x > 0$. Dodając stronami otrzymane w ten sposób oszacowania wszystkich ułamków lewej strony danej nierówności, otrzymujemy tezę.

Jak nietrudno się przekonać, przy założeniu $a+b+c=3$, nierówność zachodzi nie tylko dla liczb dodatnich, ale także dla nie mniejszych niż $-\frac{3}{4}$.

Zadania dla Czytelników

4. (Zwardoń 2006) Liczby rzeczywiste x_1, x_2, \dots, x_n , gdzie $n \geq 1$, spełniają warunki

$$\frac{1}{n} \frac{x_i^2}{x_i+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad x_k > -1, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

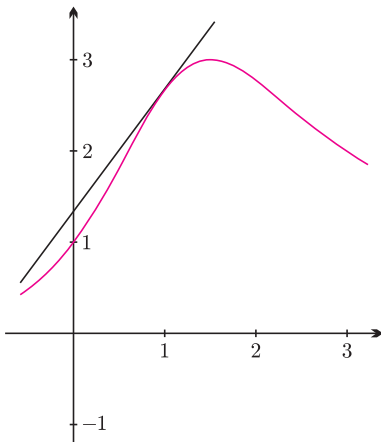
Udowodnić, że $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n$.

5. (Jugosławia 1986) Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

6. (Japonia 1997) Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$



Rys. 3. Wykres funkcji

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2}$$

i stycznej w $x=1$.

Informatyczny kącik olimpijski (59): Odśnieżanie

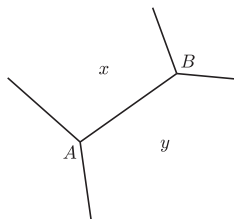


Rozwiązanie zadania M 1375.

Plaszczyzną symetryczną odcinka XY nazywamy płaszczyznę do niego prostopadłą, przechodzącą przez jego środek.

Rozważmy najpierw jedną ścianę x naszego wielościanu. Płaszczyzny symetryczne krawędzi tej ściany przecinają się wszystkie wzdłuż prostej ℓ_x prostopadłej do ściany x i przechodzącej przez środek okręgu opisanego na tej ścianie. Ta prosta jest zbiorem środków wszystkich sfer zawierających wszystkie wierzchołki ściany x .

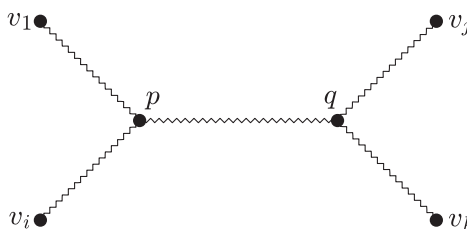
Niech AB będzie wspólną krawędzią sąsiednich ścian x i y . Proste ℓ_x, ℓ_y nie są równoległe i obie leżą w płaszczyźnie symetrycznej AB . Przecinają się więc w jednym punkcie, który jest środkiem sfery opisanej na ścianach x i y .



Z drugiej strony, jeśli jakaś sfera jest opisana na ścianach x i y , to jej środek musi leżeć zarówno na prostej ℓ_x , jak i na prostej ℓ_y , co dowodzi, że ta sfera jest wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie *Odśnieżanie* z zeszlorocznego Obozu Naukowo-Treningowego im. A. Kreczmara można sformułować w języku teorii grafów następująco. W nieskierowanym, ważonym, spójnym grafie G wyróżniono cztery wierzchołki. Należy usunąć część krawędzi z grafu tak, żeby nadal istniały ścieżki pomiędzy każdą parą wyróżnionych wierzchołków i żeby suma wag krawędzi, które pozostały w grafie, była jak najmniejsza.

Oznaczmy zbiór wierzchołków grafu G przez V i niech n, m oznaczają liczbę wierzchołków i krawędzi w grafie. Niech $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ będą wyróżnionymi wierzchołkami. Szukany optymalny zestaw nieusuniętych krawędzi na pewno nie będzie zawierać cyklu. Gdyby były tylko dwa wyróżnione wierzchołki, v_1 i v_2 , to nieusunięte krawędzie tworzyłyby najkrótszą ścieżkę z v_1 do v_2 . W przypadku trzech wyróżnionych wierzchołków od ścieżki z v_1 do v_2 w pewnym miejscu odchodziłaby jeszcze ścieżka do v_3 . Po chwili namysłu dochodzimy do wniosku, że w przypadku czterech wyróżnionych wierzchołków nieusunięte krawędzie powinny tworzyć kształt taki jak na poniższym rysunku. Wyróżnione wierzchołki są tutaj połączone ścieżkami z pewnymi dwoma wierzchołkami p i q (nazwijmy je wierzchołkami *centralnymi*), które również są połączone ścieżką. Bez straty ogólności wierzchołki v_1 i pewien inny wierzchołek v_i dla $i \in \{2, 3, 4\}$ są połączone z p , pozostałe dwa są połączone z q . Rysunek obejmuje również przypadki, gdy niektóre wierzchołki pokrywają się (np. $p = q$ lub $p = v_1$) – w takich sytuacjach odpowiednie ścieżki mają zerową długość.



Jeśli przez $d[u, v]$ oznaczymy długość najkrótszej ścieżki pomiędzy wierzchołkami u i v , to koszt powyższego rozwiązania wynosi

$$d[v_1, p] + d[v_i, p] + d[p, q] + d[q, v_j] + d[q, v_k].$$

Parę wierzchołków centralnych p i q możemy wybrać na $O(n^2)$ sposobów, zaś wierzchołek v_i na trzy sposoby. Jednak złożoność czasowa algorytmu jest zdominowana przez obliczenie tablicy d , które wykonujemy w czasie $O(nm \log n)$ za pomocą n wywołań algorytmu Dijkstry.

Zadanie można rozwiązać szybciej. Ustalmy $i \in \{2, 3, 4\}$. Niech graf G_i powstaje przez dodanie do grafu G dodatkowych wierzchołków s, t i dodatkowych krawędzi: wierzchołek s łączymy z każdym wierzchołkiem $u \in V$ krawędzią o wadze $d[v_1, u] + d[v_i, u]$, zaś wierzchołek t łączymy z każdym $u \in V$ krawędzią o wadze $d[u, v_j] + d[u, v_k]$.

Zauważmy, że ścieżka $s \rightarrow p \rightsquigarrow q \rightarrow t$ w grafie G_i odpowiada rozwiązaniu, w którym jako wierzchołki centralne wybieramy p i q ; koszt takiego rozwiązania jest równy długości tej ścieżki. Tak więc, aby rozwiązać zadanie, wystarczy dla każdego i znaleźć najkrótszą ścieżkę z s do t w grafie G_i .

Do konstrukcji grafu G_i musimy wyznaczyć wartości $d[v, u]$ dla $v \in \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i $u \in V$. Ostatecznie nasze rozwiązanie wymaga siedmiu wywołań algorytmu Dijkstry (czterech w grafie G do obliczenia d i po jednym w grafie G_i dla każdego wyboru v_i). Graf G_i ma $n + 2$ wierzchołków i $m + 2n$ krawędzi, więc koszt algorytmu Dijkstry jest w nim taki sam jak w grafie G . Zatem rozwiązanie działa w czasie $O(m \log n)$.

Tomasz IDZIASZEK

Fundamental Physics Prize

... jest nazwą, która jeszcze nie ma oficjalnego przekładu na język polski. Nic dziwnego, nagroda ta została ustanowiona w lipcu 2012 roku. Zaczęło się spektakularnie. Dziewięciu teoretyków dostało po trzy miliony dolarów.

W ten sposób utworzony został komitet Nagrody, który co roku ma dobrać sobie nowego członka, ogłaszając go laureatem.

Pierwszymi nagrodzonymi zostali następujący naukowcy (kolejność alfabetyczna).

- Nima Arkani-Hamed (najmłodszy, ur. 1972) za oryginalne podejście do najważniejszych problemów fizyki cząstek, w tym za pomysł tzw. wielkich dodatkowych wymiarów przestrzennych [1].
- Alan Harvey Guth (najstarszy, ur. 1947) między innymi za zaproponowanie kosmologicznej inflacji [2].
- Alexei Kitaev za ideę odpornych na błędy obliczeń kwantowych z użyciem anyonów [3].
- Maxim Kontsevich za rozwijanie owocnych związków fizyki teoretycznej z matematyką, np. rozwinięcie homologicznej interpretacji tzw. symetrii lustrzanej superstrun [4].
- Andrei Linde za rozwinięcie kosmologii inflacyjnej [5].
- Juan Maldacena za dualność teorii cechowania i grawitacji pozwalającą również na wgląd w układy silnie sprzężone, jak np. wysokotemperaturowe nadprzewodniki [6].
- Nathan Seiberg za istotny wkład w rozumienie kwantowej teorii pola za pomocą geometrii nieprzemiennej [7].
- Ashoke Sen za zauważenie dualności w teorii strun wiążącej wszystkie pięć wersji tej teorii [8].
- Edward Witten za to (w skrócie), że wielkim teoretykiem jest [7, 9].

Pora przedstawić fundatora. Jest nim Yuri Milner (ur. 1961) rosyjski multimilioner „internetista”, który do biznesu przeszedł rozczarowany swoją karierą fizyka, ale za najbardziej zmarnowane uważa kilka lat pracy w Banku Światowym.

W grudniu 2012 roku zostali ogłoszeni laureaci stowarzyszonych nagród: *Physics Frontier Prize* oraz *New Horizons in Physics Prize*. Pierwsza (rzędu wielkości mniejsza) jest przedsiódką nagrody głównej, bo to spośród jej laureatów ma być wyłoniony kolejny członek (bądź członkowie, nie ma ograniczenia co do liczby nagradzanych osób) komitetu. Kandydatami zostali:

- Charles Kane, Laurens Molenkamp i Shoucheng Zhang (wspólnie) za przewidzenie istnienia oraz odkrycie izolatorów topologicznych;
- Alexander Polyakov oraz Joseph Polchinski (osobno) za szereg odkryć w teorii pola i teorii strun.

Natomiast druga ze stowarzyszonych nagród ma wyróżniać młodych wizjonerskich naukowców. W 2012 roku po 100 tysięcy dolarów otrzymali Niklas Beisert, Davide Gaiotto, oraz Zohar Komargodski.

Ale to jeszcze nie wszystko. Również w grudniu zostały przyznane dwie nagrody *Special Fundamental Physics Prize*, które mogą być przyznawane w dowolnym momencie za wyjątkowe osiągnięcia.

Pierwszą sumę trzech milionów dolarów dostał Stephen Hawking za całokształt, a drugą (podzieloną na trzy równe części) obdzielono (obecnych i byłych) kierowników projektów, które doprowadziły do odkrycia nowej cząstki w trakcie poszukiwania bozonu Higgsa w CERN. Nagrodzeni zostali Lyn Evans (LHC), Peter Jenni i Fabiola Gianotti (ATLAS) oraz Michel Della Negra, Tejinder Singh Virdee, Guido Tonelli i Joe Incandela (CMS) za ich wiodącą rolę w odpowiednich projektach.

Uroczyste wręczenie przyznanych w grudniu nagród odbędzie się w marcu w CERN razem z ogłoszeniem (i wręczeniem) głównej nagrody za 2013 rok. Myślę, że będzie to jednocześnie medialne wydarzenie przyciągające uwagę tzw. cywilizowanego (czyli medialnego właśnie) świata.

Nie sposób uniknąć porównania z Nagrodą Nobla, do której FPP jest po prostu ortogonalna. Potencjalni laureaci obu nagród to niemal zbiory rozłączne.

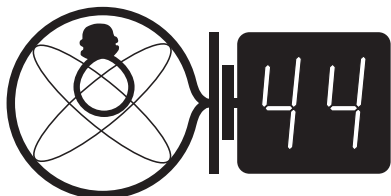
Yuri Milner coś światu mówi. A co kto usłyszy, to tylko od niego zależy.

Piotr ZALEWSKI

- [1] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G.R. Dvali, *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, hep-ph/9803315, Phys. Lett. B429(1998)263–272 (4748 cytowań).
- [2] A.H. Guth, *The inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D23(1981)347–356 (4271 cytowań).
- [3] A.Yu. Kitaev, *Fault tolerant quantum computation by anyons*, quant-ph/9707021, Ann. Phys. 303(2003)2–30 (285 cytowań).
- [4] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, arXiv:q-alg/9709040, Lett. Math. Phys. 66(2003)157–216 (554 cytowań).
- [5] A.D. Linde, *A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems*, Phys. Lett. B108(1982)389–393 (2513 cytowań).
- [6] J. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, hep-th/9711200, Adv. Theor. Math. Phys. 2(1998)231–252 (8719 cytowań).
- [7] N. Seiberg, E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, hep-th/9908142, JHEP 9909(1999)032 (3074 cytowania).
- [8] A. Sen, *Rolling tachyon*, hep-th/0203211, JHEP 0204(2002)048 (757 cytowań).
- [9] E. Witten, *Anti-de Sitter space and holography*, hep-th/9802150, Adv. Theor. Math. Phys. 2(1998)253–291 (5845 cytowań).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

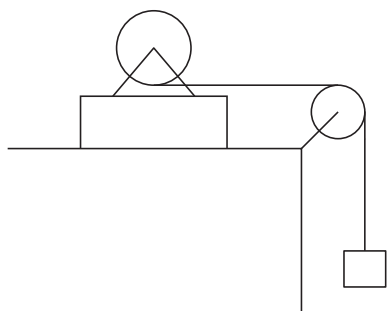


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2013

Zadania z fizyki nr 552, 553

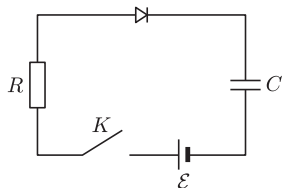
Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

552. Do podstawki leżącej na stole przymocowany jest pełny walec o promieniu R , który może swobodnie obracać się wokół własnej osi. Do końca nici nawiniętej na walec i przerzuconej przez nieruchomy bloczek, jak na rysunku 1, przymocowano ciężarek. Masy podstawki, walca i ciężarka są jednakowe. Ile obrotów wykona walec w czasie t ? W chwili początkowej układ spoczywa. Tarcie można zaniedbać.

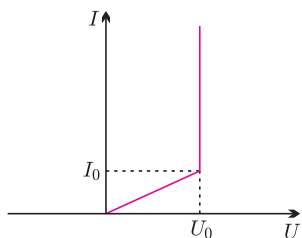


Rys. 1

553. Ile ciepła wydzielili się na oporze R w obwodzie przedstawionym na rysunku 2(a) po zamknięciu klucza? W chwili początkowej kondensator o pojemności C nie jest naładowany. Siła elektromotoryczna źródła prądu wynosi \mathcal{E} , opór wewnętrzny źródła jest zaniedbywalny. Wyidealizowana charakterystyka prądowo-napięciowa diody przedstawiona jest na rysunku 2(b).



Rys. 2(a)



Rys. 2(b)

Rozwiązania zadań z numeru 10/2012

Przypominamy treść zadań:

544. Cienkościenna, nieprzewodząca sfera o promieniu R i masie M naładowana jest równomiernie ładunkiem Q . W sferze znajdują się dwa niewielkie otwory leżące na tej samej średnicy. Cząstka o masie m i ładunku q jednoimiennym z Q zaczyna zbliżać się do sfery z bardzo dużej odległości wzdłuż prostej przechodzącej przez otwory, z prędkością początkową v . W chwili początkowej sfera spoczywa. Ile czasu cząstka znajdować się będzie wewnątrz sfery? Przyjmij, że efekty magnetyczne są zaniedbywalne.

545. Satelita poruszający się po orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o promieniu r został przyhamowany i zaczął poruszać się po orbicie eliptycznej, stycznej do powierzchni planety. Wyznaczyc czas spadania satelity na planetę. Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety wynosi g .

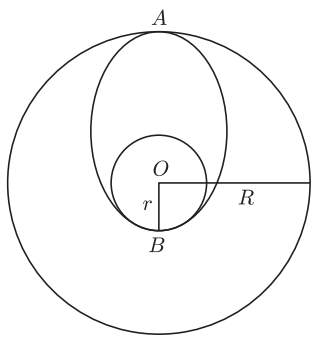
544. Sposób 1. Jako układ odniesienia możemy wybrać układ inercjalny, w którym sfera w chwili początkowej spoczywa. Siły elektrostatyczne są zachowawcze oraz nie działają żadne siły zewnętrzne, spełnione są więc zasady zachowania energii i pędu:

$$\frac{(mv^2)}{2} = \frac{(Mv_1^2)}{2} + \frac{(mv_2^2)}{2} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R},$$

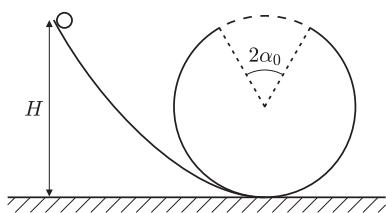
$$mv = Mv_1 + mv_2,$$

gdzie v_1 i v_2 są odpowiednio prędkościami sfery i cząstki w chwili, gdy cząstka dotrze do pierwszego otworu. Musi być spełniony warunek $v_2 > v_1$. Wiemy z prawa Gaussa, że wewnątrz równomiernie naładowanej sfery nie ma pola elektrycznego, cząstka porusza się więc od jednego do drugiego otworu ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością względną $v_x = v_2 - v_1$. Szukany czas wynosi $t = 2R/v_x$.

Sposób 2. Przyspieszenia \vec{a}_2 i \vec{a}_1 odpowiednio cząstki i sfery w dowolnym układzie inercjalnym wynoszą $\vec{a}_2 = \vec{F}/m$ i $\vec{a}_1 = -\vec{F}/M$, gdzie \vec{F} jest siłą, jaką sfera działa na cząstkę wzdłuż wektora położenia względnego obu ciał, a jej wartość zależy od odległości między nimi. Przyspieszenie względne wynosi $\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{F}/\mu$, gdzie $\mu = mM/(M + m)$. Jest to równanie ruchu fikcyjnej cząstki o masie μ , zwanej masą zredukowaną układu dwóch ciał, poruszającej się z ich prędkością względną w polu siły \vec{F} . Zasada zachowania energii w naszym



Rys. 3



Rys. 4

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 541 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki	
(Chocianów)	2 – 39,02
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2 – 28,34
Tomasz Wietecha (Tarnów)	8 – 27,04
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	23,47
Jacek Konieczny (Poznań)	23,03
Ryszard Woźniak (Kraków)	20,88
Andrzej Idzik (Bolesławiec)	10 – 19,79

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2009–2012 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (10), T. Wietecha (8), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana zostaje odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni”: M. Koźlik, J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Piotrowski;

„jednokrotni”: A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kąpcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikielawicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

problemie sprowadzonym do ruchu jednego ciała ma teraz postać

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu v_x^2}{2} + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Stąd

$$v_x = \sqrt{v^2 - \frac{Qq(M+m)}{2\pi\epsilon_0 RmM}}.$$

Szukany czas wynosi $t = 2R/v_x$, gdy $v > \sqrt{Qq(M+m)/2\pi\epsilon_0 RmM}$, dla mniejszych prędkości cząstka nie dotrze do wnętrza sfery.

Warto sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że energia kinetyczna fikcyjnej cząstki o masie zredukowanej równa jest sumie energii kinetycznych sfery i cząstki w układzie ich środka masy.

545. Przyjmijmy, że zmniejszenie prędkości satelity nastąpiło w punkcie A orbity kołowej przedstawionej na rysunku 3. Ognisko elipsy, po której zaczyna poruszać się satelita, znajduje się w punkcie O w środku planety. Interesuje nas czas, po którym satelita znajdzie się w punkcie B, czyli połowa okresu obiegu po elipsie T_1 . Z III prawa Keplera mamy

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a^3}{R^3},$$

gdzie T jest okresem obiegu satelity po orbicie kołowej, natomiast a – półosią wielką elipsy: $a = (R+r)/2$. Okres obiegu po orbicie kołowej wyznaczamy, wiedząc, że siła dośrodkowa jest siłą grawitacji

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

oraz $T = 2\pi R/v$ (M i m to masy planety i satelity, v to prędkość satelity). Stąd

$$T_1^2 = \frac{\pi^2(R+r)^3}{2GM}.$$

Uwzględniając, że przyspieszenie na powierzchni planety wyraża się wzorem $g = GM/r^2$, otrzymujemy szukany czas:

$$t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{2r} \sqrt{\frac{(R+r)^3}{2g}}.$$

* * *

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F

Zadania przygotowywane od lutego 2012 r. przez Ewę Czuchry miały nieco bardziej popularny charakter niż pojawiające się w lidze pod kierownictwem Jerzego B. Brojana. Oceniając nadesłane przez uczestników naszej zabawy rozwiązania, niżej podpisany miał zatem przyjemność zapoznawać się z eleganckimi i poprawnymi rozwiązaniami.

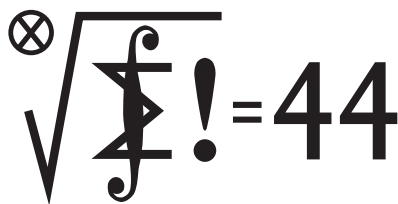
Tym większym zaskoczeniem był fakt, że wzięte wprost z podręcznika Hallidaya i Resnicka zadanie **538** ($WT = 1,96$) polegające na ocenie wysokości, z jakiej musi staczać się ciało, aby, oderwawszy się na początku wyrwy toru przedstawionego na rysunku 4, nie wypadło poza tę wyrwę, miało tak mało poprawnych rozwiązań. Spośród dziesięciu (!) nadesłanych rozwiązań jedynie prace **A. Idzika** i **T. Wietechy** zawierały kompletną dyskusję obu warunków, jakie ciało to musi spełnić: zasięg rzutu ukośnego ze skraju wyrwy nie może przekraczać jej rozmiaru oraz siła grawitacji nie oderwie ciała od toru przed osiągnięciem brzegu wyrwy. Chociaż niemal wszyscy rozwiązujący zauważyli pierwszy z tych warunków, drugi z nich umknął uwadze większości autorów.

Uwzględnienie obu warunków prowadzi do podwójnej nierówności na poszukiwaną wysokość. Tu niżej podpisany musi uderzyć się w piersi, bowiem opublikowane w numerze 9/2012 rozwiązanie zawiera irytującą literówkę: ostateczny wynik powinien mieć postać

$$\frac{1}{2} \cos \alpha_0 \leq \frac{H}{R} - 1 - \cos \alpha_0 \leq \frac{1}{2 \cos \alpha_0}.$$

Krzysztof TURZYŃSKI

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2013

Zadania z matematyki nr 655, 656

Redaguje Marcin E. KUCZMA

655. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Punkt E jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC oraz przedłużeń boków AB , AC . Punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD . Dowieść, że jeżeli trójkąt CEF jest równoramienny, to także trójkąt CBD jest równoramienny.

656. Dana jest liczba naturalna $n \geq 1$. Niech M_n będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny składa się z n dziewiątek: $M_n = 99 \dots 9 = 10^n - 1$. Znaleźć najmniejszą jej wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym cyfra 9 nie występuje.

Zadanie 656 zaproponował pan Piotr Zarzycki z Gdańska.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2012

Przypominamy treść zadań:

647. Dany jest przedział otwarty, którego końcami są kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych, większych od 1. Dowieść, że w tym przedziale można znaleźć trzy różne liczby naturalne a, b, c takie, że $a^2 + b^2$ dzieli się przez c .

648. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 3$). Udowodnić, że ciąg $(\sqrt[n]{F_{n+2}})$ jest malejący.

647. Niech liczby n^2 , $(n+1)^2$ będą końcami danego przedziału. Wymagane warunki spełniają na przykład liczby $a = n^2 + 2$, $b = n^2 + n + 1$, $c = n^2 + 1$. Rzeczywiście, $a \equiv 1$, $b \equiv n \pmod{c}$, więc $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{c}$.

648. Mamy dowieść, że $F_{n+1} > F_{n+2}^{-1}$. Dla $n = 2$ to prawda ($2^2 > 3^{-1}$). Dalej przyjmujemy $n \geq 3$. Korzystamy ze wzoru $F_n = (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})/\sqrt{5}$, gdzie $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$. Oznaczmy:

$$E_n = \frac{\varphi^n - \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad G_n = \frac{\varphi^n + \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}; \quad \text{zatem} \quad E_n \leq F_n \leq G_n.$$

Wystarczy pokazać, że $E_{n+1} > G_{n+2}^{-1}$, czyli $(E_{n+1}/G_{n+2})^n > 1/G_{n+2}$. A ponieważ $G_{n+2} > \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$, wystarczy dowieść, że

$$(1) \quad \left(\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}}\right)^n > \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{n+2}}.$$

Iloraz w nawiasie szacujemy z dołu:

$$\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}} = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{-n-1}}{\varphi^{n+2} + \varphi^{-n-2}} = \frac{1}{\varphi} \left(1 - \frac{\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4}}{1 + \varphi^{-2n-4}}\right) > \frac{1 - (\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4})}{\varphi}.$$

Stąd i z nierówności Bernoulliego

$$\left(\frac{E_{n+1}}{G_{n+2}}\right)^n > \frac{1 - n(\varphi^{-2n-2} + \varphi^{-2n-4})}{\varphi^n} = \frac{\varphi^2 - n\varphi^{-2n}(1 + \varphi^{-2})}{\varphi^{n+2}}.$$

Nierówność (1) będzie udowodniona, jeśli wykazemy, że licznik tego ostatniego ilorazu przekracza $\sqrt{5}$; jest to równoważne nierówności

$$(2) \quad \frac{\varphi^{2n}}{n} > \frac{1 + \varphi^{-2}}{\varphi^2 - \sqrt{5}}.$$

Podstawiając wartość stałej φ , sprawdzamy, że nierówność (2) zachodzi dla $n = 3$. Zachodzi więc dla wszystkich $n \geq 3$, bo wyrażenie po lewej stronie (2) przedstawia ciąg rosnący. To kończy dowód.

* * *

Napracowałem się przy tym zadaniu jak wół; jest obawa, że jak osioł. Tymi słowami rozpoczynała się jedna z nadesłanych do ligi prac. Trudno o większą radość dla redaktora ligi, który takie pełne wdzięku wyznaczenie odczytuje jako widomy przekaz, że prowadzenie ligi ma sens; że dostarcza ona uczestnikom ciekawych wrażeń. Jest więc okazja, żeby podziękować wszystkim, którzy tymi swoimi wrażeniami dzielą się z nami w przysyłanej korespondencji.

Czasem udaje się redaktora nieźle zaskoczyć. Oto inny z uczestników napisał, że zadania są rzetelnie trudne (co prawda, to prawda – przynajmniej niektóre), ich rozwiązywanie wymaga czasu i wysiłku, więc może by się za włożony trud należała jakaś nagroda: list uznaniowy do uczelni, czy wręcz stopień naukowy.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
 po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
 643 ($WT = 1,80$) i 644 ($WT = 1,74$)
 z numeru 6/2012

Tomasz Wietecha	8-44,80
Jędrzej Garnek	43,91
Roksana Słowik	43,65
Zbigniew Skalik	1-41,25
Adam Dzedziej	1-40,33
Wojciech Nadara	39,64
Paweł Łabędzki	35,77
Rami Marcin Ayoush	34,52
Janusz Olszewski	13-34,05
Zbigniew Sewartowski	1-32,78
Tomasz Kochanek	32,40
Witold Beđnarek	5-29,51
Andrzej Dorobisz	29,11
Marek Spychała	1-28,77
Krzysztof Kamiński	1-27,21
Andrzej Idzik	1-26,22
Jerzy Witkowski	5-24,14
Janusz Fiett	23,98
Tomasz Czajka	23,20
Michał Koźlik	22,80
Krzysztof Dorobisz	3-22,64
Grzegorz Karpowicz	1-21,28
Paweł Najman	5-20,86
Bartłomiej Dydą	5-20,18

Legenda (przykładowo): stan konta 5-29,51 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 29,51 punktów.

W tej kolejce 44 punkty przekroczył, i to już po raz dziewiąty, **Tomasz Wietecha** – nie mający sobie równych w ligowym dwuboju mat-fiz.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2010, 2011 lub 2012.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (13), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. PeczarSKI, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (9), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (5), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”:

Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jedenkrotni”:

T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. JózwiK, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowicz, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikula, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zajęc, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Na ile to było żartem, na ile serio? Powtórzmy nasze ulubione słowo, które się w corocznych omówieniach wielokrotnie pojawiało: zabawa. Nasza liga doprawdy nie ma ambicji być niczym innym.

Biorą w tej zabawie udział głównie uczniowie i studenci; tego oczekiwaliśmy, gdy liga zaczynała żywot. Ale jest też dość liczne grono uczestników bardziej zaawansowanych wiekowo, dla których matematyka była młodzieńczą fascynacją – nierzadko wręcz kierunkiem studiów – jednak dalsza ścieżka zawodowa poprowadziła w inne rejony; zadania ligowe pozwalają przywołać wspomnienia. I to właśnie jeden z nich uroczro napisał *napracowałem się jak wół*. Serdecznie życzymy dalszej uciechy z zabawy w ligę!

A teraz zwykle omówienie wybranych zadań.

Zadanie 626 [Ciągi $(x_n), (y_n)$: $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = (x_n + x_n^{-1})/2$, $y_n = \prod_{k=1}^n x_k^{2^{-k}}$; $\lim y_n = ?$] (współczynnik trudności $WT = 2,83$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). **J. Garnek** i **J. Olszewski** przedstawili rozwiązania podobne do firmowego, nieco zgrabniej zapisane. Inne było rozwiązanie autora zadania (**J. Cisło**) – na tym samym pomysle oparł swoją pracę **W. Nadara**:

Badane ciągi zależą od liczby $a > 0$; piszmy $y_n(a)$. Dla $a \geq 1$ mamy $1 \leq y_n(a) \leq y_{n+1}(a) \leq a$, więc istnieje granica $\lim y_n(a) =: g(a)$. Tak określona funkcja g spełnia w przedziale $(1; \infty)$ warunki

$$(1) \quad g(a)^2 = a \cdot g\left(\frac{a + a^{-1}}{2}\right), \quad 1 \leq g(a) \leq a;$$

równanie funkcyjne wynika z definicji $y_n(a)$ przez podniesienie do kwadratu i przejście do granicy. Oznaczając $f(a) = (a + a^{-1})/2$ i przepisując równanie jako $g(a) = a^{1/2} g(f(a))^{1/2}$, można z niego indukcyjnie wyprowadzić wzór

$$(2) \quad g(a) = \left[\prod_{k=1}^n (f^{k-1}(a))^{2^{-k}} \right] \cdot g(f^n(a))^{2^{-n-1}}, \quad \text{gdzie } f^m = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_m.$$

Łatwo sprawdzić, że $f^n(a) \rightarrow 1$ przy $n \rightarrow \infty$; stąd, wobec oszacowań w (1), czynnik poza nawiasem kwadratowym w (2) także dąży do 1. Wzór (2) (w granicy) pokazuje więc, że funkcja g jest (dla $a \geq 1$) jednoznacznie wyznaczona przez warunki (1). Pozostaje zauważyć, że funkcja $g(a) = (a + 1)/2$ te warunki spełnia – stanowi zatem jedyne rozwiązanie. Przypadek $a \leq 1$ może być sprowadzony do poprzedniego przez zamianę zmiennej $x \mapsto 1/x$. Odpowiedź: $\lim y_n(a) = (a + 1)/2$.

Zadanie 627 [Tabela (n wierszy, 2 kolumny; $n > 2$), w niej losowo liczby $1, \dots, 2n$. Zdarzenia: A – w dokładnie jednym wierszu różnica wynosi ± 1 ; B – w żadnym wierszu różnica nie wynosi ± 1 . Które bardziej prawdopodobne?] ($WT = 2,50$; $LPR = 4$ (5?)). Niektórzy uczestnicy zauważyli, że to zadanie – inaczej sformułowane, ale znaczeniowo równoważne – było zadaniem konkursowym XXX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (1989); rozwiązania można znaleźć w wielu miejscach. Konstrukcję różnowartościowego odwzorowania $B \rightarrow A$ (podaną jako rozwiązanie firmowe) wskazali **J. Cisło**, **A. Dzedzej**, **J. Fielt**.

Dwaj ostatni uczestnicy oraz **J. Olszewski** wyprowadzili ponadto wzory rekurencyjne dla liczb rozmieszczeń typów A, B , na przykład w postaci: $a_n = 2n[(2n - 1)b_{n-1} + a_{n-1}]$, $b_n = 2n[(2n - 2)b_{n-1} + a_{n-1}]$; $a_1 = 2$, $b_1 = 0$; jasne, że $a_n > b_n$.

Jeszcze jedna praca zawierała konstrukcję „firmową” (lub podobną), ale z opisem niezbyt jasnym, skrótowym, z luką w uzasadnieniu.

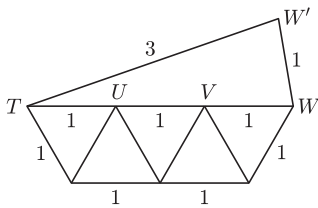
Zadanie 631 [Czy istnieje ośmiościan opisany na kuli, której rzut na każdą ścianę jest w niej zawarty?] ($WT = 3,01$; $LPR = 5$). Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego: **J. Cisło**, **J. Fielt**, **W. Nadara**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**.

Zadanie 633 [Płaszczyzna pokolorowana czerwono/zielono; dany $\triangle ABC \Rightarrow (\exists X, Y, Z \text{ zielone}, \triangle XYZ \equiv \triangle ABC)$ lub $(\exists P, Q \text{ czerwone}, |PQ| = 1)$] ($WT = 2,10$; $LPR = 5$ (6? 7?)). **J. Cisło**, **P. Łabędzki** przedstawili rozwiązania nie różniące się istotnie od firmowego; **J. Olszewski** –

podobne, nieco bardziej zawile. **A. Dzedzej** podał dowód (nie całkiem łatwy do formalnego zapisania), wykorzystujący ciągłe deformacje pewnych szczególnych konfiguracji. Jeszcze dwie prace zawierały dowody – jedną lub drugą z tych metod – jednak, zdaniem oceniającego, z takimi lukami lub niejasnościami, że nie mogły uzyskać pełnej oceny.

Do zaprezentowania wybieramy eleganckie rozwiązanie, które znalazł **Stanisław Bednarek**. Najpierw lemat: *Przy dowolnym rozbiciu płaszczyzny na trzy zbiory, w jednym z nich są dwa punkty odległe o 1*. Podany dowód:

przypuśćmy, że tak nie jest, wtedy (rysunek) punkty U, V są w różnych zbiorach i łatwo się przekonać, że punkty T, W są w jednym zbiorze; podobnie T, W' ; ale $|WW'| = 1$.



A dalej tak: założmy, że nie istnieje $\triangle XYZ \equiv \triangle ABC$ o wierzchołkach zielonych. Każdemu punktowi X przyporządkujemy $\triangle XYZ$ uzyskany przez przesunięcie $\triangle ABC$ o wektor \overrightarrow{AX} i wybierzmy wierzchołek czerwony; w zależności od tego, czy jest to obraz translacyjny punktu A, B czy C , zaliczamy punkt X do zbioru I, II lub III. W którymś z tych zbiorów są punkty X', X'' odległe o 1 (lemat); mamy trójkąty $X'Y'Z', X''Y''Z''$, i zależnie od tego, czy to zbiór I, II czy III, odcinek $X'X'', Y'Y''$ lub $Z'Z''$ ma oba końce czerwone.

Warto nadmienić, że „lemat” jest znanym twierdzeniem, mówiącym, że liczba chromatyczna płaszczyzny (czyli minimalna liczba kolorów potrzebnych do jej pomalowania tak, by każdy odcinek jednostkowy miał końce różnobarwne) przekracza 3.

Zadanie 637 [Dla jakich n zbior $\{1, \dots, n\}$ da się rozbić na trzy zbiory o równych sumach?] ($WT = 1,27$; $LPR = 16$). Łatwiutkie. Różne metody indukcyjne, pokazujące, że to się da, gdy $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ oraz $n > 3$. Na uwagę zasługuje ciekawe uogólnienie, jakie znalazł **J. Olszewski**: zbiór $\{1, \dots, n\}$ da się rozbić na k podzbiorów o równych sumach elementów wtedy i tylko wtedy, gdy $n + 1 \geq 2k$ oraz $n(n + 1) \equiv 0 \pmod{2k}$; dowód wykonalności przez indukcję, podobną do firmowej dla $k = 3$, ale bardziej zawiłą i wymagającą rozpatrywania licznych przypadków.

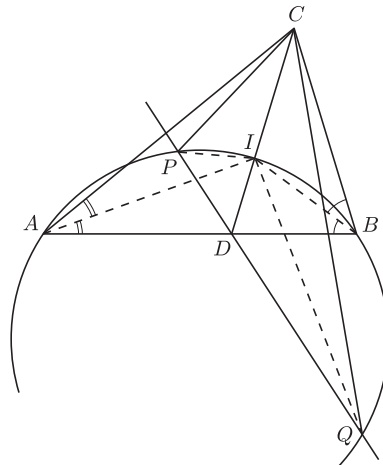
Natomiast **K. Kamiński** zauważył, że jeśli $r(n)$ oznacza liczbę rozbić zbioru $\{1, \dots, 6n\}$ na trzy zbiory o równych sumach, to $r(n) < 3^{6n}$ (liczba wszystkich rozbić na trzy zbiory), zaś rozważając rozbięcia powstałe z łączenia par o sumach $6n + 1$ można uzyskać dolne oszacowanie dla $r(n)$, również typu wykładniczego – i postawił pytanie, czy dla pewnej stałej $a > 0$ istnieje dodatnia, skończona granica $\lim a^{-n} r(n)$.

Zadanie 638 [$a, b, c > 0$, $A = \frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$, $B = \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a}$, $C = \frac{1}{3c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$, $a + b + c \geq abc \Rightarrow$ najwyżej jedna z liczb A, B, C jest < 1] ($WT = 2,38$; $LPR = 10$). Sporo dobrych prac, więc zadanie niezbyt trudne. Jednak ciekawe przez to, że właściwie wszystkie rozwiązania były różne (no, przy odpowiednim rozumieniu tego słowa...). Kilku uczestników pokazało (dość znacznie różniąc się w szczegółach), że każde dwie z liczb A, B, C dają w sumie co najmniej 2; rozwiązanie firmowe też należy do tej kategorii. Inni pokazali to samo nie dla sumy, tylko dla sumy kwadratów ($A^2 + B^2 \geq 2$).

Można też było wziąć iloczyn i dowodzić, że $AB \geq 1$; tak to zrobił **Tomasz Kochanek**, uzyskując dowód w jednej linijce:

$$AB = \frac{a+b+c}{abc} + \frac{1}{432} \left[\left(\frac{12}{a} - \frac{7}{b} + \frac{3}{c} \right)^2 + 23 \left(\frac{1}{b} - \frac{3}{c} \right)^2 \right] \geq 1.$$

Zadanie 639 [$\triangle ABC$; I – środek okręgu wpisanego; CI przecina AB w punkcie D ; prosta przez punkt D przecina okrąg (IAB) w punktach $P, Q \Rightarrow CI$ – dwusieczna kąta PCQ] ($WT = 2,41$; $LPR = 7$). Popatrzmy, jak to zrobił **Jędrzej Garnek**:



$\frac{|CA|}{|DA|} = \frac{|CI|}{|DI|} = \frac{|CB|}{|DB|}$, więc okrąg (IAB) – to okrąg Apoloniusza dla odcinka CD i stosunku $\frac{|CI|}{|DI|}$. Punkty P, Q leżą na nim, zatem także $\frac{|CP|}{|DP|} = \frac{|CI|}{|DI|} = \frac{|CQ|}{|DQ|}$, a to znaczy, że proste PI, QI są dwusiecznymi dwóch kątów trójkąta CPQ ; trzecia dwusieczna też musi przechodzić przez punkt I .

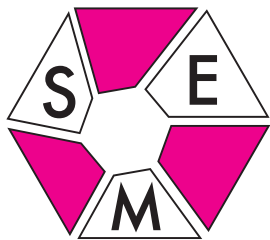
J. Olszewski, T. Tkocz przedstawili w zasadzie rozwiązanie firmowe. Inne rozwiązania (nie prostsze od firmowego): „erudycyjne” – **T. Kochanek** (inwersja), **W. Nadara** (biegunowa); rachunkowe – **A. Bujalski, T. Więtecha**.

Zadanie 642 [Gra (A, B) . Stała: $n \geq 1$ nieparzysta. Zmienna (stan gry): $x \geq 0$ całkowita. Start: $x = n^n$. Legalne ruchy: $x \mapsto x - r$ ($0 < r < n$) oraz $x \mapsto \text{round}(x/n)$. Zaczyna A ; kto osiągnie $x = 0$ (wygra)?] ($WT = 2,50$; $LPR = 7$). (Rozwiązujący wytknęli brak założenia $n > 1$). Zachowajmy terminologię z rozwiązania firmowego: liczba x jest zielona [czerwona], jeśli, startując od niej, strategię zwycięską ma gracz rozpoczynający [jego przeciwnik]. Prawie wszystkie dobre rozwiązania (**R. M. Ayoush, B. Dyda, J. Garnek, M. Miodek, J. Olszewski, W. Tobiś**) były oparte na tym samym pomysle, co firmowe (autor zadania **W. Nadara**): dowód, że wśród liczb $x \geq n^2$ czerwone są tylko (niektóre) liczby postaci $x \equiv \lceil n/2 \rceil \pmod{n}$; zatem $x = n^n$ jest zielona, czyli A wygrywa.

Marek Spychała zrobił to prościej, w ogóle nie wzmiankując reszty $\lceil n/2 \rceil$, a jedynie zauważając, że liczba $x = n^2$ jest zielona oraz dowodząc, że wszystkie większe liczby, podzielne przez n , są zielone. Przypuśćmy, że tak nie jest i że $x = c$ jest najmniejszą czerwoną wielokrotnością n , większą od n^2 ; wtedy liczba $c - 1$ (osiągalna z c) jest zielona. Wszystkie ruchy od c powinny prowadzić do liczb zielonych, zaś pewien ruch od $c - 1$ powinien prowadzić do liczby czerwonej. Ale jedyną liczbą, osiągalną od liczby $c - 1$ a nieosiągalną od c , jest liczba $c - n$, która wszelako czerwona nie jest – patrz określenie c . Gotowe! Uzyskana informacja jest słabsza niż w pozostałych rozwiązaniach (z $\lceil n/2 \rceil$), ale do potrzebnego wyniku (n^n zielona) akurat wystarczy. Krótko, ładnie.

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl



Więcej o finale Konkursu Prac Uczniowskich *Delty* można przeczytać w *Delcie* 12/2012.

Zadanie pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej z 1999 r.

Inne rozwiązanie opisano w artykule *Ekstrema* w *Delcie* 11/2012.



Jesienna konferencja Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej chyba już na stałe wpisała się w kalendarz spotkań dotyczących popularyzacji matematyki i pracy z uczniami uzdolnionymi matematycznie. W dniach 26-28 października do Ameliówki koło Kielc przyjechało około 150 nauczycieli matematyki oraz pracowników wyższych uczelni.

Tytuł konferencji, *Co jest najtrudniejsze?*, zmuszał do zastanowienia się, gdzie są największe trudności w nauczaniu i uczeniu się matematyki i z czego one wynikają. Uczestnicy mieli możliwość podzielenia się doświadczeniami dotyczącymi pokonywania tych trudności.

Konferencja była też okazją do zaprezentowania doświadczeń związanych z Olimpiadą Matematyczną Gimnazjalistów i organizacją seminariów olimpijskich.

Sobotni wieczór poświęcony był zmianom w szkolnictwie. Dyskusje przeciągnęły się do późnej nocy.

W ramach konferencji odbył się finał Konkursu Prac Uczniowskich *Delty*. Pięcioro młodych finalistów prezentowało swoje prace. Poziom ich wykładów spotkał się z ogromnym uznaniem jury oraz uczestników konferencji. Bardzo dziękujemy firmie *Zibi-Casio* oraz *Wydawnictwu Szkolnemu Omega* za ufundowanie nagród.

Jak co roku, tak i tym razem główną część konferencji stanowiły wystąpienia prelegentów. Odpowiedź na pytanie *Co jest najtrudniejsze?* nie była jednoznaczna. Na jednym z wykładów dowiedzieliśmy się, że *Najtrudniejsze jest to, co jest najprostsze*, a na wykładzie kończącym konferencję, że *Wszystko jest względne... czyli o tym, że odpowiedź na pytanie „Co jest najtrudniejsze?” w kontekście matematycznym zależy od tego, kogo zapytamy*.

W trakcie wykładów prezentowanych było sporo ciekawych problemów i zadań do wykorzystania w pracy z uczniami w szkole i na zajęciach pozalekcyjnych.

Zachęcając wszystkich zainteresowanych do zapoznania się z programem i materiałami z konferencji na stronie <http://sem.edu.pl/konferencja-2012>, przedstawiamy jedno z zadań, z wykładu *Kłopoty z kwantifikatorami*.

Zadanie. Koledzy Fredka mieszkają na okręgu. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży. Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie dokładnie tyle paliwa, ile potrzeba na odbycie podróży po całym okręgu. Wykaż, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc zegarowo po okręgu i tankując po drodze, odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

Rozwiązanie. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Jeśli Fredek ma jednego kolegę, to zaczynając u niego wykona pełne okrążenie i wróci do punktu wyjścia.

Załóżmy zatem, że dla n kolegów podróż jest możliwa i rozważmy $n + 1$ kolegów. Ponumerujmy ich zegarowo wokół okręgu: $K_1, K_2, \dots, K_n, K_{n+1}$.

Zauważmy najpierw, że pewien kolega K_i ma tyle paliwa, by wystarczyć na podróż do K_{i+1} (gdzie $K_{n+2} = K_1$). Gdyby bowiem żaden kolega nie spełniał tego warunku, to łączna ilość posiadanego przez wszystkich paliwa byłaby mniejsza, niż potrzeba do pełnego okrążenia, sprzecznie z założeniem.

Jeśli kolega K_{i+1} , wraz ze swoim paliwem, złożyłby wizytę koledze K_i , to z założenia indukcyjnego Fredek mógłby odwiedzić wszystkich (n punktów na okręgu).

Niech Fredek rozpocznie podróż tak, jakby K_{i+1} gościł u K_i . Wiemy, że gdyby u K_i zatankował całe paliwo oferowane przez K_i i K_{i+1} , to mógłby dokończyć podróż. U kolegi K_i dostanie wystarczająco wiele, by dotrzeć do K_{i+1} , bo tak wybraliśmy K_i . Potem u K_{i+1} zatankuje resztę paliwa oferowanego przez tych dwóch kolegów, więc – jak już wiemy – dokończy podróż. \square

Joanna JASZUŃSKA i Barbara ROSZKOWSKA-LECH

Prosto z nieba: Granice kosmosu

Teleskop nazwany został na cześć amerykańskiego astronoma Edwina Hubble'a, słynnego przede wszystkim z obserwacji „ucieczki galaktyk” i pomiarów związanego z tym efektu poczerwienienia światła, co zapoczątkowało nowoczesną obserwacyjną kosmologię.

Powstaje pytanie, jak będzie nazywać się ewentualna kolejna iteracja Głębokiego Pola. . .

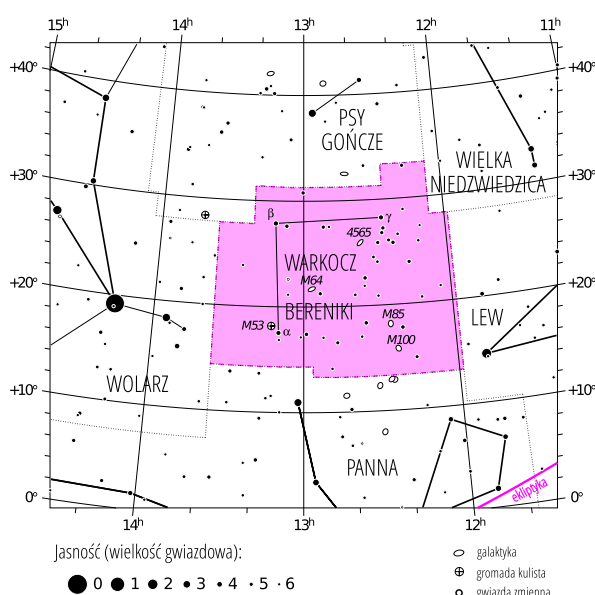
[1] http://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/science/xd.html

Teleskop Hubble'a jest wzorcowym przykładem zwycięstwa człowieka nad materią w dziedzinie badań ekstremalnych (wystarczy przypomnieć operację zakładania „okularów korygujących”, brawurowo przeprowadzoną przez astronautów). Wyśluzony Hubble miał być ostatnimi czasy wysłany na emeryturę z prozaicznych powodów (ograniczenie funduszy; zastąpi go zresztą wkrótce nowy, większy teleskop satelitarny Webba), jednak wciąż prowadzone są za jego pomocą przełomowe badania.

Jednym z nich jest obserwowanie specjalnie wybranego, małego wycinka nieba przez bardzo długi czas. Taktyka „długotrwałego naświetlania” umożliwia spojrzenie w głęboką czerń Wszechświata w nadziei na dostrzeżenie tam dalekich, a więc bardzo słabych obiektów – obserwowany obszar zwykło się zatem nazywać Głębokim Polem (ang. *Deep Field*). Pierwsze dane otrzymano jeszcze w XX w.; w 2004 r. opublikowano obserwacje Ultragłębokiego Pola (HUDF), a obecnym rekordzistą są dane z Ekstremalnie Głębokiego Pola (XDF, jesień 2012). Obserwowany obszar znajduje się w gwiazdozbiorze Pieca i jest wielokrotnie mniejszy od rozmiarów Księżyca; skompletowanie danych zajęło 10 lat, a całkowity czas ekspozycji wyniósł około 2 milionów sekund, czyli prawie miesiąc! Na zdjęciu [1] zarejestrowano światło pochodzące z galaktyk w różnych odległościach – fotony z najdalszej zostały wyemitowane w momencie, gdy wiek Wszechświata wynosił około 500 milionów lat. Większość obiektów to młode galaktyki w fazie wzrostu, nieraz oddziałujące grawitacyjnie, co prowadzi do zderzeń i zlewania się w większe objekty. Głębokie Pole jest unikalnym oknem w czasie i przestrzeni, przez które astronomowie mogą obserwować dramatyczne początki powstawania obecnie widocznych struktur. Jeden z podczerwonych detektorów wspomnianego wcześniej teleskopu Webba będzie kontynuował obserwacje XDF, sięgając według przewidywań teoretyków jeszcze głębiej, do miejsc (momentów) formowania się pierwszych gwiazd, nazwanych poetycko końcem Wieków Ciemnych.

Michał BEJGER

Niebo jak własna kieszeń: Luty



Gwiazdozbiór Warkocza Bereniki. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Gwiazdozbiór Warkocz Bereniki (łac. *Coma Berenices*) odnajdziemy na niebie obok Lwa, do którego ów pierwszy przynależał przed XVI w., gdy kartograf Geraldus Mercator (niektórzy twierdzą, że nieco wcześniej Caspar Vopel) związał ten obszar nieba z legendą o królowej Egiptu, Berenice II. Według opowieści ofiarowała ona bogini Afrodycie swoje włosy z prośbą o szczęśliwy powrót męża z wyprawy do Syrii. Królewski aspekt pobrzmiewa w nazwie drugiej co do jasności gwiazdy, α Comae Berenices (Diadem). Najjaśniejsza gwiazda Warkocza, β ($4,26^m$), jest za to bardzo podobna do Słońca i znajduje się w odległości około 30 lat świetlnych od naszego układu, co może dać pojęcie o jasności naszej dziennej gwiazdy widzianej z kosmicznych odległości.

Warkocz Bereniki zawiera osiem obiektów Messiera oraz wiele galaktyk (północną część lokalnej grupy galaktyk w Pannie). Powodem dobrej widoczności obiektów pozagalaktycznych jest oddalenie od Drogi Mlecznej, a więc od różnego typu pyłów i światła gwiazd populacji dysku: północny biegun galaktyczny znajduje się właśnie w Warkoczu. Obok gwiazdy γ Comae Berenices znajdziemy także podobną do Hiad, znanych z gwiazdozbioru Byka, gromadę otwartą Melotte 111, grupę 40 gwiazd mających taki sam ruch własny (łączna jasność $1,8^m$).

Nów Księżyca nastąpi 10 II, pełnia 25 II; 15 II natomiast w odległości jedynie 30 tys. km od Ziemi (czyli 4 promieni od jej powierzchni!) przemknie asteroida 2012 DA_{14} . Obiekt ma rozmiary olimpijskiego basenu (50 m), a jego zderzenie z Ziemią wywołałoby katastrofę porównywalną do meteorytu tunguskiego (nie mamy się jednak czego obawiać, ponieważ nawet tak bliski przelot nie stanowi realnego zagrożenia).

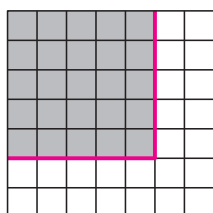
Merkury ($-0,54^m$) i Mars ($1,17^m$) znajdują się obecnie w gwiazdozbiorze Wodnika, po wschodniej stronie Słońca; nieco nad nimi Uran ($5,92^m$) w gwiazdozbiorze Ryb. Jowisz ($-2,23^m$) spotka się z Księżycem wieczorem 18 II, w gwiazdozbiorze Byka. Saturn jest widoczny w drugiej połowie nocy ($1,23^m$, Waga), a Wenus rano ($-3,80^m$, Koziorożec).

M. B.

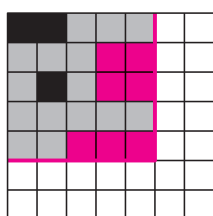


$$\sum_{k=1}^n k^3$$

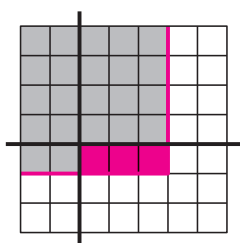
Joanna JASZUŃSKA



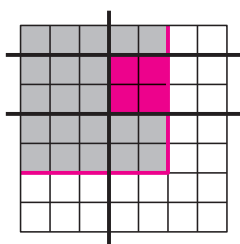
Rys. 1. Szary obszar to piąte naroże, kolorem zaznaczono jego brzeg.



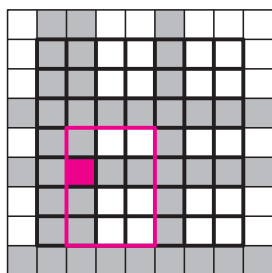
Rys. 2. Dla piątego naroża liczymy kolorowe prostokąty, natomiast nie liczymy czarnych, bo mieściły się one w mniejszych narożach.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5. Szarym wypełnieniem oznaczono wybrane wiersze i kolumny, kolorem – prostokąt i jego wyróżnioną kratkę.

Rozważmy szachownicę $n \times n$. Policzymy dwoma niezależnymi sposobami, ile jest na niej prostokątów o bokach wzdłuż linii podziału na kratki.

Sposób I. Dla $k = 1, 2, \dots, n$ nazwijmy k -tym narożem szachownicy jej lewą górną część o rozmiarach $k \times k$, a brzegiem tego naroża nazwijmy dwa jego boki: prawy i dolny (rys. 1). Prostokąty zliczamy wedle tego, w którym narożu się mieszczą. Prostokąt, który mieści się w k -tym narożu, mieści się też we wszystkich większych narożach. Aby nie liczyć takich prostokątów wielokrotnie, dla każdego naroża liczymy tylko te, które dotykają jego brzegu (rys. 2). Wtedy każdy prostokąt policzymy dokładnie raz – tylko przy najmniejszym narożu, w którym się mieści.

Ile prostokątów mieści się w k -tym narożu i dotyka jego brzegu? Taki prostokąt może dotykać obydwu boków z brzegu albo tylko jednego z nich. Prostokąt pierwszego z tych rodzajów (rys. 3) można utożsamiać z poziomą prostą wyznaczającą jego górny bok i pionową wyznaczającą bok lewy. Tego typu prostokątów jest więc k^2 , bo prostą w każdym z kierunków można wybrać na k sposobów.

Każdy prostokąt dotykający tylko prawego boku naroża (rys. 4) można utożsamiać z prostą pionową wyznaczającą lewy bok prostokąta (jest k możliwych takich prostych) oraz z parą różnych prostych poziomych wyznaczających jego poziome boki (par jest $\binom{k}{2}$, bo wybieramy dwie proste spośród k). Takich prostokątów jest więc $k \cdot \binom{k}{2}$. Prostokątów dotykających tylko dolnego boku naroża jest tyle samo.

Wszystkich prostokątów w k -tym narożu, dotykających jego brzegu, jest więc

$$k^2 + 2k \cdot \binom{k}{2} = k^2 + 2k \cdot \frac{k(k-1)}{2} = k^2 + k^2(k-1) = k^3.$$

Wobec tego wszystkich prostokątów na szachownicy jest $\sum_{k=1}^n k^3$. \square

Sposób II. Każdy prostokąt można utożsamiać z dwiema parami prostych zawierających jego boki. Oznacza to, że prostokątów jest tyle, na ile sposobów można na szachownicy wybrać parę różnych prostych pionowych i parę różnych prostych poziomych. Prostych w każdym z kierunków jest $n+1$, wybrać dwie można na $\binom{n+1}{2}$ sposobów, zatem prostokątów jest $\binom{n+1}{2}^2$. \square

Wniosek. Z powyższych dwóch rozwiązań wynika równość

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2, \quad \text{czyli} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

W połączeniu ze znanym wzorem $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ uzyskujemy $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$.

Jaka jest suma pól wszystkich rozważanych prostokątów?

Rozwiązanie. Każdy prostokąt „wnosi” do sumy pól tyle, z ilu jednostkowych kratek szachownicy się składa. Suma pól równa jest więc liczbie par $\langle \text{prostokąt, należąca do niego kratka} \rangle$. Ile jest takich par?

Dobudujmy do naszej szachownicy $n \times n$ po jednej pomocniczej kolumnie z lewej i z prawej oraz po jednym wierszu, na górze i na dole. Otrzymujemy szachownicę $(n+2) \times (n+2)$. Wybierzmy trzy różne kolumny (można to zrobić na $\binom{n+2}{3}$ sposoby) oraz trzy różne wiersze (na tyle samo sposobów). Taki wybór można utożsamiać z wyborem prostokąta i jego kratki: prostokąt to obszar pomiędzy pierwszą a trzecią z wybranych kolumn oraz pomiędzy pierwszym a trzecim z wybranych wierszy, zaś jego wyróżniona kratka jest na skrzyżowaniu środkowej z wybranych kolumn ze środkowym z wybranych wierszy (rys. 5).

Wobec tego par $\langle \text{prostokąt, należąca do niego kratka} \rangle$ jest $\binom{n+2}{3}^2$ i taka jest też szukana suma pól wszystkich prostokątów na szachownicy. \square