



## SPIS TREŚCI NUMERU 6 (469)

Krzaczki na ekranie <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 1
O trzech grach na trzech stosach <i>Wiktor Kuropatwa, Wojciech Nadara</i>	str. 4
Rozważmy Masterminda <i>Dominika Pawlik, Aleksander Zablocki</i>	str. 6

 Co dziś obchodzą genetyków? <i>Magdalena Fikus</i>	str. 9
--	--------

 Lekcja rysunku (6): dwunastościan rombów <i>Zdzisław Pogoda</i>	str.10
---	--------

### Wyniki Olimpiad

 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.15
---	--------

Słowa, słowa, słowa... <i>Marek Kordos</i>	str.16
---	--------

 Zadania	str.18
---	--------

Informatyczny kącik olimpijski (63): Plecak <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.19
---	--------


Kącik przestrzenny (18): O pożytku ze sfery wpisanej <i>Michał Kieza</i>	str.20
--	--------

Aktualności	str.21
-------------	--------

Klub 44	str.22
---------	--------

Prosto z nieba: Dziura w chmurach <i>Michał Bejger</i>	str.24
--	--------

Niebo jak własna kieszeń: Czerwiec	str.24
---------------------------------------	--------

 Łańcuch sfer <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25
---	--------

W następnym numerze polecamy



N  
I  
E  
S  
K  
O  
Ń  
C  
Z  
O  
N  
O  
Ś  
Ć

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta

pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7<sup>00</sup> – 18<sup>00</sup>.

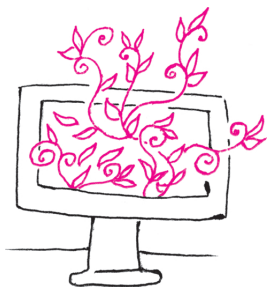
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**



# Krzaczki na ekranie

Tomasz IDZIASZEK

**ASCII.** Podstawowym sposobem reprezentacji znaków we współczesnych komputerach jest przyjęty w 1967 r. ASCII (czyt. aski, ang. *American Standard Code for Information Interchange*). Definiuje on 128 znaków, wśród których znajdują się 33 niedrukowalne znaki sterujące, znak odstępu, 52 litery (wielkie i małe litery alfabetu angielskiego), 10 cyfr i 32 znaki interpunkcyjne. ASCII przyporządkowuje każdemu znakowi liczbę z zakresu 0–127 (lub równoważnie szesnastkowo 0–7F). Poniższa tabelka przedstawia to przyporządkowanie:

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0A	0B	0C	0D	0E	0F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E	1F
<b>NUL</b>	<b>SOH</b>	<b>STX</b>	<b>ETX</b>	<b>EOT</b>	<b>ENQ</b>	<b>ACK</b>	<b>BEL</b>	<b>BS</b>	<b>HT</b>	<b>LF</b>	<b>VT</b>	<b>FF</b>	<b>CR</b>	<b>SO</b>	<b>SI</b>	<b>DLE</b>	<b>DC1</b>	<b>DC2</b>	<b>DC3</b>	<b>DC4</b>	<b>NAK</b>	<b>SYN</b>	<b>ETB</b>	<b>CAN</b>	<b>EM</b>	<b>SUB</b>	<b>ESC</b>	<b>FS</b>	<b>GS</b>	<b>RS</b>	<b>US</b>
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2A	2B	2C	2D	2E	2F	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	3A	3B	3C	3D	3E	3F
	!	"	#	\$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	4A	4B	4C	4D	4E	4F	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	5A	5B	5C	5D	5E	5F
@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	6A	6B	6C	6D	6E	6F	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	7A	7B	7C	7D	7E	7F
`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{		}	~	<b>DEL</b>



Pomimo że ASCII przypisuje znakom liczby 7-bitowe, w komputerze wygodnie jest przechowywać je w formacie jeden znak na bajt, ósmy bit zostawiając wyzerowany. Tak więc np. litera **a** ma przypisany kod  $1100001_2$ , czyli będzie reprezentowana jako bajt 01100001. Zwróćmy też uwagę na kolejność znaków w ASCII. Wiele programów sortuje napisy, porównując kody ASCII znaków, co niekoniecznie musi być najlepszym sposobem – choć znak odstępu znajduje się przed innymi znakami, a litery są ułożone w kolejności alfabetycznej, to wszystkie wielkie litery znajdują się przed małymi.



Tajemnicze znaki sterujące wypełniające pierwszy wiersz tabeli nie są bezpośrednio wyświetlane, ale służą do sterowania sposobem wyświetlania tekstu. Większość z nich ma już wyłącznie znaczenie historyczne, w użyciu pozostają m.in.: **NUL**, który w wielu językach programowania oznacza koniec napisu, **HT** – przesunięcie w prawo do ustalonej kolumny (tabulacja), **LF** i **CR** – koniec wiersza, czy też **ESC** oznaczający wejście w specjalny tryb interpretowania znaków.

Na szczególną uwagę zasługują znaki sterujące oznaczające koniec wiersza. W pierwszych komputerach, które posługiwały się dalekopisami jako swoimi urządzeniami wejściowymi, koniec wiersza sygnalizowany był za pomocą pary znaków **CR** i **LF**. Pierwszy z nich instruował drukarkę, aby przesunęła głowicę do początku wiersza (ang. *carriage return*), natomiast drugi, aby wysunęła papier na następny wiersz (ang. *line feed*). Ta konwencja jest nadal w użyciu w systemie operacyjnym Windows oraz w wielu tekstowych protokołach internetowych. Jednakże np. w systemach Linux i Mac OS X koniec wiersza oznaczany jest pojedynczym znakiem **LF**. To może stanowić problem dla użytkowników, którzy przenoszą swoje pliki tekstowe pomiędzy komputerami działającymi pod kontrolą różnych systemów operacyjnych. Plik tekstowy zapisany pod systemem Linux będzie wyglądał w systemie Windows jak niepodzielony na wiersze, zaś plik zapisany w Windows będzie miał w Linuksie dodatkowe znaki na końcach wierszy. Wiele programów radzi sobie z obiema konwencjami, jednak nie wszystkie.

**Ogonki.** Pewnym problemem z ASCII jest to, że definiuje on jedynie litery alfabetu angielskiego. Pomysł, w jaki sposób pomóc nieanglojęzycznym użytkownikom komputerów, był dość naturalny: postanowiono rozszerzyć kodowanie do pełnych 8 bitów i wykorzystać nowe znaki do zakodowania symboli z alfabetów narodowych. I tak 128 dodatkowych znaków w zupełności wystarczyło dla języków wywodzących się z łaciny, a także dla języków, w których alfabet składa się z podobnej liczby liter (np. rosyjskiego czy greckiego). Jednak było to zdecydowanie za mało, żeby wszystkie te języki pomieścić jednocześnie. W związku z tym używano różnych konwencji na

Wraz z końcem lata, między 15 a 21 września, odbędą się w Krakowie coroczne

## Międzynarodowe Warsztaty dla Młodych Matematyków

organizowane przez **Koło Matematyków Studentów UJ**. Tematem nadchodzących XVI Warsztatów będzie teoria ergodyczna i układy dynamiczne. Wśród „gwiazd” tego działu matematyki w tym roku jest zaproszony m.in. prof. Tomasz Downarowicz z Politechniki Wrocławskiej, specjalista z zakresu entropii w układach dynamicznych i entropii topologicznej.

Koło Matematyków zaprasza do udziału wszystkich zainteresowanych tematyką Warsztatów. Inicjatywa Koła obejmuje nie tylko zgłębianie wiedzy akademickiej, ale również rozmaite interakcje towarzyskie, w tym zwiedzanie miasta oraz atrakcje takie jak wyjście na kręgle, do teatru czy zwiedzanie krakowskiego ogrodu zoologicznego.

Aktualne informacje będą publikowane na stronie Warsztatów:

<http://kmsuj.im.uj.edu.pl/warsztaty>.

wykorzystanie dodatkowych znaków (tzw. *stron kodowych*), z których część została oficjalnymi standardami. I tak np. standard ISO-8859-1 (znany również jako Latin 1) definiuje litery dla większości języków zachodnioeuropejskich, natomiast ISO-8859-2 (Latin 2) dla języków środkowo- i wschodnioeuropejskich (w tym polskiego); ISO-8859-5 koduje cyrylicę, natomiast ISO-8859-7 – alfabet grecki.

Zanim jednak w 1993 r. Polski Komitet Normalizacyjny ustanowił normę PN-93 T-42118, która definiuje sposób kodowania polskich znaków zgodny z ISO-8859-2, producenci oprogramowania, którzy chcieli w swoich produktach używać polskich znaków, na własną rękę przypisywali im kody. Tak powstało około 20 różnych „standardów” o wdzięcznych nazwach, np. Mazovia, Cyfromat, CP852 czy CP1250. Ostatni z tych standardów nadal obowiązuje w systemie Windows jako domyślne kodowanie dla języków środkowoeuropejskich. Z tego powodu przenoszenie między różnymi systemami plików tekstowych, w których „ogonki” są zapisane w rozszerzonym ASCII, wymaga zastosowania odpowiedniej konwersji. Poniższa tabelka przedstawia, gdzie znajdują się polskie litery w dwóch najpopularniejszych kodowaniach oraz jakie znaki znajdują się na odpowiadających im pozycjach w kodowaniu Latin 1.



	8C	8F	9C	9F	A1	A3	A5	A6	AC	AF	B1	B3	B6	B9	BC	BF	C6	CA	D1	D3	E6	EA	F1	F3
Latin 2	⊗	⊗	⊗	⊗	Ą	ł	Ł	Ś	Ź	Ż	ą	ł	ś	ź	ż	Ć	Ę	Ń	Ó	ć	ę	ń	ó	
CP1250	Ś	Ź	ś	ź	˘	ł	Ą	ı	¬	Ź	±	ł	¶	ą	Ł	ż	Ć	Ę	Ń	Ó	ć	ę	ń	ó
Latin 1	⊗	⊗	⊗	⊗	ı	£	¥	ı	¬	¬	±	³	¶	¼	¿	Æ	Ê	Ñ	Ó	æ	ê	ñ	ó	

O ile jeszcze pojedynczy użytkownik mógł wybrać ulubione kodowanie swojego języka i się go trzymać, o tyle sprawa stała się trudniejsza wraz z upowszechnieniem (i unijęzyczeniem) Internetu. Sprawę rozwiązano następująco: każda strona WWW powinna być zaopatrzona w informację, w jakim kodowaniu została przygotowana. Dzięki temu przeglądarka internetowa będzie mogła poprawnie zinterpretować tekst na tej stronie. Problem pojawiał się, gdy twórca strony nie opatrzył jej taką informacją, a rzeczywiste kodowanie strony było inne niż to, którego spodziewała się przeglądarka. W takiej sytuacji zamiast polskich znaków na ekranie widzieliśmy różne „krzaczkę” (patrz rys. 1). Podobna sytuacja jest z mejlami – każda wiadomość musi zawierać informację o kodowaniu, w którym została wysłana.



	Latin 2	CP1250
Latin 2	ł ą c z n o ś ć	ł ś c z n o Ń Ć
CP1250	ł ± c z n o ¶ Ć	ł ą c z n o ś ć
Latin 1	³ ± c z n o ¶ æ	³ ¹ c z n o ⊗ æ

Rys. 1. Tabelka przedstawia, co możemy zobaczyć na stronie internetowej poświęconej komunikacji, w zależności od tego, jak została ona zakodowana (kolumna) i jakiego kodowania oczekuje nasza przeglądarka (wiersz). Mogą pojawić się różnice w wyświetlaniu niezdefiniowanych znaków, w szczególności ostatnia pozycja w tabelce może także zostać wyświetlona jako ³ ¹ c z n o œ æ, jeśli zamiast kodowania Latin 1 przeglądarka użyje jego nadzbioru – kodowania CP1252 (stosowanego w systemie Windows).

**Unikod.** Mnogość stron kodowych nadal nie rozwiązywała dwóch poważnych problemów: nie było możliwości zakodowania w tym samym dokumencie tekstu w językach o rozłącznych alfabetach (np. polskim i rosyjskim), jak również tekstów w językach o dużej liczbie znaków (50 tysięcy chińskich znaków nijak nie dało się zmieścić w 8 bitach). Naturalnym pomysłem na rozwiązanie tych problemów jest zrezygnowanie z ograniczenia „jeden bajt na znak” i zapisywanie każdego znaku np. w dwóch bajtach. Bezpośrednia implementacja tego rozwiązania ma jednak szereg wad, wśród których najbardziej oczywistą jest to, że każdy tekst zwiększyłby dwukrotnie zapotrzebowanie na pamięć komputera.

W 1987 r. rozpoczęto prace nad uniwersalnym międzynarodowym sposobem reprezentacji znaków, który został nazwany Unikodem (ang. *Unicode*). Jest on w ciągłym rozwoju, we wrześniu 2012 r. ogłoszona została wersja 6.2 tego standardu. Unikod definiuje 1 114 112 znaków (w przedziale 0–10FFFF). Z uwagi na ogromną ich liczbę w Unikodzie swoje miejsce znalazły nie tylko wszystkie używane współcześnie alfabety, lecz także historyczne (jak egipskie hieroglify czy pismo klinowe). Ponadto występuje w nim wiele symboli – od matematycznych, przez muzyczne, aż po całkowicie niszowe (rys. 2).

Znak	Liczba	Znak	Liczba
ą	U+0105	€	U+20AC
Ω	U+03A9	⚔	U+228A
Я	U+042F	♂	U+2642
κ	U+05D0	♣	U+2663
有	U+6709	♻️	U+267B
ə	U+0259	♪	U+1D160
𐍚	U+1245C	♫	U+270C

Rys. 2. Przykładowe znaki zdefiniowane w Unikodzie.

Jedną z kluczowych decyzji projektowych różniących ASCII od Unikodu jest wprowadzenie rozróżnienia między tym, w jaki sposób danemu znakowi przypisujemy unikalną liczbę, a tym, w jaki sposób tę liczbę będziemy zapisywać (kodować) w postaci ciągu bitów. Liczbę przypisaną znakowi w Unikodzie będziemy pisać szesnastkowo z prefiksem U+. Pierwsze 128 liczb jest przypisanych tak samo jak w ASCII, zatem np. A ma przypisaną liczbę U+0041.

Drugą kwestię regulują konkretne kodowania, spośród których najpopularniejsze jest UTF-8 (ang. *8-bit Unicode Transformation Format*). Głównym pomysłem jest zrezygnowanie z ustalonej liczby bajtów na znak. Jeśli przypisana znakowi liczba jest mniejsza niż 128, to kodujemy go w jednym bajcie. W przeciwnym przypadku znak będzie zakodowany w dwóch do czterech bajtach, według przepisu z tabelki.

Zakres oraz liczba bitów		Bajt 1	Bajt 2	Bajt 3	Bajt 4
0 – 7F	7	0xxxxxxx			
80 – 7FF	11	110xxxxx	10xxxxxx		
800 – FFFF	16	1110xxxx	10xxxxxx	10xxxxxx	
10000 – 1FFFFF	21	11110xxx	10xxxxxx	10xxxxxx	10xxxxxx

Przykładowo, litera **ą** ma kod U+105, zatem w systemie binarnym będzie to 10000101<sub>2</sub>. Do zapisu tej liczby potrzebujemy 9 bitów, więc zakodujemy ją w dwóch bajtach następująco: 11000100 10000101. Z kolei chiński znak 大 ma kod U+5927, czyli 101100100100111<sub>2</sub> binarnie, zatem potrzebujemy dla niego 15 bitów; w trzech bajtach będzie to 11100101 10100100 10100111.

Kodowanie UTF-8 ma sporo zalet (których nie ma np. kodowanie za pomocą dwóch bajtów). Przede wszystkim jest wstecznie kompatybilne z ASCII – każdy napis, w którym ósmy bit wszystkich bajtów jest wyzerowany, jest poprawnym (i tym samym) napisem w obu kodowaniach. Dzięki temu teksty w języku angielskim w UTF-8 nie zajmują więcej miejsca niż w ASCII. Ponadto, jeśli w napisie znajdzie się bajt 0, to nie może on być częścią jakiegoś wielobajtowego znaku, tylko zawsze koduje znak **NULL** – dzięki czemu zachowana jest kompatybilność z językami programowania, które tym znakiem oznaczają koniec napisu. Zadbano również o to, abyśmy – po rozpoczęciu czytania tekstu w losowym miejscu – byli w stanie łatwo stwierdzić, gdzie zaczyna się kod kolejnego znaku (pierwszy bajt, który nie jest postaci 1xxxxxx).

Wadą kodowania UTF-8 jest to, że analiza tekstu zakodowanego UTF-8 jest trudniejsza niż w przypadku ASCII. Dla przykładu, stwierdzenie, ile liter ma napis, wymaga przeczytania całego ciągu bajtów. Niemniej jednak jest to niewielka cena jak na to, że Unikonod zdejmuję z nas ból głowy spowodowany koniecznością obsługi wielu stron kodowych.

**Zagrożenia.** Choć mówią, że od przybytku głowa nie boli, warto jednak wspomnieć o pewnych kłopotach, które może powodować mnogość znaków Unikonodu. Zagadka dla Czytelników: proszę wskazać różnice między trzema znakami: **A**, **Α** i **А**. Są to kolejno litery alfabetu łacińskiego (U+0041), greckiego (U+0391) i cyrylicy (U+0410). Choć wyglądają tak samo, to Unikonod przypisuje im różne liczby, co można wykorzystać. Przykładowo, pierwsze systemy, które miały za zadanie wykrywać plagiaty, można było łatwo oszukać, zamieniając w pracy niektóre wystąpienia liter łacińskich na ich wizualnie identyczne odpowiedniki w cyrylicy.

Należy też uważać na łącza internetowe, które klikamy. Od 2010 r. jest możliwość rejestracji domen o nazwach zawierających dowolne znaki Unikonodu (zobacz IDN, ang. *Internationalized Domain Name*). Może się okazać, że nie wchodzimy na stronę naszego banku, ale na odpowiednio spreparowaną stronę o nazwie ludoząco podobnej do nazwy domeny banku.

Unikonod jest dość skomplikowany i w tym krótkim artykule nie byliśmy w stanie opisać wszystkich jego zalet i wad. Żeby uczynić go prawdziwie międzynarodowym, jego projektanci musieli zmierzyć się z wieloma problemami, bardziej złożonymi niż brak polskich „ogonków”. W szczególności niektóre języki zapisujemy od strony prawej do lewej. Dzięki Unikonodowi możemy w jednym dokumencie połączyć tekst angielski z arabskim. Na koniec trzeba wspomnieć, że aby w pełni korzystać z dobrodziejstw Unikonodu, należy zainstalować na komputerze krój pisma, który będzie zawierał potrzebne nam znaki. Zaprojektowanie kroju z pełnym wsparciem dla Unikonodu to tytaniczna praca, więc projektanci z reguły ograniczają się do wybranego podzbioru znaków.

Polskie litery w Unikonodzie zajmują po dwa bajty. Wracając więc do przykładu z rys. 1, jeśli stronę internetową zapiszemy w kodowaniu UTF-8, a przeglądarka spodziewać się będzie kodowania CP1250, to zamiast każdej polskiej litery zobaczymy dwa „krzaczkiki”: **Ł**, **Ä**... c z n o **Ł** > **Ä**±.

Fakt, że Unikonod radzi sobie z oboma kierunkami pisma, może rodzić pole do kolejnych subtelnych nadużyć. Unikonod definiuje znak sterujący **RL** (U+202E), który wymusza przełączenie w tryb wyświetlania tekstu od strony prawej do lewej. System Windows obsługuje nazwy plików w Unikonodzie. Jeśli więc stworzymy plik o nazwie **annRLtxt.exe**, to użytkownikowi zostanie zaprezentowana niewinnie wyglądająca nazwa **annexe.txt**. Kliknięcie na nazwę pliku nie otworzy edytora tekstu, ale uruchomi (potencjalnie złośliwy) program.

# O trzech grach na trzech stosach

Wiktor KUROPATWA\*, Wojciech NADARA\*\*

Czy garść kamieni usypanych w trzy stosy to wystarczająco dużo, by zapewnić dwóm osobom wyzwanie intelektualne? Okazuje się, że tak! W tym artykule, używając tych właśnie akcesoriów, stworzymy trzy gry, których analiza prowadzić będzie do ciekawych i w zadziwiający sposób powiązanych ze sobą wyników.

Pierwszą z gier jest znany ludzkości od wieków Nim. Gracze wykonują ruchy na przemian, zabierając z wybranego przez siebie stosu dowolną niezerową liczbę kamieni. Gra kończy się przegraną gracza, który nie może wykonać ruchu, czyli wtedy, gdy wszystkie stosy są puste. Gra Nim pojawiała się już wielokrotnie na łamach *Delty* (np. w numerze 7/2010), dlatego w tym artykule ograniczymy się jedynie do przypomnienia strategii wygrywającej w tej grze. Otóż jeśli przez  $a, b, c$  oznaczymy licznosci stosów w Nimie, to to, który z graczy wygra (o ile obaj grają optymalnie), zależy od wartości wyrażenia

$$a \oplus b \oplus c.$$

Dokładniej, pozycja w Nimie jest przegrana, gdy wartość powyższego wyrażenia jest równa zero – wówczas każdy ruch prowadzi do pozycji o dodatniej wartości wyrażenia, czyli do pozycji wygrywającej. Z kolei z każdej pozycji wygrywającej istnieje co najmniej jeden ruch do pozycji przegranej. Tak samo można zresztą opisać grę Nim na większej liczbie stosów.

Rozważmy pewną drobną modyfikację w zasadach Nima. Gracze nadal wykonują ruchy na przemian, zabierając dowolną niezerową liczbę kamieni z wybranego przez siebie stosu. Dodatkowo jednak, jeden raz w ciągu gry każdy z nich może wykonać ruch *specjalny*. Wykonując taki ruch, gracz może zabrać kamienie z dwóch stosów (można więc ruch specjalny rozumieć jako wykonanie dwóch ruchów „zwykłych” pod rząd). Przegrany, tak jak w zwykłym Nimie, gracz, który nie może wykonać ruchu. Nazwijmy tę zmodyfikowaną grę Nim 2.

Jak wygląda strategia dla gry Nim 2? Pierwszym kluczowym spostrzeżeniem jest to, iż nie opłaca się używać ruchu specjalnego, jeśli nie zakończy on gry. Spróbujmy to uzasadnić. Spójrzmy na sytuację gracza A, którego przeciwnik B wykonał jako pierwszy ruch specjalny. Jeżeli gra nie zakończyła się po ruchu gracza B, to możliwe są dwa przypadki. Gracz A mógł znaleźć się w pozycji wygrywającej w zwykłym Nimie – kontynuując wtedy rozgrywkę, nie wykorzystując ruchu specjalnego, a strategia dla zwykłego Nima zapewnia mu zwycięstwo. Jeżeli zaś po ruchu specjalnym przeciwnika gracz A znajdzie się w pozycji przegranej, wykorzystuje natychmiast swój ruch specjalny. Po wykonaniu pierwszego ze „zwykłych” ruchów na pewno znajdzie się w pozycji wygrywającej, a następnie, za pomocą drugiego ruchu, może pozostawić przeciwnika w pozycji przegranej. Dalej gracz A gra zgodnie ze strategią dla zwykłego Nima.

Oczywistym wnioskiem z powyższego spostrzeżenia jest fakt, iż ruchu specjalnego należy użyć dopiero wtedy, gdy w grze pozostaną tylko dwa stosy. Ruch taki prowadzi wtedy do natychmiastowego zwycięstwa. Tym samym gracz, który doprowadzi do opróżnienia któregoś ze stosów, przegra. Jedyną sytuacją, w której opróżnienie stosu jest nieuniknione, jest ta, w której wszystkie trzy stosy mają licznosc równą jeden. Stąd gracze powinni grać tak, jakby grali w zwykłego Nima na stosach o jeden kamień mniejszych! W ten sposób gracz, który nie może wykonać ruchu na „mniejszych” stosach, będzie zmuszony opróżnić jeden z (rzeczywistych) stosów i przegra.

Opiszmy to nieco bardziej formalnie. Grając w Nim 2, będziemy jednocześnie wyobrażać sobie rozgrywkę w Nim na stosach o jeden mniejszych (nazwiemy tę grę Nim<sub>-</sub>, patrz również rys. 1). Pokażemy, że jeśli mamy strategię wygrywającą w Nim<sub>-</sub>, to mamy też strategię wygrywającą w Nim 2. Aby wykonać ruch w Nim 2, patrzmy, jaki ruch zrobilibyśmy w Nim<sub>-</sub>, a następnie powtarzamy go w Nim 2. Z kolei gdy nasz przeciwnik rusza się w Nim 2, to jeśli wykonał ruch specjalny lub opróżnił jakiś stos – z dotychczas przeprowadzonego rozumowania wiemy, że przegrał. W przeciwnym przypadku powtarzamy jego ruch w grze Nim<sub>-</sub>.

Prędzej czy później doprowadzimy przeciwnika do sytuacji w Nim<sub>-</sub>, w której nie może wykonać ruchu, bo wszystkie stosy są puste. To odpowiada sytuacji w Nim 2, w której wszystkie stosy mają licznosc jeden, zatem nasz przeciwnik również tutaj przegrany.

Ostatecznie wynik w grze Nim 2 będzie zależał od wartości wyrażenia

$$(a - 1) \oplus (b - 1) \oplus (c - 1).$$



Symbol  $\oplus$  oznacza operację xor. Aby ją wyznaczyć, zapisujemy liczby binarnie, a następnie sumujemy metodą „szkolną”, ignorując przeniesienia.

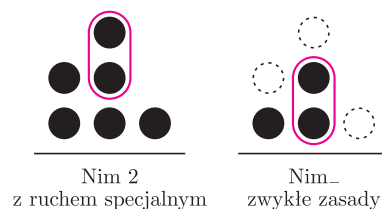


## Rozwiązanie zadania F 834.

Krew możemy potraktować jako „poruszającego się obserwatora”, do którego, ze względu na zjawisko Dopplera, dochodzi fala o częstotliwości  $f_k = f_0(v_u + v_k)/v_u$ ;  $f_0$  jest częstotliwością źródła, a  $f_k$  – częstotliwością fali padającej na czerwone ciałka krwi,  $v_u$  – prędkością fali ultradźwiękowej,  $v_k$  – prędkością krwi.

Ponadto krew traktujemy jako źródło fali poruszające się w kierunku źródła ultradźwięków, a znajdujący się obok źródła mikrofon jako „nieruchomego obserwatora”, do którego dociera fala o częstotliwości  $f_m = f_k v_u / (v_u - v_k)$ , gdzie  $f_m$  – częstotliwość fali padającej na mikrofon.

Częstotliwość dudnień jest równa bezwzględnej wartości różnicy częstotliwości  $f_d = |f_0 - f_m|$ . Zatem  $f_d = f_0 - f_0(v_u + v_k)/(v_u - v_k)$ , stąd  $v_k = f_d / (f_d - 2f_0)v_u$  i  $v_k = 15$  cm/s.



Rys. 1. Zabranie dwóch kamieni z drugiego stosu w grze Nim 2 i odpowiadający temu ruch w Nim<sub>-</sub>.

\*Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

\*\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Co ciekawe, powyższe rozumowanie nie daje się uogólnić na większą liczbę stosów. Tym samym zachęcamy Czytelników do samodzielnych prób rozwiązania uogólnionej wersji gry Nim 2!

Przyjrzyjmy się teraz kolejnemu wariantowi gry Nim, który nazwiemy Nim 3. Tym razem modyfikacja jest taka, że po żadnym ruchu nie mogą powstać dwa stosy o równej liczbie kamieni (zakładamy, że na początku także wszystkie stosy były różne). Gra kończy się standardowo, gdy gracz nie może już wykonać żadnego ruchu, a zwycięża ten, który wykonał ostatni ruch. Przy czym w tej wersji sytuacją końcową jest moment, w którym stosy mają licznosc 0, 1 oraz 2.

Zastanówmy się, czy Nim 3 rzeczywiście różni się od Nima z punktu widzenia gracza, który w Nimie ma strategię wygrywającą. Przypomnijmy, że owa strategia wygrywająca w Nimie polega na zabraniu z pewnego stosu odpowiedniej liczby kamieni tak, aby xor licznosci stosów z niezerowego stał się zerowy. Gdybyśmy próbowali zastosować podobną strategię tutaj, to natknęlibyśmy się na przeszkodę. Istnieją konfiguracje, w których wszystkie takie ruchy prowadzą do wyrównania licznosci pewnych stosów. Są to dość charakterystyczne sytuacje, bo jeżeli  $a \oplus b \oplus c = 0$  oraz, bez straty ogólnosci,  $a = b$ , to  $c = 0$ , czyli jeden ze stosów musi być pusty.

Skoro już zauważyliśmy, gdzie leży trudność w zastosowaniu standardowej taktyki, to może udałoby nam się wymyślić inną grę, w której strategia wygrywająca stałaby się bardziej jasna, a odpowiednim ruchom w niej odpowiadałyby pewne ruchy w Nim 3? Problemem, na który natknęliśmy się, stosując do gry Nim 3 strategię z Nima, było to, że gdy jeden stos stał się pusty, to ruchy, które chcielibyśmy wykonać, nagle stały się ruchami zakazanymi. Pomyślmy zatem, zamiast o Nim 3, o analogicznej grze, w której ruchem zakazanym jest także opróżnianie stosów. Zauważmy, że po dołożeniu takiego wygodnego założenia już z powodzeniem możemy zastosować standardową strategię wygrywającą dla gry Nim, gdyż ruch zerujący xora licznosci wszystkich stosów nigdy nie będzie prowadził do wyrównania licznosci pewnych stosów, bo jak już wcześniej zauważyliśmy, implikowałoby to, że pewien ze stosów jest pusty, a założyliśmy, że tak być nie może.

To, co nam pozostało, to sztucznie zasymulować założenie o tym, że ruch opróżniający stos jest ruchem zakazanym. Sytuacją końcową w takiej grze będzie układ, w którym stosy będą miały licznosci 1, 2, 3. Nasuwa się zatem pomysł, aby do każdego stosu w Nim 3 dodać po jednym wirtualnym kamieniu, którego żaden z graczy nie może zabrać. Zauważmy, że wtedy zarówno nie będzie możliwe opróżnienie stosu, bo gracz nie może zabrać wirtualnego kamienia, jak i sytuacje końcowe będą się zgadzały, bo w grze Nim 3 bez tego założenia sytuacja końcowa miała postać 0, 1, 2. Zatem już prawie osiągnęliśmy cel – mianowicie sprowadziliśmy Nima 3 do gry, w której będziemy mogli już stosować standardową taktykę znaną z Nima. Pozostaje nam jedynie formalnie udowodnić, że powyższe sprowadzenie jest rzeczywiście poprawne.

Stosujemy rozumowanie podobne jak poprzednio i, grając w Nim 3, wyobrażamy sobie rozgrywkę w grę Nim<sub>+</sub>, czyli w zwykłego Nima ze stosami zwiększonymi o jeden kamień (rys. 2). Zakładamy, że mamy strategię wygrywającą w Nim<sub>+</sub>, i chcemy wykazać, że mamy także strategię wygrywającą w Nim 3. Tym razem każdy ruch przeciwnika w Nim 3 możemy powtórzyć w grze Nim<sub>+</sub>. Z kolei, aby wykonać nasz ruch w Nim 3, patrzmy na nasz ruch w Nim<sub>+</sub>. Ruch ten prowadzi nas do sytuacji, w której xor licznosci stosów jest zerowy. Gdyby to była sytuacja, w której opróżniliśmy jeden ze stosów, to dwa pozostałe musiałyby być równe, co nie jest możliwe, gdyż w takiej sytuacji byłyby też równe na początku (co jest niezgodne z zasadami Nim 3). Zatem nasz ruch w Nim<sub>+</sub> na pewno nie opróżni żadnego stosu, czyli jest on poprawnym ruchem w Nim 3 i możemy go tam powtórzyć.

Zauważmy, że przez całą grę w Nim<sub>+</sub> na planszy będą stosy różnej licznosci, więc w końcu doprowadzimy przeciwnika do sytuacji 1, 2, 3, co odpowiada jego przegranej w grze Nim 3 z sytuacją 0, 1, 2.

Stąd wniosek, że gracz ma w grze Nim 3 strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy ma on strategię wygrywającą w analogicznej konfiguracji Nima z dołożonymi wirtualnymi kamieniami – po jednym do każdego stosu, czyli wynik gry zależy od wartości wyrażenia

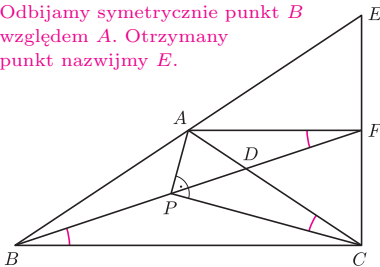
$$(a + 1) \oplus (b + 1) \oplus (c + 1).$$

Kwestię uogólnienia gry Nim 3 na wiele stosów zostawiamy do rozważenia Czytelnikom.

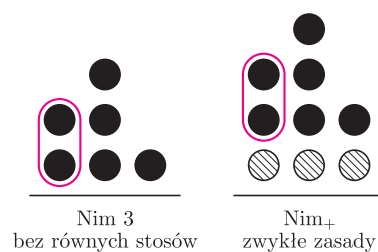
Pewien szczególny przypadek gry Nim 3 został rozpatrzony w tekście „O Olimpijskim Kółku Matematycznym” w *Delcie* 10/2011 – w tamtym artykule wysokości stosów były trzema kolejnymi liczbami naturalnymi.



**Rozwiązanie zadania M 1387.**  
Odbijamy symetrycznie punkt  $B$  względem  $A$ . Otrzymany punkt nazwijmy  $E$ .



Odcinek  $CA$  jest środkową trójkąta  $BCE$ , a ponieważ  $CD : CA = 2/3$ , więc  $D$  jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Niech  $F$  oznacza środek boku  $CE$ . Leży on na przedłużeniu odcinka  $BD$ . Ponieważ  $EA = AB = AC$ , więc kąt  $BCE$  jest prosty, a zatem również kąt  $AFC$  jest prosty. Stąd punkty  $A, P, C, F$  leżą na okręgu o średnicy  $AC$ . Wobec tego  $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PFA$ . Ale  $AF \parallel BC$ , więc  $\sphericalangle PFA = \sphericalangle DBC = \sphericalangle PBC$ .



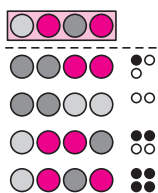
Rys. 2. Odpowiadające sobie ruchy w grach Nim 3 i Nim<sub>+</sub>.

# Rozważmy Masterminda

Dominika PAWLIK\*, Aleksander ZABŁOCKI\*

Kiedy wymyślono Masterminda? Oficjalnie w roku 1970, jednak już wcześniej znano grę w wersji z czterema cyframi zamiast kolorowych szpilek. Roku powstania tej wersji nie znamy; w każdym razie „1970” ma przynajmniej jedną cyfrę trafioną na właściwej pozycji.

Ściśle mówiąc, cztery pytania wystarczą do poznania kodu – ale wg zasad trzeba jeszcze uzyskać odpowiedź „zgadza się”, co wymaga dodatkowego pytania. My będziemy je konsekwentnie pomijać.



Rys. 1. Przykładowa rozgrywka Masterminda. Ramka na górze zawiera ukryty kod; poniżej znajdują się kolejne pytania (zgadnięcia) oraz uzyskiwane odpowiedzi: czarna szpilka oznacza trafienie celne, biała – niecelne. Gracz odgadujący wygrywa, gdy otrzyma odpowiedź  $\bullet\bullet$  w określonej liczbie ruchów. (My przyjmujemy, że wystarczy mu *pewność*, że otrzyma ją za chwilę.)

Tyle waży jednoczłotówka i jedno euro.

Oryginalne prace o ważeniu monet:

V. Grebinski, G. Kucherov, *Optimal reconstruction of graphs under the additive model*, *Algorithmica* 28 (1997).

N. Bshouty, *Optimal algorithms for the coin weighing problem with a spring scale*, *Proc. Annual Conf. on Learning Theory*, 2009.

W tym artykule sformułowanie „ $A$  wynosi około  $B$ ” lub „ $A \sim B$ ” oznacza, że iloraz  $\frac{A}{B}$  jest dowolnie bliski jedynce, jeśli tylko  $n$  jest odpowiednio duże.

\*doktoranci, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Gra Mastermind jest rozrywką głównie dla gracza odgadującego. Przypomnijmy: musi on ustalić, jaki *kod* (ciąg czterech kolorowych szpilek) ułożył przeciwnik, posilkując się odpowiedziami otrzymywanymi na zadawane pytania. Pytania muszą mieć postać „Jak bardzo kod przypomina ciąg  $X$ ?”, zaś odpowiedzią są dwie liczby: trafień właściwych kolorów na właściwych pozycjach oraz trafień kolorów na pozycjach niewłaściwych (odpowiednio: *trafienia celne* i *niecelne*; te pierwsze będziemy też nazywać po prostu *trafieniami*). Oczywiście chodzi o to, by odgadnąć kod jak najszybciej.

W Masterminda można grać, gimnastykując pomysłowość na bieżąco – ale matematyk chciałby też poszukać ogólnej metody. Jaka jest najmniejsza liczba pytań, która zawsze wystarczy do zwycięstwa? To niełatwy problem, ale możemy wspomóc się komputerem: właśnie w ten sposób Donald Knuth uzyskał w 1977 roku wynik czterech pytań. Komputery nie radzą sobie jednak z uogólnioną wersją gry, gdy kod zawiera  $n$  szpilek (zamiast 4), a do dyspozycji jest  $k$  kolorów (zamiast 6). Nie zdziwi nas to, gdy pomyślimy, jakich rachunków wymaga uzasadnienie, że do zwycięstwa potrzeba przynajmniej  $t$  ruchów. Teoretycznie należy przejrzeć drzewo *stanów gry* (możliwych ciągów pytań i odpowiedzi) do głębokości  $t - 1$  ruchów włącznie. Dla gry standardowej oraz  $t = 4$ , jako że możliwych pytań w grze jest  $6^4 = 1296$ , zaś odpowiedzi 14, samych stanów na głębokości 3 mamy  $(1296 \cdot 14)^3 \approx 5,9$  biliona! Na szczęście możemy zauważyć, że stany różniące się jedynie przemianowaniem kolorów i/lub pozycji są właściwie równoważne – jeśli przejrzelśmy możliwości wygrania w jednym z nich, nie trzeba już zajmować się tym drugim. Zmniejsza to liczbę *istotnych* stanów do około 415 milionów (tj. ponad 10000-krotnie!), co – w połączeniu z pewnymi dodatkowymi usprawnieniami – czyni zadanie dostępnym dla domowego komputera. Zauważmy jednak, że w ogólności nasz problem wciąż zachowuje się wykładniczo względem  $n, k, t$ : powiększając te parametry choćby o 1, możemy zwiększyć trudność setki razy. Nic więc dziwnego, że nawet dla  $k = 2$  udało się dotychczas (z wykorzystaniem dużo bardziej złożonych technik) znaleźć optymalne strategie jedynie dla  $n \leq 8$ .

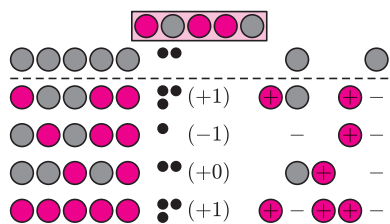
Skoro nie umiemy znaleźć najlepszej strategii dla gry z  $n$  szpilekami w  $k$  kolorach, poszukajmy (bez komputera) możliwie dobrej. Na początek założymy, że  $k = 2$ : szpilki są jedynie ciemnoszare i kolorowe. Łatwo wówczas wygrać, zadając  $n + 1$  pytań: w pierwszym wszystkie szpilki są ciemnoszare, w następnych jedna kolorowa szpilka „wędruje” po kolejnych pozycjach. (Właściwie ostatnie z tych pytań jest zbędne, zatem można wygrać w  $n$  ruchach.) A czy da się lepiej?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, zaczniemy od nieco innego zadania. Danych jest  $n$  monet, z których każda waży 5 albo 7,5 grama, oraz zwykła waga, podająca łączną masę umieszczonych na niej przedmiotów. Należy odróżnić monety cięższe od lżejszych, wykonując jak najmniej ważeń. Oczywiście, można zważyć każdą monetę osobno, jednak istnieją lepsze rozwiązania. Na przykład, dla pięciu monet o wagach  $A, B, C, D, E$  wystarczą cztery ważenia:

$$(*) \quad A + D + E, \quad B + D + E, \quad C + E, \quad A + B + C + D + E.$$

Istotnie: dodając pierwsze trzy wyniki i odejmując ostatni, otrzymujemy  $D + 2E$ ; łatwo sprawdzić, że wyznacza to naraz  $D$  oraz  $E$ . Wtedy już łatwo znaleźć  $A, B, C$ .

Czy powyższy przykład pomaga zważyć  $n$  monet dla  $n > 5$ ? Oczywiście tak: grupujemy monety w piątki i ważymy każdą piątkę w czterech ważeniach, co daje około 20-procentową oszczędność wobec „naiwnych”  $n$  ważeń. Okazuje się jednak, że im bardziej rośnie  $n$ , tym jest lepiej: w ogólności wystarczy wykonać około  $\frac{2n}{\log n}$  ważeń, co daje np. pięciokrotną oszczędność dla  $n \approx 1000$ . Ba, jeśli rozpoczniemy od zważenia razem wszystkich monet, a następnie zaplanujemy ponad  $\frac{2n}{\log n}$  *losowych* ważeń, to z dużym prawdopodobieństwem taki schemat ważeń pozwoli na odgadnięcie wag monet w dowolnym ich układzie.

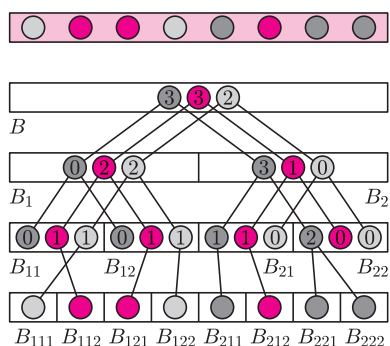


Rys. 2. Przykładowa gra dwukolorowa. Lewa kolumna zawiera pytania, zbudowane na podstawie strategii ważenia monet (\*), środkowa – liczby (celnych) trafień oraz różnice trafności w stosunku do pierwszego pytania. Prawa kolumna pokazuje, gdzie konkretnie wystąpiły trafienia (oczywiście odgadujący początkowo nie ma tej wiedzy). Znaki + i – przedstawiają różnice w trafieniach w stosunku do pierwszego pytania. Pojawiają się one dokładnie tam, gdzie w pytaniu była kolorowa szpilka. W ten sposób kolejne odpowiedzi mówią nam o sumach wag szpilek na wybranych pozycjach w kodzie. (Wybór pozycji następuje poprzez umieszczenie na niej w pytaniu kolorowej szpilki.)

Oryginalna praca o grze wielokolorowej:

B. Doerr i in., *Playing Mastermind with many colors*, Proc. Sympos. on Discrete Algorithms, 2013.

Od obu tych założeń można się łatwo uwolnić kosztem dodatkowych pytań: jeśli  $n$  nie jest potęgą dwójki, liczba pytań może się podwoić, zaś jeśli  $k$  jest bardzo duże – powiększyć o około  $\frac{k}{n}$ . Tego drugiego nie da się zresztą uniknąć.



Rys. 3. Podział kodu na bloki oraz monety związane z tymi blokami; jest to zarazem schemat działania algorytmu. Odcinki łączą monety z ich pod-monetami; waga monety jest sumą wag jej pod-monet. Na ostatnim poziomie zaznaczono jedynie monety o wadze 1 (pozostałe mają wagę 0); wyznaczają one rozwiązanie zagadki.

Wykorzystując fakt, że waga monety jest sumą wag jej pod-monet (rys. 3), można uzyskać dodatkowo około dwukrotną oszczędność (rysunek 4 zawiera przykład tego usprawnienia).

A jak ma się to do Masterminda? Za chwilę pokażemy strategię dla gry dwukolorowej, wykorzystującą ważenie monet. Najpierw zauważmy, że podane powyżej wartości 7,5 oraz 5 gramów nie są istotne dla rozwiązania zadania – równie dobrze monety ciężkie mogłyby ważyć 1 g, a lekkie (niech fizycy wybaczą) 0 g lub wręcz minus jeden gram. Umówmy się więc, że szpilka kolorowa waży gram, zaś ciemnoszara minus gram. Na początek zadajmy pytanie złożone z ciemnoszarych szpilek i oznaczmy liczbę trafień przez  $s$ . Jeżeli teraz zmienimy gdziekolwiek w pytaniu szpilkę na kolorową, spowodujemy zwiększenie liczby trafień o 1, jeśli odpowiednia szpilka w kodzie jest kolorowa, i jej zmniejszenie, jeśli jest ciemnoszara – zatem zmiana równa się wadze rozważanej szpilki w kodzie. W ogólności, możemy w ten sposób zważyć szpilki, wykorzystując w roli wagi zasady Masterminda! Na przykład, aby poznać sumę wag pierwszej i trzeciej monety, zadajemy pytanie  $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$  (z kolorowymi szpilekami na odpowiednich pozycjach) i odejmujemy  $s$  od liczby trafień (patrz też rys. 2).

Skoro umiemy odgadnąć kod po około  $\frac{2n}{\log n}$  pytaniach, może da się jeszcze lepiej? Policzmy: możliwych kodów jest  $2^n$ , zaś możliwych odpowiedzi na jedno pytanie jest  $n + 1$ . Po  $t$  ruchach dysponujemy ciągiem  $t$  takich odpowiedzi; jeśli ma on pozwalać na jednoznaczne odtworzenie kodu, musi zachodzić  $(n + 1)^t \geq 2^n$ . Nierówność ta staje się prawdziwa dla  $t$  równych mniej więcej  $\frac{n}{\log n}$ , co pokazuje, że opisaną powyżej strategię można poprawić w najlepszym razie około dwukrotnie. Można więc powiedzieć, że uzyskaliśmy „większość” osiągalnego usprawnienia w porównaniu z rozwiązaniem naiwnym wymagającym  $n + 1$  pytań. Co ciekawe, nasze rozwiązanie wykorzystuje jedynie informacje o trafieniach; trafienia niecelne nie są potrzebne.

Zrozumiawszy z grubsza przypadek  $k = 2$ , przechodzimy do Masterminda z większą liczbą kolorów. Ponownie odwołamy się do zagadnienia ważenia monet, jednak w trudniejszej wersji: tym razem o  $n$  monetach wiadomo tylko tyle, że ich wagi (w gramach) są całkowite nieujemne oraz że suma wag wszystkich monet nie przekracza pewnej wartości  $M$ . Wówczas okazuje się, że wystarczy  $\frac{8n}{\log n}$  ważeń, jeśli  $M \leq n$ , oraz  $\frac{4(n+M)}{\log n}$  ważeń w przeciwnym razie. (Podobnie jak poprzednio, dobrych schematów ważeń jest wówczas bardzo wiele.)

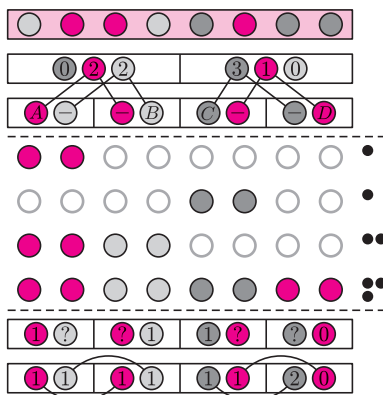
Dla wygody założymy, że liczba szpilek  $n$  jest potęgą dwójki, a liczba dostępnych kolorów wynosi również  $n$ . W takiej sytuacji opisana przez nas metoda będzie wymagać około  $8n \log \log n$  pytań. We wstępnym opisie założymy dodatkowo, że istnieje kolor w ogóle niewystępujący w kodzie i jest on nam znany; nazwiemy go *zerowym* i oznaczmy przez  $\circ$ . Później pokażemy, jak radzić sobie bez niego.

W przypadku dwukolorowym rolę monet pełniły pojedyncze szpilki o wagach  $\pm 1$ . Teraz będzie inaczej. Po pierwsze, pojedyncza rozgrywka Masterminda będzie odwoływać się do problemu monet wielokrotnie, za każdym razem dla innego układu monet (każde takie wydarzenie nazwiemy *grą w monety*). Po drugie, rolę monety będzie zawsze pełnił *zbiór* szpilek danego koloru, znajdujących się w kodzie w obrębie danego bloku pozycji; wagą takiej monety będzie liczba wspomnianych szpilek. Na przykład, dla kodu  $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$  moneta kolorowa dla bloku 1–4 ma wagę 2, zaś jasnoszara dla bloku 5–8 wagę 1. W pierwszym kroku algorytmu ustalimy wagi wszystkich monet dla bloku  $B$  zawierającego wszystkie pozycje. W drugim kroku ustalimy wagi wszystkich monet dla obu połów tego bloku, które oznaczmy przez  $B_1$  i  $B_2$ . Następnie zważymy monety odpowiadające ćwiartkom  $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ , i tak dalej, co da nam rozwiązanie (patrz rys. 3).

Ustalenie wag monet dla bloku  $B$  jest proste: np. waga ciemnoszarej jest równa trafności pytania  $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ . Podobnie dla mniejszych bloków: np. wagą monety ciemnoszarej dla bloku  $B_{21}$  jest trafność pytania  $\circ\circ\circ\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ . Co więcej, sumą tejże wagi oraz wagi monety kolorowej dla bloku  $B_{11}$  jest trafność pytania  $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ . Stąd już widać, że każdy zestaw monet związanych z *rozłącznymi* (nieprzecinającymi się) blokami można wydajnie zważyć za pomocą gry w monety (rys. 4).

Trzeba jeszcze wyjaśnić, które monety dobieramy do kolejnych gier. W pierwszym kroku (tj. dla bloku  $B$ ) zważymy monety pojedynczo. W następnych krokach łączymy monety w grupy, tak by każda grupa zawierała po (maksymalnie) jednej monecie dla każdego z bloków odpowiedniego poziomu; każda grupa bierze udział w osobnej





Rys. 4. Przebieg jednej gry w monety podczas trzeciego kroku algorytmu. Wagi monet dla bloków  $B_1, B_2$  są już znane; chcemy ustalić wagi ich pod-monet, których jest 8. Wybieramy 4 z nich (po jednej w każdym bloku) i znajdujemy ich wagi  $A, B, C, D$ , zadając pytania odpowiadające ważeniom

$$A, C, A + B, A + B + C + D.$$

Wagi pozostałych 4 monet można by ustalić analogicznie, ale w tym przypadku można je od razu wyliczyć na podstawie już posiadanych informacji.

Dla  $i = 1$  wzór  $\frac{n}{i-1}$  nie ma sensu, ale skądinąd wiemy, że w oczywisty sposób pierwszy krok zajmuje  $n$  pytań.

grze w monety. Kluczowy dla efektywności jest fakt, że jeśli pewna moneta ma wagę 0 (co dla wielu kolorów musi się zdarzać bardzo często), to można wyłączyć z ważeń obie jej pod-monety, ponieważ odpowiedni kolor w ogóle nie występuje w danym bloku (rys. 4).

Czas wytłumaczyć, jak poradzić sobie bez koloru zerowego. Trik polega na tym, żeby stworzyć sobie taki kolor, a konkretniej – rozpocząć algorytm od dodatkowych pytań, które pozwolą dla każdej z osobna pozycji ustalić pewien kolor, który na pewno tam nie występuje. Będzie to kolor zerowy dla tej pozycji (rys. 5). Zauważmy, że takie posunięcie jest bezpieczne dzięki temu, że cały czas interesują nas wyłącznie trafienia celne.

Jak więc znaleźć wydajnie zestaw kolorów zerowych? Okazuje się to proste, a zarazem podobne do gry w Masterminda dwukolorowego. Zadajmy najpierw pytanie  $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ , a następnie  $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ . Jeśli trafność wzrosła, druga szpilka jest kolorowa; jeśli spadła, jest ciemnoszara; jeśli nie zmieniła się, nie może być kolorowa ani ciemnoszara. Zatem aby odrzucić po jednym kolorze na każdej pozycji, wystarczy „przespacerować się” kolorową szpilką po pozycjach; łącznie zadajemy  $n + 1$  pytań. Wygląda to podobnie do naiwnej strategii dla gry dwukolorowej, i nie bez konsekwencji: pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie wykazanie, że za pomocą ważenia monet można kolory zerowe wyznaczyć znacznie szybciej.

Zakończyliśmy nareszcie opis strategii dla Masterminda o  $n$  szpilkach i  $n$  kolorach. Ilu pytań wymaga ta strategia? Najprościej znaleźć odpowiedź w sytuacji, gdy wszystkie szpilki w kodzie mają różny kolor: wówczas wszystkie monety ważą 0 lub 1, zatem z blokiem  $i$ -tego poziomu związanych jest dokładnie  $\frac{n}{2^{i-1}}$  monet o niezerowej wadze. Wówczas  $i$ -ty krok algorytmu składa się z  $\frac{n}{2^{i-1}}$  gier w monety, z których w każdej uczestniczy  $2^{i-1}$  monet. Z rozwiązania problemu monet wynika, że jedna taka gra wymaga około

$$\frac{2 \cdot 2^{i-1}}{\log(2^{i-1})} = \frac{2^i}{i-1}$$

ważeń, zatem cały krok zajmuje około  $\frac{2n}{i-1}$  pytań Masterminda. Czyli w sumie:

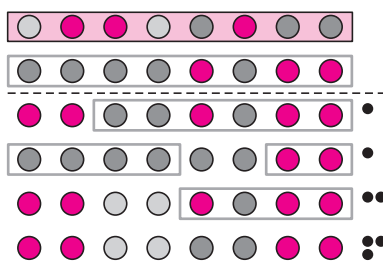
$$n \cdot \left( 1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2}{\log n - 1} \right) \sim 2n \cdot \log \log n.$$

Jeśli teraz dopuścimy powtarzające się kolory w kodzie, to podobne (choć nieco trudniejsze) rozumowanie – oczywiście z wykorzystaniem rozwiązania ogólniejszego problemu monet – pokazuje, że nasza metoda wymaga nie więcej niż około  $16n \log \log n$  pytań.

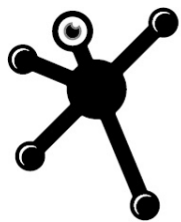
Jak do tej pory, nie wykorzystaliśmy jeszcze nigdzie wiedzy o liczbie trafień niecelnych, która jest przecież dostępna. Czyżby była ona całkiem niepotrzebna? To zależy od liczby kolorów w grze. Jeśli  $k > n$ , wygodnie rozpocząć grę od ustalenia, jakie kolory w ogóle występują w kodzie (co umożliwi zastosowanie opisanej powyżej metody); trafienia niecelne są tu istotną pomocą. Dla odmiany, w przypadku  $k = 2$  za ich pomocą można zaoszczędzić co najwyżej jeden ruch.

Problem uogólnionego Masterminda oczywiście nie jest kluczowy dla współczesnej nauki; dlaczego w takim razie miałyby nas interesować? Zanim odpowiemy, zastanówmy się, dlaczego naukowcy w ogóle zajmują się grami. Pierwszym argumentem jest na pewno atrakcyjna treść, jednak ich zaletą jest też kondensacja różnych problemów obliczeniowych oraz teoretycznych. Jeśli nauczymy się efektywnie grać w szachy bądź w go, albo znajdziemy dowód optymalności strategii dla Masterminda, być może uda się wykorzystać wypracowane metody w bardziej życiowych zagadnieniach. Tymczasem dla uogólnionego Masterminda wciąż nie znamy ani strategii lepszej od opisanej powyżej, ani dowodu, że nie wystarczy wykonać  $C \cdot n$  ruchów (dla stałej  $C$  niezależnej od  $n$ ). Kto wie, może rozstrzygnięcie tej niejasności okaże się – pośrednio – szerzej przydatne.

Mastermind ma też inne ciekawe uogólnienia. Jak grać, jeśli przeciwnik może dwukrotnie skłamać? Można ważyć monety w sposób odporny na dwa kłamstwa – co z kolei wiąże się z teorią kodów korekcyjnych, które „naprawiają” drobne błędy, np. w przesyłanych danych. A to przydaje się wszędzie: w Internecie, sieciach komórkowych, nośnikach danych. . .



Rys. 5. Przykładowy zestaw kolorów zerowych dla kodu (nad linią) oraz praktyczna realizacja czterech pytań z rysunku 4 z wykorzystaniem tego zestawu (pod linią). Zauważmy, że trafność pytań pozostała niezmienną. Szare ramki obejmują szpilki będące teoretycznie koloru zerowego.



## 17. PIKNIK NAUKOWY

POLSKIEGO RADIA  
I CENTRUM NAUKI KOPERNIK

15 czerwca 2013 do 11.00 do 23.00  
zapraszamy na Stadion Narodowy

wstęp, oczywiście, wolny.

Tym razem tematem przewodnim będzie szeroko rozumiane **Życie**.

Na pikniku zaprezentuje się 200 instytucji z 22 krajów. Na pierścieniu o obwodzie 900 m, który znajduje się w zewnętrznej bryle Stadionu Narodowego, i w alejach prowadzących do obiektu zostanie rozlokowanych 190 namiotów, pod którymi odbędzie się prawie 1000 pokazów z niemal każdej dziedziny wiedzy: nauk ścisłych, przyrodniczych czy humanistycznych. Zgodnie z tradycją, najbardziej spektakularne widowiska przez cały dzień odbywać się będą na głównej scenie Pikniku.

Wielbiciele nauki, którzy nie będą mogli przybyć na Stadion, będą mogli słuchać relacji i audycji we wszystkich Programach Polskiego Radia oraz na portalu [polskieradio.pl](http://polskieradio.pl).



## Co dziś obchodzi genetyków?

Odkąd sekwencjonowanie DNA stało się rutynowym zajęciem tysięcy robotów na całym świecie, biolodzy-ludzie uzyskali niezwykle sprawne narzędzie badawcze życia teraz i trochę (do 30 tys. lat temu) przedtem. Ciekawi ich przyczyna różnicowania ludzkiego wyglądu w różnych częściach globu (kiedyś nazywanego ludzką rasą), przemieszczanie się po całej Ziemi bakterii *Helicobacter pylori* z przewodu pokarmowego człowieka, mapa ludzkiego metabolizmu (czy różna u różnych ludzi?), ewolucja ssaków łożyskowych „u stóp dinozaurów”, różnorodność mikroorganizmów na skórze i wewnątrz nas, odpowiedzi na pytania: czy krzyżowaliśmy się z Neandertalczykami? którą i w jakiej kolejności ludzie skolonizowali planetę? skąd przybyli Romowie? jaka jest dieta gąsienic owadów żerujących na roślinach? Rozpatrywane są problemy bardzo ważne, najistotniejsze dla ludzi, o których nawet pytający wie, że trudno oczekiwać pełnego wyjaśnienia. Jak 25 tys. ludzkich genów sterować może kilkuset bilionami synaps w korze mózgowej? Czy geny mają cokolwiek wspólnego ze świadomością? Jakie są przyczyny chorób i anomalii układu nerwowego ludzi?

Sam powyższy spis pobudza wyobraźnię. Różne na pozór pytania mają pewne cechy wspólne. Udzielenie odpowiedzi jest kosztowne i bardzo pracochłonne. Wyniki uzyskuje się po kilkunastu latach, stopniowo są uściślane i precyzowane przez wielkie, różnie wyspecjalizowane międzynarodowe zespoły z wielu laboratoriów. To wyzwania dla badaczy, z natury indywidualistów i liczących na indywidualny sukces. Ta Jedyna Nagroda przyznawana jest najwyższemu trzem osobom, a jak je wyodrębnić z listy 150 wykonawców?

A kolejna ważna wspólna cecha: większość tych potężnych projektów przybliży zrozumienie biologicznej natury człowieka, sformułowanie przewidywań o jego, jako gatunku, przyszłości. Cena? To zależy, czy spojrzeć na te przymiarki okiem Ministra Wojny czy Ministra Nauki. Unia Europejska przeznaczyła na badania mózgu przez 10 lat 1,2 mld euro. Prezydent Obama zaproponował na ten sam cel, na razie na rok, 100 mln dolarów. Panie Prezydencie! Nie ma ważnych projektów naukowych, które można zacząć i skończyć przez rok, co dopiero o mózgu!

Powyższe przykłady to zaledwie znikoma część badań referowanych w piśmiennictwie naukowym ostatniego półroczka. Dają wyobrażenie o różnorodności i bogactwie tematyki, którą można podejmować dzięki istnieniu techniki sekwencjonowania DNA. Oczywiście, jeszcze do tego dochodzą szybko wzbogacane ogromne bazy danych, banki danych, dostępne w dużej mierze bez opłat, bo biolog musi obecnie pracować ręką w rękę z informatykiem.

Posłużę się tylko jednym przykładem. Grupa 23 laboratoriów utworzyła 6 lat temu Projekt ATOL. Po raz pierwszy w Projekcie uczestniczą morfologowie z Muzeów Historii Naturalnej i genetycy. Ich cel: prześledzić ewolucję ssaków łożyskowych, do których należy także człowiek (współcześnie żyje ich 5100 gatunków). Morfolodzy zajęli się opisem cech żyjących i wymarłych zwierząt, wyznaczyli ich 4500. To może być kolor futra, liczba prążkowań, długość kości, typ zębów itd. Genetycy pobrali i sekwencjonowali DNA osiemdziesięciu trzech gatunków żyjących obecnie ssaków. Analiza takiego zestawu danych stała się kopalnią wiedzy o ewolucji ssaków. Wewnątrz powstałego szczegółowego drzewa genealogicznego łatwiej teraz umieścić dotychczas nieidentyfikowane fragmenty wykopalisk zwierzęcych.

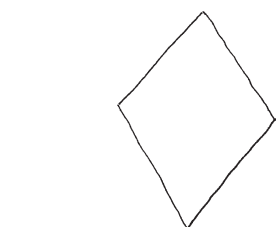
Obecnie żyjące ssaki pełzają, latają, pływają, mają różną dietę i różne strefy życia, ale wszystkie miały wspólnego przodka. Ustalono, że wspólnego przodka mieliśmy jeszcze we wczesnej kredzie, 65 mln lat temu, już po masowym wymieraniu dinozaurów.

I tak, zaproszony do współpracy artysta wyobraził sobie tego przodka, Twojego i mojego, Twojego psa i mojego kota też. Był małym owadożernym zwierzakiem.

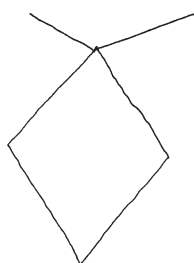
Magdalena FIKUS

## Lekcja rysunku (6): dwunastościan rombowy

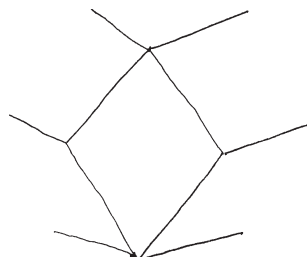
Dwunastościan rombowy jest figurą o zadziwiających własnościach. Narysowanie go nie powinno sprawiać większych trudności. Jak nazwa wskazuje, ścianami tego dwunastościanu są romby, zatem rysunek zaczynamy od narysowania właśnie rombu (rys. 1). Rysunek jest odręczny, więc romb nie musi być idealny, tym bardziej że gdy patrzymy na obiekt, pewne odcinki mogą się skrócić lub wydłużyć. Ważne, żeby boki były parami równoległe. Narysujemy więc romb postawiony „na sztorc”, a następnie będziemy dorysowywać kolejne ściany, pamiętając o równoległości odpowiednich krawędzi. Możemy, na przykład, narysować dwa odcinki w górnym wierzchołku naszego rombu (rys. 2). Powinny one tworzyć kąt rozwarty i być krótsze od boków początkowego rombu.



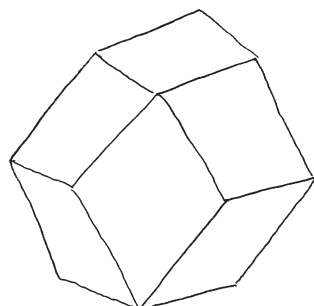
Rys. 1



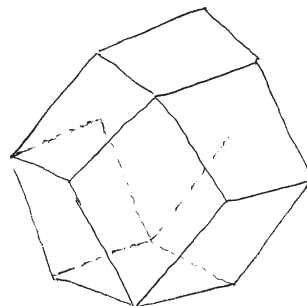
Rys. 2



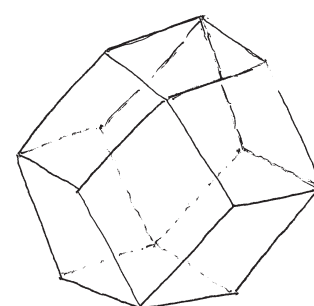
Rys. 3



Rys. 4



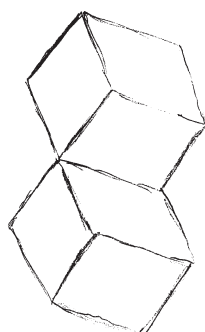
Rys. 5



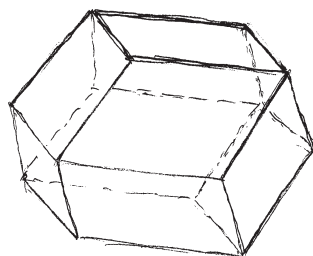
Rys. 6

Dwunastościan rombowy ma wiele ciekawych własności. Jedną z nich jest fakt, iż jednakowe dwunastościany rombowe, jak sześciiany, szczelnie wypełniają przestrzeń. Jeśli postawimy jeden dwunastościan rombowy na drugim, to patrząc na ten układ pod odpowiednim kątem,

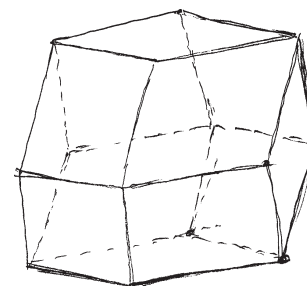
będziemy mieli wrażenie, że te dwie figury, stojąc jedna na drugiej, stykają się tylko krawędziami (rys. 7). Można też rysować dwunastościan rombowy w innym położeniu. Trzeba wtedy zacząć rysunek od odpowiednio położonego rombu i dalej rysować jak wcześniej (rys. 8 i 9).



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

*Pisał i rysował Zdzisław POGODA*



# Olimpiada 2012/2013

## LXII Olimpiada Fizyczna

W dniach 5–9 kwietnia br. odbył się w Warszawie finał LXII Olimpiady Fizycznej. Do tegorocznych zawodów trzeciego stopnia zakwalifikowało się 56 zawodniczek i zawodników. W sobotę 6 kwietnia uczestnicy w dwóch turach rozwiązywali zadanie doświadczalne, którego celem było wyznaczenie współczynnika odbicia światła od powierzchni rozdziału aluminium-powietrze. Przeprowadzenie eksperymentu wymagało zestawienia układu, w którym wiązka ze wskaźnika laserowego wielokrotnie odbijała się od układu dwóch aluminiowych lusterek. Zadanie okazało się tylko umiarkowanie trudne i większość uczestników finału Olimpiady uzyskała za nie przynajmniej 20 punktów. Doświadczalna część tegorocznych zawodów była za to popisem pomysłowości uczniów, którzy wykonali zadanie na wiele różnych sposobów i – co ciekawe – rozwiązanie przygotowane przez Komitet Główny Olimpiady Fizycznej nie było najbardziej popularne. Jedno z bardziej oryginalnych rozwiązań (autorstwa **Pawła Zaleckiego** z Krakowa) zostało wyróżnione przez KGOF.

W niedzielę 7 kwietnia zawodnicy rozwiązywali zadania teoretyczne, które okazały się zdecydowanie większym wyzwaniem niż zadanie doświadczalne z poprzedniego dnia. Pierwszy problem teoretyczny, którego tematem był ruch układu dwóch walców i klocka, rozwiązało bezbłędnie tylko dwóch uczestników finału Olimpiady.

Jeszcze trudniejsze okazało się zadanie drugie, wymagające analizy naprężenia powłoki balonu wznoszącego się w atmosferze. Żadnemu z zawodników nie udało się uzyskać kompletu punktów za to zadanie. Natomiast zadanie trzecie, w którym należało opisać ruch metalowego walca w niejednorodnym polu magnetycznym, wyraźnie zróznicowało zawodników. Dziewięciu z nich rozwiązało je bezbłędnie lub z tylko niewielkimi usterkami, podczas gdy prawie dwie trzecie uczestników finału Olimpiady nie otrzymało za to zadanie żadnych punktów.

Na podstawie uzyskanych ocen, stosując regułę regulaminową, KGOF wyłonił spośród finalistów jedenastu laureatów. Zwycięzcą 62. Olimpiady Fizycznej został z wynikiem 94 pkt. **Jakub Supeł** z Warszawy, który – co warto podkreślić – aż o 13 punktów wyprzedził zawodnika sklasyfikowanego na miejscu drugim. Zwycięzca otrzymał jako nagrodę główną laptop; inni z laureatów otrzymali m.in. tablet, kalkulatory naukowe, czytnik e-booków, pamięci przenośne. Wszystkie nagrody rzeczowe zostały ufundowane przez firmy Eurotek International i Hamamatsu.

Treści zadań wraz z wzorcowymi rozwiązaniami z tegorocznej edycji Olimpiady Fizycznej można znaleźć na stronie Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl/>.

*Konrad DZIATKOWSKI, KGOF*

### A oto laureaci w kolejności zajętych miejsc:

1. **Jakub Supeł**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
2. **Kacper Oreszczuk**, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu
3. **Adam Krasuski**, II LO im. Generałowej Zamoyskiej i Heleny Modrzejewskiej w Poznaniu
4. **Jakub Mrożek**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
5. **Kamil Kaczmarek**, VIII LO im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
6. **Paweł Czajka**, Zespół Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Liceum Akademickie w Toruniu
7. **Paweł Nałęcz-Jawecki**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
8. **Igor Kotrasiński**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
9. **Robert Ferens**, II LO im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego w Rybniku
10. **Paweł Zalecki**, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie
11. **Aleksander Matusiak**, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie



# LVI Olimpiada Astronomiczna

## Wybór zadań

### Druga seria zadań zawodów I stopnia

1. W maju 2012 roku aż dwie planetoidy z grupy Apollo (2012 KP<sub>24</sub> i 2012 KT<sub>42</sub>) przeszły bardzo blisko Ziemi. Pierwsza z nich miała średnicę około 25 m, a średnicę drugiej oszacowano na 3–10 m. Wyznacz stosunek odległości, w których planetoidy te mogły być odkryte tym samym przyrządem. W rachunkach przyjmij, że planetoidy mają kulisty kształt i takie samo albedo, a w momencie odkrycia były z Ziemi widoczne w pełni. W doniesieniach o tych zbliżeniach sprawdź, czy koreluje to z odstępem czasu między odkryciem danej planetoidy a jej maksymalnym zbliżeniem do Ziemi.

2. W trakcie wybuchu supernowej wydzielona zostaje bardzo wielka energia, w przypadku supernowych Ia dochodząca do kilka razy 10<sup>44</sup> J. Jeden z modeli supernowej Ia przewiduje, że źródłem energii wybuchu są reakcje termojądrowe w materii ściągniętej (akreowanej) na węglowo-tlenowego białego karła z towarzyszącą mu gwiazdy. Oszacuj ilość tej materii zakładając, że jest to typowa materia gwiazdowa (25% helu, 75% wodoru). W supernowych Ia nie obserwuje się linii widmowych helu, przyjmij więc, że materia ta w całości jest „przerobiona” w trakcie wybuchu na ciężkie pierwiastki. Potrzebne dane wyszukaj samodzielnie.

### Zadania zawodów II stopnia

1. Rozważamy układ dwu gwiazd neutronowych o takich samych masach  $M$ , poruszających się po kołowej orbicie o promieniu  $R$ . Wzór opisujący moc promieniowania grawitacyjnego takiego układu zawiera jedynie iloczyn i ilorazy wymienionych parametrów układu oraz stałej grawitacji i prędkości światła, a w układzie SI bezwymiarowy współczynnik liczbowy wynosi 64/5. Wiedząc, że we wzorze tym  $R$  występuje w minus piątej potęgze, wyprowadź wzór na moc promieniowania grawitacyjnego tego układu.

2. Z dokładnością do jednego dnia wyznacz datę, dla której w bieżącym roku różnica między wysokościami górowania Słońca w Rio de Janeiro i w Chorzowie będzie możliwie najmniejsza. W obliczeniach przyjmij, że Rio de Janeiro znajduje się na zwrotniku Koziorożca, a szerokość geograficzna Chorzowa wynosi 50°18′.

### Zadania zawodów III stopnia

1. Oblicz odstęp czasu od końca zmeridżu cywilnego do początku świtu cywilnego (gdzie Słońce znajduje się na wysokości  $h < -6^\circ$ ), obserwowanych kolejno z południowego, a następnie północnego bieguna geograficznego. Trzy najbliższe przejścia Słońca przez równik niebieski następują:

- 20 marca 2013 r. o godz. 11:02 UTC,
- 22 września 2013 r. o godz. 20:44 UTC,
- 20 marca 2014 r. o godz. 16:57 UTC.

Przedyskutuj dokładność uzyskanego wyniku.

W rozwiązaniu przyjmij, że w pobliżu przejścia Ziemi przez punkty o anomalii prawdziwej 90° oraz 270°, prędkość zmian tej anomalii jest równa średniej prędkości kątowej.

2. Planetoida obiega Słońce po orbicie eliptycznej o mimośrodku  $e = 0,5$  i nachyleniu do płaszczyzny ekliptyki  $i = 90^\circ$ . Na początku bieżącego roku Ziemia znalazła się w środku geometrycznym orbity planetoidy, a planetoidę można było wtedy obserwować w kwadraturze (tzn. jej kątowa odległość od Słońca wynosiła 90°). Dla XXI wieku wyznacz rok, w którym liniowa odległość tej planetoidy od Ziemi osiąga wartość minimalną. W rozwiązaniu przyjmij, że orbita Ziemi jest okręgiem o promieniu 1 AU, pomiń wpływ oddziaływań perturbacyjnych, a wymienione w treści zadania dane liczbowe potraktuj jako dokładne.

3. W trakcie obserwacji spektroskopowych gwiazdy zaćmieniowej o centralnych zaćmieniach i okresie zmienności  $P = 3,935$  doby, zaobserwowano przesunięcia linii widmowej w obu kierunkach względem jej laboratoryjnej długości, o wartościach:

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_1 = 1,8 \cdot 10^{-4}$$

oraz

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_2 = 2,8 \cdot 10^{-4},$$

przy czym krzywe prędkości radialnych obu składników miały kształt bardzo zbliżony do sinusoidy. Oblicz masy składników tej gwiazdy.

### Końcowa klasyfikacja zawodów finałowych (i–ix: laureaci, xii–xvi: finaliści):

- |  |   |
|--|---|
| i. <b>Paweł Zalecki</b> (Kraków),        | ix. <b>Maciej Głowacki</b> (Krosno),          |
| ii. <b>Jakub Ahaddad</b> (Krosno),       | ix. <b>Maciej Kucharski</b> (Wrocław),        |
| iii. <b>Wojciech Marciniak</b> (Gdynia), | ix. <b>Paweł Szewczyk</b> (Toruń),            |
| iii. <b>Damian Mazurek</b> (Lublin),     | xii. <b>Mateusz Czyżnikiewicz</b> (Toruń),    |
| iii. <b>Tomasz Różański</b> (Kalisz),    | xiii. <b>Piotr Staroń</b> (Kraków),           |
| vi. <b>Krzysztof Szyszka</b> (Koszalin), | xiv. <b>Mateusz Krakowczyk</b> (Rybnik),      |
| vi. <b>Marcin Wrona</b> (Limanowa),      | vi. <b>Anna Wawak</b> (Bielsko-Biała),        |
| viii. <b>Mateusz Windak</b> (Kraków),    | xvi. <b>Magdalena Stasiewicz</b> (Białystok). |



# XX Olimpiada Informatyczna

W dniach 12–15 marca 2013 r. w Warszawie odbyły się zawody III stopnia jubileuszowej, XX Olimpiady Informatycznej. Do finału zostało zakwalifikowanych 96 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów finałowych zawodnicy mieli do rozwiązania w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Ceremonia zakończenia Olimpiady odbyła się na Zamku Królewskim w Warszawie. Komitet Główny przyznał łącznie 31 tytułów laureata i wyróżnił 33 zawodników, którzy w finale uzyskali co najmniej 200 punktów. Poniżej publikujemy listę laureatów (w nawiasach liczba zdobytych punktów, szkoła oraz opiekun naukowy). Lista wszystkich finalistów jest dostępna w witrynie Olimpiady: <http://www.oi.edu.pl>.



## laureaci I miejsca

1. **Błażej Magnowski** (491, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, opiekun naukowy: Ryszard Szubartowski)
2. **Stanisław Dobrowolski** (451, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Joanna Śmigielska)
3. **Marek Sommer** (430, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Hanna Stachera, Joanna Śmigielska)

## laureaci II miejsca

- 4.–5. **Karol Farbiś** (421, VI Liceum Ogólnokształcące im. J. Kochanowskiego, Radom, o.: Marcin Andrychowicz, Mirosław Mortka)
- Tomasz Syposz** (421, Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław, o.: Bartłomiej Dudek, Karol Konaszyński, Dawid Matla, Rafał Nowak)
6. **Paweł Nowak** (416, XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin, o.: Czesław Drozdowski)
7. **Igor Kotrański** (400, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Joanna Śmigielska)
8. **Krzysztof Pszeniczny** (399, Publiczne Liceum Ogólnokształcące Sióstr Prezentelek, Rzeszów)

## laureaci III miejsca

9. **Jarosław Kwiecień** (390, Gimnazjum nr 49 z Oddziałami Dwujęzycznymi, Wrocław, o.: Bartłomiej Dudek, Rafał Nowak)
- 10.–11. **Adam Czaplinski** (380, IV Liceum Ogólnokształcące im. M. Skłodowskiej-Curie, Olsztyn, o.: Magda Burakowska)
- Kamil Dębowski** (380, I Liceum Ogólnokształcące im. M. Konopnickiej, Suwałki, o.: Marek Gałaszewski)
12. **Kamil Rychlewicz** (373, I Liceum Ogólnokształcące im. M. Kopernika, Łódź, o.: Grzegorz Andrzejczak, Paweł Mateja)
13. **Jan Ludziejewski** (368, VIII Liceum Ogólnokształcące, Warszawa, o.: Piotr Smulewicz, Bartosz Szreder)
14. **Michał Zieliński** (357, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków, o.: Lech Duraj, Andrzej Dyrek)
15. **Karol Kaszuba** (354, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Andrzej Nowak, Bartosz Szreder)

16. **Przemysław Jakub Kozłowski** (351, I Liceum Ogólnokształcące im. A. Mickiewicza, Białystok, o.: Iwona Bujnowska, Ireneusz Bujnowski)
17. **Ewelina Krakowiak** (346, VI Liceum Ogólnokształcące im. J. Kochanowskiego, Radom, o.: Marcin Andrychowicz, Mirosław Mortka)
18. **Stanisław Purgał** (334, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa)
19. **Daniel Danielski** (315, Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław, o.: Bartłomiej Dudek, Krzysztof Loryś)
20. **Grzegorz Świrski** (313, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków)
21. **Rafał Stefański** (311, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Michał Adamczyk, Maciej Matraszek, Hanna Stachera, Joanna Śmigielska)
22. **Stanisław Barzowski** (305, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)
23. **Paweł Nałęcz-Jawecki** (304, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Joanna Śmigielska)
24. **Michał Kowalczyk** (301, VI Liceum Ogólnokształcące im. J. i J. Śniadeckich, Bydgoszcz, o.: Marek Cygan, Małgorzata Piekarska)
- 25.–27. **Grzegorz Fabiański** (300, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Maciej Matraszek, Hanna Stachera, Piotr Suwara)
- Szymon Łukasz** (300, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków, o.: Andrzej Dyrek, Grzegorz Herman)
- Konrad Paluszek** (300, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Joanna Śmigielska)
28. **Bartosz Kostka** (286, Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej, Wrocław, o.: Bartłomiej Dudek, Wiktor Janas, Dawid Matla, Rafał Nowak, Damian Rusak)
- 29.–31. **Patryk Czajka** (280, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Michał Adamczyk, Maciej Matraszek, Wojciech Nadara, Bartosz Szreder, Joanna Śmigielska)
- Michał Głapa** (280, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków, o.: Andrzej Dyrek, Grzegorz Herman, Wiktor Kuropatwa)
- Michał Łuszczyc** (280, IV Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II, Tarnów, o.: Władysław Strejczek)



## LXIV Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1464 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 572 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 121 uczniów. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 19 kwietnia br. postanowił przyznać 19 osobom tytuł laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia, zaś 7 osobom – wyróżnienie.

Laureatami LXIV OM zostali (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):



### Nagrody stopnia pierwszego

**Konrad Jan Paluszek** (30) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Kamil Rychlewicz** (30) – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi

### Nagrody stopnia drugiego

**Marcin Kostrzewa** (24) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Karol Marcinkowski** (23) – I Społeczne Liceum Ogólnokształcące im. Hetmana Jana Tarnowskiego w Tarnobrzegu

**Jakub Skorupski** (23) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Marek Sokołowski** (23) – I Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Kościuszki w Łomży

### Nagrody stopnia trzeciego

**Kamil Dębowski** (20) – I Liceum Ogólnokształcące im. Marii Konopnickiej w Suwałkach

**Kajetan Ożarowski** (20) – Liceum Ogólnokształcące nr XIV im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

**Paweł Brysch** (18) – II Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach

**Konrad Deka** (18) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

**Daniel Grzegorzewski** (18) – I Liceum Ogólnokształcące im. Józefa Ignacego Kraszewskiego w Białej Podlaskiej

**Karol Kaszuba** (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Jakub Morawski** (18) – V Liceum Ogólnokształcące w Bielsku-Białej

**Jakub Mrozek** (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Ngoc Khanh Nguyen** (18) – Liceum Ogólnokształcące nr 14 we Wrocławiu

**Albert Citko** (17) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Michał Figlus** (17) – I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim

**Stanisław Frejolak** (17) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Chi Cong Nguyen** (17) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

### Wyróżnienia

**Jakub Koncki** (16) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Stanisław Jan Dobrowolski** (14) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

**Sławomir Kubicki** (14) – I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Dubois w Koszalinie

**Krzysztof Maziarz** (14) – Zespół Szkół Ogólnokształcących w Krośnie

**Krzysztof Pszeniczny** (14) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Siostr Prezentek w Rzeszowie

**Jan Mirkiewicz** (13) – Gimnazjum nr 49 z Oddziałami Dwujęzycznymi Zespołu Szkół nr 14 we Wrocławiu

**Krzysztof Stanisławek** (13) – VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana Kochanowskiego w Radomiu

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali laureatom i wyróżnionym uczniom w przygotowaniach do zawodów.

Nagrodę im. Andrzeja Mąkowskiego za najlepiej zredagowane poprawne rozwiązanie jednego z zadań z finału LXIV Olimpiady Matematycznej otrzymały następujące osoby:

**Anna Hoduń** (zadanie 4) – uczennica klasy drugiej V Liceum Ogólnokształcącego im. Augusta Witkowskiego w Krakowie; nauczyciel zawodniczki: Jacek Dymel.

**Konrad Jan Paluszek** (zadanie 3) – uczeń klasy pierwszej XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie; nauczyciele zawodnika: Wojciech Martys i Konrad Pióro.

## VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 9790 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 1216 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 190 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów na posiedzeniu w dniu 16 marca br. oraz po rozpatrzeniu odwołań, które wpłynęły po zawodach finałowych, postanowił przyznać 144 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia.

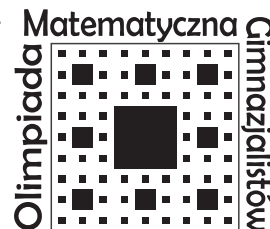
Tytuł laureata pierwszego stopnia otrzymali:

**Paweł Burzyński** – Gimnazjum nr 24 w Gdyni

**Wiktoria Kośny** – Zespół Szkół nr 51 im. Ignacego Domeyki w Warszawie

**Adam Kucz** – Gimnazjum Dwujęzyczne nr 18 w Zespole Szkół nr 2 w Rybniku

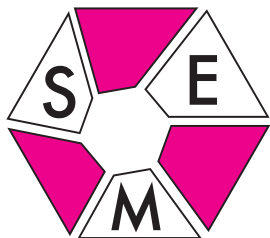
**Stanisław Paweł Kurdziałek** – Pallotyńskie Gimnazjum im. Stefana Batorego w Lublinie



Zadania oraz pełne wersje komunikatów z obu olimpiad można znaleźć na stronach [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl) oraz [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).

# Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

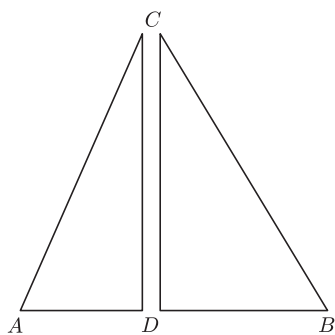
www.sem.edu.pl



Do zawodów II stopnia VIII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów zostało zakwalifikowanych 1216 uczniów.

Przytoczone zadanie 2 rozwiązało niezbyt wielu uczestników! Tylko 45 z nich uzyskało maksymalną ocenę 6 punktów, 48 – 5 punktów, 8 – 2 punkty, zaś aż 986 otrzymało 0 punktów.

Istnieją trójkąty, w których nie tylko boki i wysokości, lecz także odcinki dwusiecznych, zawarte w ich wnętrzu, mają długości całkowite. Na przykład trójkąt równoramienny o podstawie 13 650 i ramionach po 24 375 ma wysokość 23 400 i dwie po 13 104 oraz odcinek dwusiecznej 23 400 (nic dziwnego, bo to wysokość) i dwa po 14 000. Nie wiadomo jednak, czy istnieje trójkąt, który na dodatek miałby jeszcze środkowe całkowitej długości. Pytanie o jego istnienie postawił 300 lat temu Leonhard Euler.



Na zawodach II stopnia VIII OMG, które odbyły się 5 stycznia 2013, jedno z zadań było następujące.

**Zadanie 2.** *Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.*

Odpowiedź jest pozytywna, a rozwiązujący podawali (i uzasadniali), że warunki spełnia np. trójkąt równoramienny o długości podstawy 30 i ramion po 25. Wtedy wysokość opuszczona na podstawę ma długość 20, a na każde z ramion po 24. Zwykle dochodzono do tego, odbijając symetrycznie trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5 względem dłuższej przyprostokątnej. Otrzymuje się wtedy trójkąt równoramienny o długości podstawy 6 i ramion po 5, a wysokości, odpowiednio, 4 i dwie po  $\frac{24}{5}$ . Kąt przy podstawie jest, oczywiście, ostry, a kąt między ramionami jest mniejszy niż  $2 \times 45^\circ = 90^\circ$ , gdyż jest równy podwojonemu mniejszemu kątowi w trójkącie prostokątnym (leży naprzeciw krótszej przyprostokątnej). Jest to zatem trójkąt ostrokątny, w którym żądane długości są liczbami wymiernymi. Wystarczyło teraz powiększyć go pięciokrotnie (jednokładnie względem któregoś wierzchołka w skali 5 : 1), aby otrzymać odpowiedź.

Analizując powyższy przykład, widzimy, że istotne było w nim znalezienie takiego trójkąta ostrokątnego, w którym żądane długości są liczbami wymiernymi i do tego posłużył trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5. Jest to najmniejszy trójkąt prostokątny, którego długości boków  $x$ ,  $y$  i  $z$  tworzą tzw. trójkę pitagorejską  $(x, y, z)$ , czyli są liczbami naturalnymi spełniającymi równanie

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań, a wszystkie trójki pitagorejskie wyrażają się wzorami

$$(k|n^2 - m^2|, 2knm, k(n^2 + m^2)),$$

gdzie  $k$ ,  $n$  i  $m$  ( $n \neq m$ ) są liczbami naturalnymi. Przypomnijmy też, że w trójce pitagorejskiej musi być  $x \neq y$ , gdyż  $\sqrt{2}$  jest liczbą niewymierną.

Powstaje pytanie, czy dla dowolnej trójki pitagorejskiej  $(x, y, z)$  analogiczna konstrukcja prowadzi do trójkąta ostrokątnego o wymaganych w zadaniu własnościach. Odpowiedź też jest pozytywna. Załóżmy, że  $y > x$  i odbijmy symetrycznie trójkąt prostokątny o bokach długości  $x$ ,  $y$  i  $z$  względem dłuższej przyprostokątnej. Wtedy otrzymuje się trójkąt równoramienny o podstawie długości  $2x$  i ramion po  $z$ . Pole tego trójkąta wynosi  $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y = xy$ , zatem wysokości mają długości, odpowiednio,  $y$  i  $\frac{2xy}{z}$ . Uzasadnienie, że jest to trójkąt ostrokątny, jest analogiczne. Wystarczy teraz powiększyć ten trójkąt  $z$  razy, aby otrzymać pozytywną odpowiedź.

Trudniejsza jest sprawa, gdy pytamy o trójkąt ostrokątny o żądanych w zadaniu własnościach, ale niekoniecznie równoramienny. W tym przypadku odpowiedź też jest pozytywna, a poszukiwanie trójkąta o żądanych własnościach również opiera się na opisanym wyżej motywie. Weźmy dwie różne trójki pitagorejskie  $(x, y, z)$  i  $(a, b, c)$  i niech  $y > x$  oraz  $b > a$ . Rozważmy trójkąty prostokątne  $CAD$  i  $CDB$  o bokach długości:  $|AD| = \frac{x}{y}$ ,  $|CA| = \frac{z}{y}$ ,  $|DB| = \frac{a}{b}$ ,  $|BC| = \frac{c}{b}$  oraz  $|CD| = 1$ , gdzie  $CD$  jest w nich wspólną, dłuższą z przyprostokątnych.

Zauważmy, że w trójkącie  $ABC$  boki mają długości:  $|AB| = \frac{x}{y} + \frac{a}{b}$ ,  $|CB| = \frac{z}{y}$  i  $|AC| = \frac{c}{b}$ . Pole tego trójkąta wynosi  $\frac{1}{2}(\frac{x}{y} + \frac{a}{b}) = \frac{xb+ay}{2by}$ . Wysokości mają długości, odpowiednio,

$$h_{AB} = 1, \quad h_{CB} = \frac{\frac{xb+ay}{2by}}{\frac{1}{2} \frac{z}{y}} = \frac{xb+ay}{zb} \quad \text{oraz} \quad h_{CA} = \frac{\frac{xb+ay}{2by}}{\frac{1}{2} \frac{c}{b}} = \frac{xb+ay}{cy},$$

są więc liczbami wymiernymi. Zatem w trójkącie  $ABC$  długości wszystkich boków i wysokości są wymierne. Powiększając więc go  $bcyz$  razy (jednokładnie względem któregoś wierzchołka), otrzymujemy trójkąt o żądanych własnościach.

Andrzej FRYSZKOWSKI



Tekst ten dedykuję pamięci Profesora Friedricha Bachmanna, którego poparcia miałem zaszczyt doświadczyć.

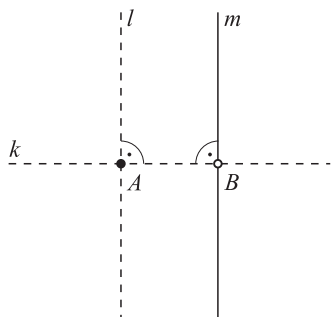


### Rozwiązanie zadania F 833.

Długość  $\lambda$  fali generowanego dźwięku jest proporcjonalna do długości  $L$  piszczałki (współczynnik zależy od rodzaju piszczałki i nie zależy od rodzaju wypełniającego ją gazu), z definicji:  $c = \lambda f$ , a więc częstotliwość  $f$  dźwięku danej piszczałki jest proporcjonalna do prędkości dźwięku w wypełniającym ją gazie. Powietrze to w ponad 99% mieszanina dwuatomowych cząsteczek azotu ( $N_2$ ) i tlenu ( $O_2$ ) o wypadkowej masie molowej  $\mu_P = 28,84$  g/mol. Cząsteczki helu, gazu szlachetnego, są jednoatomowe:  $\mu_{He} = 4,00$  g/mol. Jak wiadomo, stosunek  $c_p/c_v$  dla gazu jednoatomowego wynosi w przybliżeniu  $5/3$ , a dla gazu dwuatomowego  $7/5$ . Po podstawieniu tych danych otrzymujemy

$$f/f_0 = \sqrt{\frac{28,84 \cdot 5/3}{4,00 \cdot 7/5}} \approx 2,39,$$

a więc poszukiwana częstotliwość  $f \approx 1289$  Hz.



Rys. 1. Oba przekształcenia to symetrie z poślizgiem (czyli złożenia symetrii z przesunięciem o wektor równoległy do jej osi). Ze przesunięcia są przeciwne, łatwo zauważyć pisząc  $mlk = lkm = lmk$ . Jeśli to obustronnie pomnożymy przez  $k$  (i  $k$  zniknie), to otrzymamy  $ml = lm$ , czyli dwa przeciwne przesunięcia.

Słowa, którymi będziemy się zajmowali, będą napisami złożonymi z liter jednego lub kilku zbiorów (na początek przyjmijmy, że zbiory są dwa – jeden zawiera małe litery łańciskowe, a drugi duże) o tej własności, że dwie jednakowe litery umieszczone po kolei będą znikły. Napis, w którym wszystko znikło (czasem i taki jest potrzebny), będzie oznaczany 1.

**Przykład.** Zbiór jest jeden, a litery są dwie:  $a$  i  $b$ . Wprowadzamy dodatkowy warunek  $abab = 1$ . Co opisują te słowa?

**Algebraik** odpowie: to grupa Kleina, czteroelementowa grupa niecykliczna.

**Geometra** stwierdzi, że to grupa izometrii własnych prostokąta, czyli sposobów położenia banknotu na jego obrysie.

Słowo *grupa* jest dobrze dobrane do naszych słów. Faktycznie, dopisywanie jednego do drugiego można traktować jak działanie (będziemy o nim mówić: *mnożenie*). Elementem neutralnym jest wtedy 1, a elementem przeciwnym do  $a_1 a_2 \dots a_n$  jest  $a_n a_{n-1} \dots a_1$ . Łączność dopisywania nie wymaga uzasadnień. Zatem nasze słowa przy dowolnym wyborze zbiorów liter tworzą grupę.

W tej terminologii wszystkie litery są inwolucjami (czyli są odwrotne do siebie) i dlatego takie grupy nazywają się *inwolucyjne*.

Grupy takie mogą się różnić nie tylko zbiorami liter, ale też dodatkowymi warunkami pozwalającymi (jak w powyższym przykładzie) skracać słowa.

### Fanaberia Leibniza, czyli motywacja historyczna

Gottfried Friedrich Wilhelm Leibniz (1646–1716) ogromną wagę przywiązywał do języka, w jakim formuluje się prawa każdej z dyscyplin nauki – twierdził, że każda dyscyplina powinna mieć własny. W szczególności twierdził, że geometria analityczna to odrażająca hybryda: do geometrii używa się języka algebry. W geometrii można liczyć, ale na obiektach geometrycznych – twierdził.

Nikt nie brał tego postulatu poważnie, aż pod koniec XIX wieku Juhasson Hjelmslev (1873–1950) stwierdził, że można rachować na podprzestrzeniach, utożsamiając je z symetrami względem tych podprzestrzeni. Przyjrzyjmy się temu na płaszczyźnie.

Co dla różnych prostych  $k$  i  $l$  oznacza napis  $kl = lk$ ? Chwila namysłu pozwoli nam zauważyć, że złożenie dwóch symetrii osiowych to przesunięcie (ale wtedy obie strony oznaczałyby przesunięcia w przeciwnych kierunkach) lub obrót. Zatem rozważana równość to stwierdzenie, że dwa obroty o ten sam kąt, ale o przeciwnym zwrocie, są równe: co to za kąt? Oczywiście, kąt półpełny! Zatem proste muszą tworzyć kąt o połowę mniejszy, czyli **są prostopadłe**.

Proste spełniające podany warunek mają jeszcze i tę własność, że dla pewnego punktu  $P$  (nie ukrywajmy – punktu ich przecięcia) mamy równość  $kl = lk = P$ , bo przecież obrót o kąt półpełny to symetria względem środka obrotu.

Co wobec tego oznacza napis  $mA = Am$ ? Spójrzmy na rysunek 1. Dobierając proste  $k$  i  $l$  tak, by było  $km = mk$  oraz  $kl = lk = A$ , otrzymujemy  $mlk = klm$ , a więc prawa strona badanej równości to złożenie symetrii względem  $k$  z przesunięciem o wektor  $2\vec{AB}$ , podczas gdy lewa to złożenie przesunięcia o  $2\vec{BA}$  z symetrią względem  $k$ . To jest to samo tylko wtedy, gdy  $A = B$ , czyli badany napis oznacza, że  **$A$  leży na  $m$** .

Można by zatem – wobec tych obserwacji – podejrzewać, że za pomocą wprowadzonych na początku słów potrafimy w szczególności opisać geometrię płaszczyzny. I tak jest w istocie.

Kończąc dygresję historyczną, wypada powiedzieć, że kluczowym pojęciem pozwalającym na zrealizowanie fanaberii Leibniza było wyróżnienie zbioru liter przemennych z daną literą –  $[k]$  oznaczać będzie dalej zbiór liter przemennych z  $k$ . To pojęcie wprowadził i zastosował Arnold Schmidt (1902–1967), a sprawę doprowadził do końca Friedrich Bachmann (1909–1982).



### Rozwiązanie zadania M 1389.

Przyjmijmy oznaczenie  $c_1 \dots c_n$  dla

$$10^{n-1}c_1 + 10^{n-2}c_2 + \dots + 10c_{n-1} + c_n.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{10^n} + \\ &\quad + \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{10^{2n}} + \dots = \\ &= \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{10^n} \sum_{k=1}^{\infty} (1/10^n)^k, \end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned} 9(a_1 + \dots + a_n) &= \\ &= 9 \left( \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{10^n} + \frac{b_2 b_3 \dots b_1}{10^{2n}} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_n b_1 \dots b_{n-1}}{10^{n-1}} \right) \frac{1}{10^n - 1} = \\ &= 9(b_1 + \dots + b_n) \cdot \\ &\quad \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1) \frac{1}{10^n - 1} = \\ &= b_1 + \dots + b_n. \end{aligned}$$



### Rozwiązanie zadania M 1388.

Niech  $n_i$  oznacza liczbę wrogów  $i$ -tego rycerza, którzy zasiadają z nim przy stole. W kroku 0 posadzmy wszystkich rycerzy przy pierwszym stole. Będziemy w kolejnych krokach przesadzać rycerzy, rozważając liczbę

$$N = n_1 + \dots + n_{44} \leq 3 \cdot 44.$$

Jeśli po wykonaniu kroku przy pierwszym stole pewien rycerz siedzi wraz z przynajmniej dwoma swoimi wrogami, wykonujemy kolejny krok, w którym przesadzamy go do drugiego stołu. Zauważmy, że jeśli siedział on przy stole wraz z trzema wrogami, to  $N$  zmienia się na  $N - 6$ . Jeśli zaś siedział on przy stole wraz z dwoma wrogami, to  $N$  zmienia się na liczbę nie większą niż  $N - 2$ . Skoro po wykonaniu każdego kroku  $N$  maleje, to wykonamy ich skończenie wiele. Oczywiście, po wykonaniu ostatniego kroku  $n_i \leq 1$  dla każdego  $i$ , co kończy dowód.

## Nauka obcego języka

Wiemy już, co w geometrii płaszczyzny oznacza  $kl = lk$ , a co  $Am = mA$ . Aby zobaczyć, jak wygląda tak opisywana geometria, trzeba przejść przynajmniej krótkie samokształcenie w używaniu leibnizowskiego języka.

Proszę odpowiedzieć na pytanie, co oznaczają następujące napisy:

$$ab = bc, \quad ab = cd, \quad Ab = bC, \quad Ab = dC, \quad aB = Bc, \quad AB = BC.$$

Odpowiedzi znajdują się w numerze, ale proszę się postarać samodzielnie odczytać znaczenia. Wtedy stanie się jasne, że zmiana języka to poniekąd zmiana patrzenia na świat: to, co w uświęconym tradycją klasycznym szkolnym języku geometrii wyraża się prosto, tu może wyrażać się bardziej zawile, ale jest i odwrotnie – trudno formułowane w języku klasycznym sytuacje po leibnizowsku niejednokrotnie będą bardzo proste.

Choćby taki fakt: słowo  $a_1 a_2 \dots a_{2n}$  daje się zawsze zastąpić słowem dwuliterowym i wynikający stąd natychmiast wniosek, że każde słowo ma odpowiednik co najwyżej trzyliterowy. Co to znaczy geometrycznie? I jak to udowodnić?

Okazuje się, że w tej sprawie kluczowy (i wystarczający) jest fakt:

*jeśli  $k, l, m \in [p]$  lub  $k, l, m \in [P]$ , to istnieje takie  $n$ , że  $klm = n$ .*

Przesłanki powyższego zdania klasycznie brzmią:  $k, l, m$  są współpękowe (prawda?). Ale takie spojrzenie pozwala nam na naturalne uogólnienie, że zbiór liter nazwiemy pękiem, gdy każdy trzyliterowy napis złożony z liter należących do tego zbioru da się zastąpić napisem jednoliterowym. Proszę sprawdzić, że punkty przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru tworzą pęk (jak by to brzmiało klasycznie?).

Czasami tłumaczenie bywa twórcze. Na przykład zdanie, które orzeka, że dla dowolnych liter  $a, b, c$  zachodzi

$$abcabcabcabcabcabc = 1$$

pełni rolę tzw. słowa Banacha, czyli pozwala stwierdzić, że w grupie izometrii płaszczyzny euklidesowej nie istnieją podgrupy wolne, co m.in. wyklucza paradoksalny rozkład na płaszczyźnie. Oryginalne **słowo Banacha** to twierdzenie:

*dla dowolnych izometrii płaszczyzny euklidesowej  $\varphi$  i  $\psi$  przekształcenie*

$$\varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^4 \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2$$

*jest identycznością.*

Które sformułowanie jest prostsze?

Kolejny przykład to **twierdzenie Michela Chaslesa**:

*każda izometria jest postaci  $ab$  lub  $aB$ ,*

co Chasles wyrażał w następujący sposób:

*każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, obrotem*

*lub symetrią z poślizgiem*

(równoważność obu sformułowań była już obecna w tekście tego artykułu).

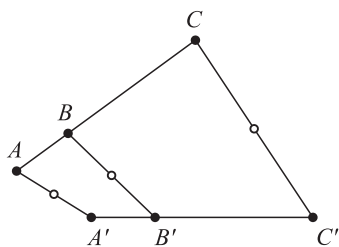
Argumentem za tym, że pierwsze ze sformułowań jest bardziej nośne, może być fakt, iż Bachmann pod jego inspiracją stworzył odrębny dział teorii grup: **grupy biinwolutywne**, czyli takie, w których każdy z elementów jest inwolucją lub złożeniem dwu inwolucji. Do badania tego rodzaju obiektów może zachęcić spostrzeżenie, że

*grupa izometrii przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru jest biinwolutywna, czy jeszcze bardziej niespodziewane, że*

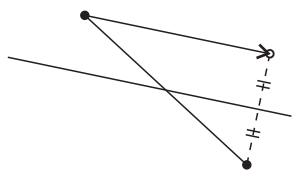
*biinwolutywna jest też grupa bijekcji dowolnego zbioru.*

## Czy odmienny punkt widzenia pozwala zobaczyć coś nowego

Podam przykład problemu łatwego w stylu leibnizowskim i trudnego w stylu klasycznym. Co więcej – klasycznie trudno było nawet wpaść na pomysł, że taka prawidłowość może mieć miejsce.



Rys. 2



Rys. 3

**Twierdzenie Hjelmslewa.** Jeśli  $ABC$  i  $A'B'C'$  są przystającymi trójkątami punktów współliniowych, to środki odcinków  $AA'$ ,  $BB'$  i  $CC'$  leżą na jednej prostej (rys 2).

**Dowód.** Odcinek  $AC$ , a więc punkty  $A, B, C$ , można nałożyć na odcinek  $A'C'$  dwiema izometriami: jedną z nich będzie obrót lub przesunięcie, a drugą symetria z poślizgiem. W symetrii z poślizgiem zaś środek każdej pary punkt-obraz leży na jej osi (rys. 3).

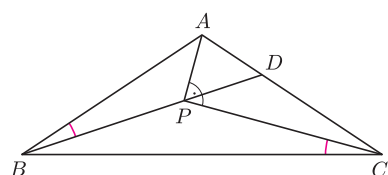
\* \* \*

Pełny i zaawansowany wykład demonstrujący wykorzystanie tego języka można znaleźć w monografii Bachmanna *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, 1959. Ale jest pytanie, czy ktoś normalny, a zatem niebędący zawodowym matematykiem, z tego języka korzysta. Okazuje się, że tak – program geometrii w szkołach niemieckich korzysta z tego języka. Możemy się o tym przekonać, zaglądając do wydanego przez Prószyńskiego poradnika pod nazwą *Atlas matematyki*, będącego tłumaczeniem szkolnego poradnika używanego w Niemczech – geometria w nim jest mocno odmienna od tej, jaką znamy ze szkoły.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



**M 1387.** Na ramieniu  $AC$  trójkąta równoramiennego  $ABC$  o podstawie  $BC$  dany jest punkt  $D$ , przy czym  $2AD = DC$ . Na odcinku  $BD$  dany jest taki punkt  $P$ , że kąt  $APC$  jest prosty (rysunek). Udowodnić, że kąty  $PBA$  i  $PCB$  są równe. Rozwiązanie na str. 5

**M 1388.** Król zaprosił na przyjęcie 44 rycerzy. Wiadomo, że każdy rycerz ma wśród pozostałych co najwyżej 3 wrogów (zakładamy, że jeśli rycerz  $Y$  jest wrogiem rycerza  $X$ , to i  $X$  jest wrogiem rycerza  $Y$ ). Udowodnić, że można tak rozsadzić rycerzy przy dwóch stołach (dowolnie dużych), by każdy rycerz siedział przy stole z co najwyżej jednym ze swoich wrogów. Rozwiązanie na str. 17

**M 1389.** Dana jest liczba wymierna  $a_1 = 0,(b_1b_2 \dots b_n)$ , w której zapisie dziesiętnym blok cyfr  $b_1b_2 \dots b_n$  powtarza się okresowo po przecinku. Rozważmy liczby  $a_2 = 0,(b_2b_3 \dots b_nb_1)$ ,  $a_3 = 0,(b_3b_4 \dots b_nb_1b_2)$ , ...,  $a_n = 0,(b_nb_1 \dots b_{n-1})$  powstałe z  $a_1$  przez cykliczne przesunięcia cyfr w bloku. Udowodnić, że  $b_1 + \dots + b_n = 9(a_1 + \dots + a_n)$ . Rozwiązanie na str. 17

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

**F 833.** Jaka będzie częstotliwość  $f$  dźwięku piszczałki wypełnionej helem, jeśli wypełniona powietrzem generuje dźwięk o częstotliwości  $f_0 = 440$  Hz? Prędkość  $c$  dźwięku w gazie, w warunkach normalnych, z dobrym przybliżeniem opisuje zależność

$$c^2 = \frac{c_p RT}{c_V \mu},$$

gdzie  $c_p$  i  $c_V$  oznaczają odpowiednio ciepła właściwe gazu pod stałym ciśnieniem i w stałej objętości,  $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $T$  – temperaturę w skali Kelvina, a  $\mu$  – masę jednego mola gazu. Powietrze jest mieszaniną azotu (78% objętości) i tlenu (21% objętości).

Rozwiązanie na str. 16

**F 834.** W celu pomiaru prędkości przepływu krwi wiązkę ultradźwięków o częstotliwości 2,0 MHz skierowano na krew płynącą w tętnicy w kierunku źródła fali. Po zmieszaniu fali wychodzącej ze źródła z falą powracającą do umieszczonego obok niego mikrofonu, odbitą od czerwonych ciałek krwi, zaobserwowano dudnienia o częstotliwości 389,6 Hz. Przyjmując, że prędkość ultradźwięku we krwi wynosi  $v_u = 1540$  m/s, znaleźć prędkość przepływu krwi. Rozwiązanie na str. 4



## Informatyczny kącik olimpijski (63): Plecak

Jednym z klasycznych problemów algorytmicznych jest tzw. problem plecakowy przedstawiany m.in. w następującej wersji: mamy  $n$  przedmiotów, ponumerowanych liczbami od 1 do  $n$ . Każdy przedmiot ma określoną masę –  $i$ -ty przedmiot waży  $m[i]$  kilogramów. Mamy do dyspozycji plecak, do którego możemy zapakować przedmioty o łącznej masie co najwyżej  $M$  kilogramów. Chcemy dowiedzieć się, jaka jest największa masa przedmiotów, które możemy zapakować do plecaka, tak by nie przekroczyć jego udźwigu.

Rozwiązanie tego problemu korzysta z metody programowania dynamicznego. Mamy tablicę  $d[0..M]$ , na początku zainicjowaną wartościami  $-\infty$ . Kolejne przedmioty rozpatrujemy w kolejnych fazach algorytmu. Będziemy utrzymywali niezmiennik, że po  $i$ -tej fazie algorytmu  $d[j] \neq -\infty$ , jeśli spośród przedmiotów ze zbioru  $\{1, \dots, i\}$  możemy wybrać podzbiór  $P$  o łącznej masie  $j$ . Ponadto  $d[j]$  będzie największym numerem przedmiotu, który można umieścić w pewnym  $P$ .

```

d[0] := 0;
for i := 1 to n do
  for j := M downto m[i] do
    if d[j - m[i]] ≠ -∞ then d[j] := i;
  
```

Odpowiedzią jest, oczywiście, największe  $j$ , takie że  $d[j] \neq -\infty$ . Nasze rozwiązanie działa w czasie  $O(nM)$  i pamięci  $O(n + M)$ .

W praktyce jednak, wybierając się na wycieczkę, pakujemy do plecaka rzeczy, biorąc pod uwagę ich przydatność, a nie tylko to, jak imponująco będzie wyglądał nasz plecak. W szczególności niektóre z przedmiotów są beзуżyteczne, jeśli w plecaku nie znajdują się z innymi, np. wzięcie na wakacje statywu nie jest zbyt mądre, jeśli nie weźmiemy aparatu fotograficznego. I właśnie z tą ciut praktyczniejszą wersją problemu plecakowego musieli zmierzyć się uczestnicy finału Potyczek Algorytmicznych 2012. Dla każdego przedmiotu  $i$  został określony inny przedmiot  $p[i]$ , bez którego przedmiot  $i$  będzie beзуżyteczny (albo  $p[i] = 0$ , jeśli  $i$  jest przedmiotem przydatnym samym w sobie). Pytamy znów, jak ciężki plecak możemy zapakować, nie przekraczając jego udźwigu i nie zabierając żadnego beзуżytecznego przedmiotu.

Zależności między przedmiotami możemy przedstawić jako drzewo: dla każdego przedmiotu  $i$  tworzymy krawędź skierowaną z węzła  $i$  do węzła  $p[i]$  (patrz rysunek). Dodajemy także sztuczny przedmiot numer 0 o wadze  $m[0] = 0$ . Widzimy, że aby można było zapakować do plecaka przedmiot  $i$ , muszą tam znaleźć się wszystkie przedmioty na ścieżce od węzła  $i$  w górę drzewa.

Okazuje się, że problem można rozwiązać całkiem prosto, ale wymaga to pewnej dozy pomysłowości i na zawodach udało się to tylko dwóm z 20 zawodników. Będziemy przeglądać przedmioty w kolejności występowania ich w drzewie w porządku *preorder* (czyli w kolejności przechodzenia drzewa w głąb – dla ułatwienia przenumerujemy te przedmioty, jeśli ich kolejność jest inna). Rozważamy przedmiot  $i$  i pytamy się o warunek istnienia upakowania  $P$  o masie  $j$  przedmiotami ze zbioru  $\{1, \dots, i\}$ , jeśli bierzemy przedmiot  $i$ , ale nie bierzemy żadnego beзуżytecznego przedmiotu. Załóżmy, że istnieje poprawne upakowanie plecaka przedmiotami  $P' \subseteq \{1, \dots, i-1\}$  o masie  $j - m[i]$  i że  $k$  jest największym możliwym numerem przedmiotu w  $P'$ . Zauważmy, że jeśli  $k = p[i]$ , to w oczywisty sposób  $P = P' \cup \{i\}$  jest poprawnym upakowaniem. Podobnie jeśli  $p[i] < k < i$  (czyli węzeł  $k$  znajduje się w poddrzewie zaczepionym w lewym bracie węzła  $i$ ), to ponieważ  $P'$  zawiera wszystkie przedmioty na ścieżce od  $k$  do korzenia, więc zawiera również przedmiot  $p[i]$ , zatem znowu bierzemy  $P = P' \cup \{i\}$ . Jeśli natomiast  $k < p[i]$ , to oznacza, że żadne upakowanie o masie  $j - m[i]$  nie może zawierać przedmiotu  $p[i]$ , czyli upakowanie  $P$  nie może istnieć.

Zaimplementowanie nowego rozwiązania wymaga jedynie kosmetycznej zmiany w poprzednim programie:

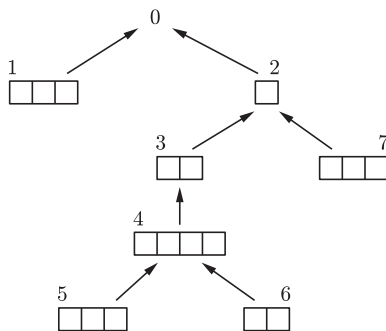
```

d[0] := 0;
for i := 1 to n do
  for j := M downto m[i] do
    if d[j - m[i]] ≥ p[i] then d[j] := i;
  
```

Tomasz IDZIASZEK

Rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli  $i \in P$ , to  $P \setminus \{i\}$  musi być podzbiorem przedmiotów ze zbioru  $\{1, \dots, i-1\}$  o masie  $j - m[i]$ , czyli  $d[j - m[i]] \neq -\infty$  po  $(i-1)$ -szej fazie algorytmu.

Warto zwrócić uwagę na malejącą kolejność, w jakiej iterujemy zmienną  $j$  w wewnętrznej pętli – iterowanie w kolejności rosnącej daje rozwiązanie innej wersji problemu plecakowego, w której mamy do dyspozycji dowolną liczbę przedmiotów każdego z rodzajów.



Mamy  $n = 7$  przedmiotów i plecak o udźwigu  $M = 11$ . W powyższym drzewie masa przedmiotu oznaczona jest liczbą kwadracików pod numerem przedmiotu, np.  $m[1] = 3$ ,  $p[1] = 0$ , zaś  $m[6] = 2$ ,  $p[6] = 4$ .

Wzięcie przedmiotów 3, 4, 5 i 6 całkowicie wypełnia plecak, ale jest niepoprawne, gdyż przedmiot 3 jest beзуżyteczny bez przedmiotu 2. Optymalnym rozwiązaniem jest wzięcie przedmiotów 2, 3 i 4 oraz jednego z przedmiotów ze zbioru  $\{1, 5, 7\}$ , co daje sumaryczną masę 10 kilogramów.

## Kącik przestrzenny (18): O pożytku ze sfery wpisanej

W tym kąciku chcielibyśmy powrócić do pewnych własności sfery wpisanej w czworościan, o których pisaliśmy w kąciku 2 o najmocniejszym twierdzeniu stereometrii (*Delta* 3/2010). Okazuje się, że można je wykorzystać do udowodnienia faktów pozornie niezwiązanych ze sferą wpisaną.

Przypomnijmy więc główne twierdzenie:

**Twierdzenie 1.** *Dana jest sfera  $o$  i punkty  $A$  i  $B$  takie, że prosta  $AB$  jest rozłączna ze sferą  $o$ . Prowadzimy dwie płaszczyzny przechodzące przez punkty  $A$  i  $B$  styczne do sfery  $o$  w punktach  $P$  i  $Q$  (rys. 1). Wówczas trójkąty  $APB$  i  $AQB$  są przystające.*

W kąciku 8 (*Delta* 6/2011) udowodniliśmy następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.** *W dowolnym czworościanie  $ABCD$  zachodzi nierówność*  

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC > \sphericalangle ADC.$$

Teraz zaprezentujemy inny dowód, wykorzystujący własności sfery wpisanej.

**Dowód.** Niech  $P, Q, R$  będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościanie  $ABCD$  odpowiednio ze ścianami  $BCD, CAD, ABD$  (rys. 2). Na mocy twierdzenia 1 trójkąty  $ADQ$  i  $ADR$  są przystające, skąd  $\sphericalangle ADQ = \sphericalangle ADR = \alpha$ . Analogicznie dostajemy

$$\sphericalangle BDR = \sphericalangle BDP = \beta \quad \text{i} \quad \sphericalangle CDP = \sphericalangle CDQ = \gamma.$$

Wystarczy jeszcze zauważyć, że

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \alpha + 2\beta + \gamma > \alpha + \gamma = \sphericalangle ADC.$$

Ta metoda nie wymaga rozważania oddzielnie dwóch przypadków, jak dowód przeprowadzony w kąciku 8. Czytelnika Odważnego zaś zainteresuje fakt, że można w ten sposób udowodnić odpowiedniki twierdzenia 2 w wyższych wymiarach. Podobnie można uzasadnić inne ciekawe twierdzenie dotyczące czworościanu.

**Twierdzenie 3.** *W dowolnym czworościanie pole każdej ściany jest mniejsze od sumy pól trzech pozostałych ścian.*

Twierdzenie to jest odpowiednikiem nierówności trójkąta dla czworościanu. Zazwyczaj dowodzi się go poprzez rzutowanie jednego z wierzchołków na płaszczyznę zawierającą przeciwległą ścianę i wykorzystanie faktu, że pole rzutu ściany nie przekracza pola ściany. Wykorzystanie najmocniejszego twierdzenia stereometrii pozwala przedstawić znacznie prostsze i zgrabniejsze uzasadnienie.

**Dowód.** Należy wykazać, że w czworościanie  $ABCD$  pole ściany  $ABC$  jest mniejsze od sumy pól trzech pozostałych ścian. Oznaczmy przez  $P, Q, R, S$  punkty styczności sfery wpisanej w czworościanie  $ABCD$  odpowiednio ze ścianami  $BCD, CDA, DAB, ABC$  (rys. 3). Z twierdzenia 1 wynika, że trójkąty  $ABS$  i  $ABR$  są przystające, a więc mają równe pola. Podobnie dowodzimy równości pól

$$[BCS] = [BCP] \quad \text{oraz} \quad [ACS] = [ACQ].$$

Ponieważ punkty  $P, Q, R$  leżą wewnątrz ścian czworościanu, to zachodzą nierówności

$$[ABR] < [ABD], \quad [BCP] < [BCD], \quad [ACQ] < [ACD].$$

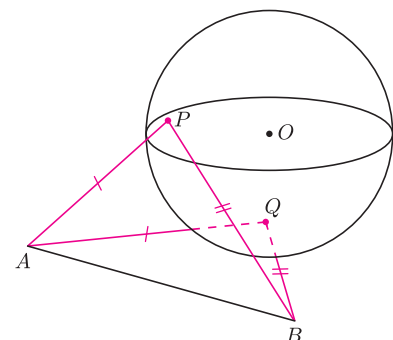
Zatem

$$[ABC] = [ABS] + [BCS] + [ACS] = [ABR] + [BCP] + [ACQ] < [ABD] + [BCD] + [ACD].$$

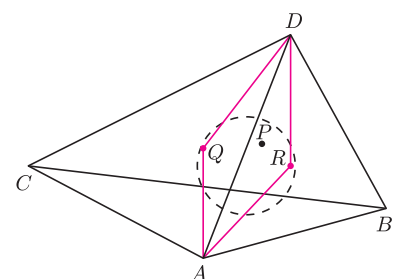
Na koniec jedno zadanie dla Czytelników.

*Dany jest czworościan  $ABCD$ , w którym  $AB = CD$ . Ponadto suma pól ścian  $ABC$  i  $ABD$  jest równa sumie pól ścian  $BCD$  i  $ACD$ . Dowieść, że  $AC = BD$  lub  $AD = BC$ .*

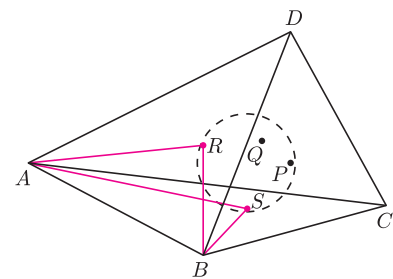
Michał KIEZA



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

### Tłumaczenia z leibnizowskiego na klasyczny.

$ab = bc$	$b$ jest dwusieczną kąta $ac$ , lub gdy są równoległe, ich linią środkową
$ab = cd$	proste $a, b, c, d$ mają wspólny punkt (kierunek) i $ab$ wyznaczają ten sam kąt (wektor), co $cd$
$Ab = bC$	gdy $A \neq C$ , prosta $b$ jest symetralną $AC$ , a gdy $A = C$ , dowolną prostą przechodzącą przez $A$
$Ab = dC$	$A, C$ są na wspólnej prostopadłej prostych $b, d$ , oba między tymi prostymi lub oba na zewnątrz; $A$ w tej samej odległości od $b$ , co $C$ od $d$
$aB = Bc$	proste są równoległe i gdy $a \neq c$ , punkt $B$ leży na ich linii środkowej, a gdy $a = c$ , leży na $a$
$AB = BC$	$B$ jest środkiem $AC$

## Medialna ściema z ciemną materią

Na początku marca został ogłoszony wynik poszukiwania przez eksperyment AMS-02 energetycznych pozytonów w promieniowaniu kosmicznym. Jego detektor znajduje się na Międzynarodowej Stacji Kosmicznej. Głównym punktem ogłoszenia było szeroko reklamowane seminarium amerykańskiego noblisty Samuela Tinga, rzecznika zespołu badawczego AMS (*Alpha Magnetic Spectrometer*), które odbyło się w ośrodku CERN. Był to centralny punkt medialnej bańki o rzekomym odkrywaniu ciemnej materii przez ten eksperyment. Światowe media natychmiast radośnie skonsumowały podstawiony pasztet.

Natomiast adekwatną reakcję można było znaleźć (również natychmiast) w blogach naukowych [1, 2].

Odpowiednia informacja po polsku mogłaby brzmieć następująco: radio Erewań podaje, że pierwszy sekretarz AMS Ting jest w trakcie odkrywania ciemnej materii.

Wyniki AMS są, prawda, ciekawe. Potwierdzają odkryte pięć lat temu przez (również kosmiczny) eksperyment PAMELA odwrócenie trendu zależności częstości występowania pozytonów wśród rejestrowanych pozytonów i elektronów od energii tych cząstek. Zamiast kontynuacji spadku ułamek ten w miarę równomiernie rośnie od kilku procent dla energii kilku GeV do kilkunastu procent dla stu i więcej GeV (pisaliśmy o tym w aktualnościach w styczniu 2009 roku oraz w artykule dostępnym przez  $\delta\mu$  [3]). AMS mierzy to samo, ale z dużo lepszą dokładnością oraz w większym zakresie energii (ostatni punkt pomiarowy odpowiada średniej energii 300 GeV).

Co to jednak ma wspólnego z ciemną materią, która, o ile się orientujemy (według jej efektów grawitacyjnych), odpowiada około jednej czwartej gęstości energii Wszechświata? (Zwykłej materii jest pięć razy mniej; o astronomicznych aspektach badania ciemnej materii piszemy w sierpniowym *Prosto z nieba*). Według jednej z dominujących hipotez ciemna materia składa się z nieznanymi, masywnymi, słabo oddziałujących cząstek (ang. *WIMP, Weakly Interacting Massive Particle*). Według najbardziej popularnej wersji tej hipotezy cząstki te mogą parami anihilować (bo są swoimi własnymi antycząstkami jak np. fotony). Najintensywniej tam, gdzie ich gęstość jest największa, czyli np. w centrach galaktyk. W wyniku anihilacji pojawiałyby się zwykle cząstki o dużych energiach, jednak nie większych niż energia odpowiadająca masie WIMP-ów. Wyniki eksperymentu PAMELA spotkały się z falą zainteresowania, bo nadwyżka energetycznych pozytonów mogłaby się brać właśnie z takiej anihilacji. I właśnie ta fala pomogła „wynieść AMS na orbitę”. Pięć lat to jednak wystarczająco długi czas, żeby zastanowić się nad mocą dowodową takiej nadwyżki w poszlakowym procesie poszukiwania większej części materii Wszechświata.

Opinia specjalistów jest następująca. Po pierwsze, trzeba zobaczyć w miarę wyraźny koniec wzrostu ułamka pozytonów, powiązany z masą WIMP-ów. Nawet wtedy

byłaby to jednak tylko informacja niesprzeczna z hipotezą anihilacji WIMP-ów. W dodatku trudno znaleźć model, za pomocą którego obserwacja taka mogłaby być wyjaśniona w sposób ilościowy.

Oczekiwanego ponownego spadku w opublikowanym spektrum nie widać (tempo wzrostu zdaje się tylko wyhamowywać). Inaczej mówiąc, nasze rozumienie natury ciemnej materii nie drgnęło. Chyba że uznać za pewien postęp rosnące przekonanie o słabej użyteczności badania promieniowania kosmicznego do tego celu.

Bardziej interesujące wydaje się wykrywanie innych produktów anihilacji. Mogą to być np. neutrino mionowe przylatujące ze Słońca. Tu najlepsze ograniczenia pochodzą z eksperymentu IceCube (którego detektor jest zinstrumentowanym kilometrem sześciennym lodu na biegunie południowym) [4].

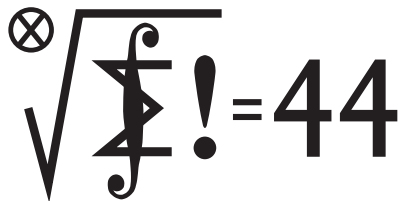
Jeżeli WIMP-y anihilują, np. w parę proton-antypoton, to istnieje stowarzyszony proces rozpraszania WIMP-ów na protonach. Poszukiwania cząstek ciemnej materii za pomocą takiego procesu nazywane jest bezpośrednim. Jest ono uzasadnione, bo uważamy, że Droga Mleczna jest zanurzona w halo takich cząstek, które mają określoną średnią prędkość względem Układu Słonecznego. Zespołów badawczych, które się czymś takim zajmują, jest kilkadziesiąt. Głównym rogowającym jest XENON 100, który wykorzystuje około 100 kg tego szlachetnego gazu w bardzo ciekawy sposób. Aktywna część detektora jest nie tylko absorberem, ale również ośrodkiem, w którym powstaje wykrywalne promieniowanie Czerenkowa oraz komorą projekcji czasowej służącą do odczytania jonizacji. Obydwa efekty są wywoływane przez potracane jądra ksenonu. Ponieważ nie udało się znaleźć sygnału ponad tłem, więc ustanowione zostały najlepsze ograniczenia na przekrój czynny (prawdopodobieństwo) oddziaływania WIMP-ów z materią. W kwietniu pałeczkę przejął eksperyment LUX, którego detektor ma kilka razy większą aktywną masę, a za jakiś czas odda prowadzenie kolejnej wersji eksperymentu XENON (wyposażonej w dwie tony Xe). Jeżeli eksperymenty te nie wykryją WIMP-ów, to znacząca część ulubionych modeli ciemnej materii zostanie odesłana do lamusa przed końcem dekady.

Wtedy pozostaną mniej przekonujące wersje ulubionych scenariuszy, podważanie kosmologicznych i astronomicznych dowodów na istnienie ciemnej materii oraz możliwość, że tworzące ją cząstki oddziałują (i anihilują) jeszcze słabiej. Na pośrednie odkrycie niektórych z takich scenariuszy, przy pewnym poziomie współpracy ze strony Natury, można liczyć w LHC.

Piotr ZALEWSKI

- [1] *Resonaances* (Adam Falkowski), [resonaances.blogspot.com/2013/04/first-results-of-ams-02.html](http://resonaances.blogspot.com/2013/04/first-results-of-ams-02.html).
- [2] *Of Particular Significance* (Matt Strassler), [profmattstrassler.com/2013/04/03/ams-presents-some-first-results](http://profmattstrassler.com/2013/04/03/ams-presents-some-first-results).
- [3] Aleksandra Drozd, [www.deltami.edu.pl/temat/fizyka/struktura\\_materii/2011/10/31/Ciemna\\_materia\\_ciekawe\\_czasy](http://www.deltami.edu.pl/temat/fizyka/struktura_materii/2011/10/31/Ciemna_materia_ciekawe_czasy).
- [4] IceCube Collaboration, *Search for dark matter annihilations in the Sun with the 79-string IceCube detector*, arXiv:1212.4097.

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 649 ( $WT = 1,03$ ) i 650 ( $WT = 2,51$ ) z numeru 11/2012

Janusz Olszewski	Warszawa	45,43
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Wojciech Nadara	Warszawa	40,67
Paweł Łabędzki	Kielce	37,95
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Witold Bednarek	Łódź	36,54
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	33,44

Kto ciekawy, ile to jest 14 razy 44, niech wie: 616. I do tego trzeba oczywiście doliczyć bieżącą nadwyżkę w wysokości 1,43 punktu. No, panie Januszu – tak dalej!

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z matematyki nr 663, 664

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**663.** Czy istnieje nieskończony, ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych  $k_0, k_1, k_2, \dots$  taki, że dla każdego  $i \geq 0$  iloczyn  $k_{3i}k_{3i+1}k_{3i+2}$  jest podzielny przez każdą z liczb  $k_{3i} + 1, k_{3i+1} + 1, k_{3i+2} + 1$ ?

**664.** Dowieść, że jeśli liczba rzeczywista  $x$  spełnia równanie  $x^2 - x[x] - 1 = 0$ , to każda potęga liczby  $x$  o wykładniku dodatnim nieparzystym także spełnia to równanie.

Zadanie 664 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

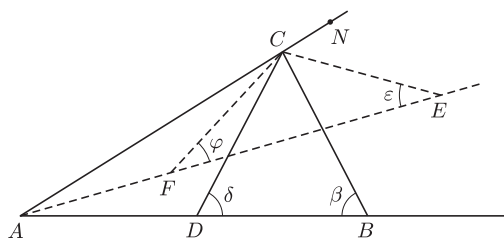
### Rozwiązania zadań z numeru 2/2013

Przypominamy treść zadań:

**655.** Punkt  $D$  leży na boku  $AB$  trójkąta  $ABC$ . Punkt  $E$  jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku  $BC$  oraz przedłużeń boków  $AB, AC$ . Punkt  $F$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ACD$ . Dowieść, że jeżeli trójkąt  $CEF$  jest równoramienny, to także trójkąt  $CBD$  jest równoramienny.

**656.** Dana jest liczba naturalna  $n \geq 1$ . Niech  $M_n$  będzie liczbą naturalną, której zapis dziesiętny składa się z  $n$  dziewiątek:  $M_n = 99 \dots 9 = 10^n - 1$ . Znaleźć najmniejszą jej wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym cyfra 9 nie występuje.

**655.** Oznaczmy miary kątów trójkąta  $BCD$  przy wierzchołkach  $B$  i  $D$  przez  $\beta$  i  $\delta$ , a miary kątów trójkąta  $CEF$  przy wierzchołkach  $E$  i  $F$  przez  $\varepsilon$  i  $\varphi$ .



Kąty  $\varphi$  i  $\delta$ , jako kąty zewnętrzne trójkątów  $CAF$  i  $CAD$ , są związane zależnością

$$\varphi = |\sphericalangle FAC| + |\sphericalangle FCA| = \frac{|\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle DCA|}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Niech  $N$  będzie dowolnym punktem na przedłużeniu boku  $AC$  poza wierzchołek  $C$ . Kąty  $ECN$  i  $BCN$ , jako kąty zewnętrzne trójkątów  $ECA$  i  $BCA$ , wyrażają się jako sumy:  $|\sphericalangle ECN| = \varepsilon + |\sphericalangle EAC|$ ,  $|\sphericalangle BCN| = \beta + |\sphericalangle BAC|$ . Tak więc

$$\varepsilon = |\sphericalangle ECN| - |\sphericalangle EAC| = \frac{|\sphericalangle BCN| - |\sphericalangle BAC|}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Stąd  $|\sphericalangle ECF| = 180^\circ - (\varepsilon + \varphi) = 180^\circ - (\beta + \delta)/2 > 90^\circ$ . Zatem jeśli trójkąt  $CEF$ , z kątem rozwartym przy wierzchołku  $C$ , jest równoramienny, to  $\varepsilon = \varphi$ . Z uzyskanych wcześniej równości dostajemy wówczas  $\beta = \delta$ , czyli równoramiennosc trójkąta  $CBD$ .

**656.** Eksperymenty z niewielkimi wartościami  $n$  pozwalają zgadnąć, że szukaną wielokrotnością liczby  $M_n$  jest iloczyn  $K_n \cdot M_n$ , gdzie

$$K_n = \underbrace{11 \dots 1}_{n-1} 2 = \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10^n + 8}{9}.$$

Rzeczywiście, iloczyn  $K_n \cdot M_n$  nie ma dziewiątki w zapisie dziesiętnym:

$$K_n \cdot M_n = \frac{10^n + 8}{9} \cdot (10^n - 1) = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{88 \dots 8}_n.$$

Należy teraz wykazać, że dziewiątka występuje w każdym z iloczynów  $H \cdot M_n$ , gdy  $H = 1, 2, \dots, K_n - 1$ .

Niech  $H$  będzie liczbą  $t$ -cyfrową:  $10^{t-1} \leq H < 10^t$ ;  $t \leq n$ . Bierzymy iloczyn  $H \cdot M_n$ , skreślamy jego końcowe  $t$  cyfr i dostajemy liczbę

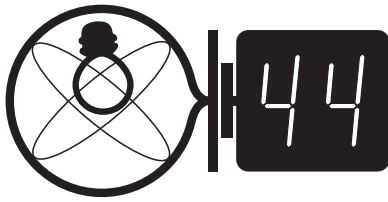
$$\left\lfloor \frac{H \cdot M_n}{10^t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{H \cdot (10^n - 1)}{10^t} \right\rfloor = \left\lfloor H \cdot 10^{n-t} - \frac{H}{10^t} \right\rfloor = H \cdot 10^{n-t} - 1.$$

Jeżeli  $t < n$ , uzyskana liczba ma dziewiątkę na końcu; również wtedy, gdy  $t = n$ , zaś  $H$  kończy się zerem. To znaczy, że w tych przypadkach iloczyn  $H \cdot M_n$  ma dziewiątkę w rzędzie  $10^t$ .

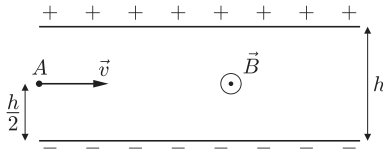
Pamiętając, że rozważamy  $H < K_n$ , pozostaje rozpatrzyć sytuację, gdy  $t = n$ , przy czym albo  $H = K_n - 1 = 11 \dots 1$  (wówczas  $H \cdot M_n$  ma dziewiątkę na końcu), albo  $H$  ma w zapisie dziesiętnym co najmniej jedno zero, ale nie na pozycji końcowej. Ma więc postać  $H = A0B$ , gdzie zero rozdziela dwie niepuste grupy cyfr. Przyjmijmy, że  $B$  jest grupą  $k$ -cyfrową; oczywiście  $k < n$ . W myśl rozpatrzonego już przypadku, iloczyn  $B \cdot M_n$  ma dziewiątkę w rzędzie  $10^k$ , czyli właśnie na tej pozycji, na której  $H$  ma zero. Ta dziewiątka pozostanie obecna w iloczynie  $H \cdot M_n$ .

Zatem, istotnie,  $K_n \cdot M_n$  jest najmniejszą wielokrotnością liczby  $M_n$  bez dziewiątki w zapisie dziesiętnym.

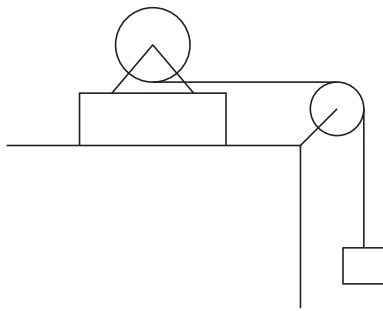
# Klub 44



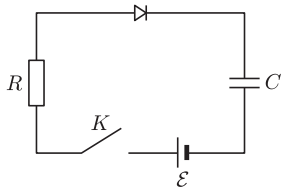
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2013



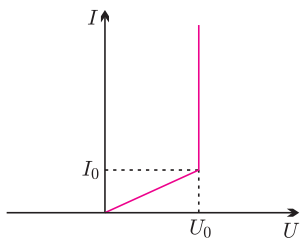
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3(a)



Rys. 3(b)

## Zadania z fizyki nr 560, 561

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**560.** Jeżeli w pewnym inercjalnym układzie odniesienia istnieje tylko pole elektryczne  $\vec{E}$ , to w układzie poruszającym się z prędkością  $\vec{v}$  względem układu pierwotnego, gdy możemy zaniedbać efekty relatywistyczne, istnieje również pole magnetyczne  $\vec{B}' = -(\vec{v} \times \vec{E})/c^2$ , gdzie  $c$  jest prędkością światła. Sprawdź prawdziwość tego stwierdzenia na przykładzie pola od ładunku punktowego, rozważanego w obu układach.

**561.** Kondensator płaski umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$  (rys. 1). Napięcie między okładkami kondensatora wynosi  $U$ , odległość między okładkami  $h$ . Z punktu  $A$  wylatuje elektron prostopadle do linii pola magnetycznego. Jaki warunek musi spełniać prędkość elektronu, żeby przeleciał on przez kondensator bez kontaktu z jego okładkami? Siły ciężkości nie uwzględniamy, efekty relatywistyczne możemy zaniedbać.

### Rozwiązania zadań z numeru 2/2013

Przypominamy treść zadań:

**552.** Do podstawki leżącej na stole przymocowany jest pełny walec o promieniu  $R$ , który może swobodnie obracać się wokół własnej osi. Do końca nici nawiniętej na walec i przerzuconej przez nieruchomy bloczek, jak na rysunku 2, przymocowano ciężarek. Masy podstawki, walca i ciężarka są jednakowe. Ile obrotów wykona walec w czasie  $t$ ? W chwili początkowej układ spoczywa. Tarcie można zaniedbać.

**553.** Ile ciepła wydzieli się na oporze  $R$  w obwodzie przedstawionym na rysunku 3(a) po zamknięciu klucza? W chwili początkowej kondensator o pojemności  $C$  nie jest naładowany. Siła elektromotoryczna źródła prądu wynosi  $\mathcal{E}$ , opór wewnętrzny źródła jest zaniedbywalny. Wyidealizowana charakterystyka prądowo-napięciowa diody przedstawiona jest na rysunku 3(b).

**552.** Oznaczmy masy ciężarka, podstawki i walca przez  $m$ . Równanie ruchu ciężarka ma postać  $ma = mg - N$ , gdzie  $a$  jest jego przyspieszeniem, a  $N$  siłą naprężenia nici.  $N$  jest jedyną siłą działającą w kierunku poziomym na układ podstawki i walca, zatem oznaczając przez  $a_1$  przyspieszenie ruchu postępowego tego układu, możemy napisać:  $2ma_1 = N$ . Moment bezwładności pełnego walca względem jego osi wynosi  $I = mR^2/2$ , a równanie ruchu obrotowego względem tej osi ma postać  $I\epsilon = NR$ , gdzie  $\epsilon$  jest przyspieszeniem kątowym. Przyspieszenie względem Ziemi najniższej położonego punktu walca równe jest przyspieszeniu ciężarka, mamy więc związek  $a = a_1 + \epsilon R$ . Eliminując z wypisanych równań przyspieszenia liniowe oraz naprężenie nici, otrzymujemy wzór na przyspieszenie kątowe walca:  $\epsilon = \frac{4g}{7R}$ . Droga kątowa walca wynosi

$$\alpha = \epsilon t^2/2, \text{ zatem szukana liczba obrotów to } n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{gt^2}{7\pi r}.$$

**553.** Załóżmy, że natężenie prądu w obwodzie po zamknięciu klucza jest większe od  $I_0$ , czyli spełniony jest warunek  $(\epsilon - U_0)/R > I_0$ . Podczas ładowania kondensatora natężenie prądu maleje i w pewnym czasie  $t_1$ , dopóki nie osiągnie wartości  $I_0$ , napięcie na diodzie ma stałą wartość  $U_0$ . Ładunek, którym naładuje się w tym czasie kondensator, wynosi  $Q_1 = c(\epsilon - RI_0 - U_0)$ . Zgodnie z zasadą zachowania energii:  $\epsilon Q_1 = U_0 + \frac{Q_1^2}{2c} + W_{1R}$ , gdzie  $W_{1R}$  jest ciepłem wydzielonym na oporze  $R$  w czasie  $t_1$ . W czasie  $t_2$ , gdy natężenie prądu w obwodzie jest mniejsze niż  $I_0$  i maleje do zera, napięcie na diodzie maleje liniowo z natężeniem prądu, czyli jej opór  $r = U_0/I_0$  jest stały. Ładunek, który przepływa w tym czasie w obwodzie, wynosi  $\Delta Q = Q_2 - Q_1$ , gdzie końcowy ładunek na kondensatorze to  $Q_2 = c\epsilon$ . Energia wydzielona w tym czasie w obwodzie równa jest pracy źródła i wynosi  $\epsilon \Delta Q = \frac{Q_2^2}{2c} - \frac{Q_1^2}{2c} + W_{2R} + W_r$ , gdzie  $w_r$  jest ciepłem wydzielonym na diodzie, a  $w_{2R}$  ciepłem wydzielonym na oporze  $R$  w czasie  $t_2$ . Ponieważ dioda i opornik są połączone szeregowo i w każdej chwili płynie przez nie prąd o tym samym natężeniu, zachodzi związek  $W_{2R}/W_r = R/r$ . Całkowite ciepło wydzielone na oporze  $R$  w czasie  $t_1 + t_2$  wynosi

$$W_{1R} + W_{2R} = \frac{1}{2} \left( c((\epsilon - U_0)^2 - (I_0 R)^2) + \frac{Rc}{R+r} (U_0 + I_0 R)^2 \right).$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 546 ( $WT = 1,77$ ), 547 ( $WT = 2,46$ ) 548 ( $WT = 2,09$ ) i 549 ( $WT = 1$ ) z numerów 11 i 12/2012

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	43,27
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,35
Tomasz Rudny	Warszawa	35,20
Krzysztof Magiera	Łosów	32,79
Andrzej Idzik	Bolesławiec	31,81



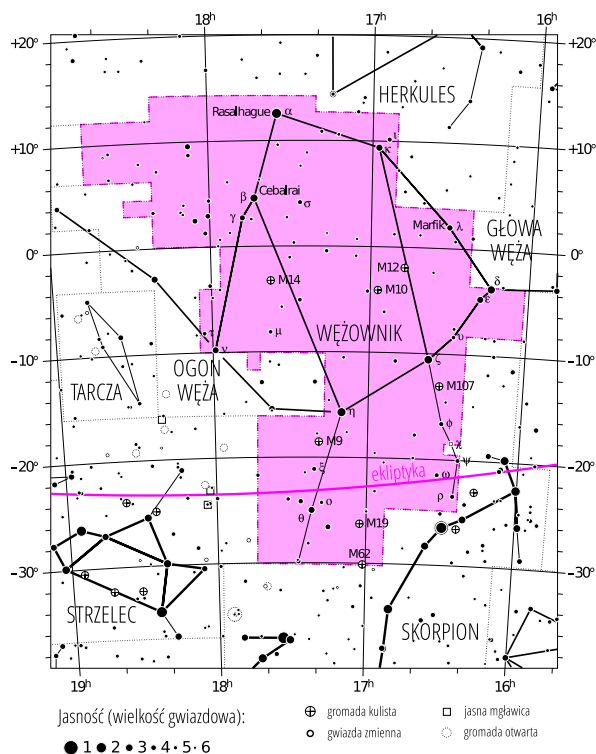


## Prosto z nieba: Dziura w chmurach

Jak zapewne wszystkie galaktyki spiralne, także i nasza Droga Mleczna ma w centrum ogromną czarną dziurę. Jej masę szacuje się na około 4,3 mln  $M_{\odot}$ . Ustalono to, analizując orbity gwiazd, które znalazły się dostatecznie blisko centrum przyciągania – szczęśliwie dla ziemskich obserwatorów, a często niezbyt fortunnie dla nich samych, bowiem przebywanie w okolicy horyzontu czarnej dziury może skończyć się rozerwaniem przez siły pływowe. Rozmiar czarnej dziury jest proporcjonalny do jej masy:  $R = GM/c^2$ , co w przypadku „naszej” czarnej dziury, zwanej Sgr A\*, wynosi około 0,05 jednostki astronomicznej (porównywalny jest zatem z orbitą Merkurego), dlatego bezpośrednie obserwacje z Układu Słonecznego, położonego w odległości 30 tys. lat świetlnych od niej, są pewnym wyzwaniem.

Prawdziwy rozmiar horyzontu zależy również od tego, czy dziura obraca się, czy nie. Stwierdzenie, że „jednak się kręci”, wymaga precyzyjnego, bezpośredniego pomiaru, który wykonać można tylko poprzez obserwacje świecącego gazu znajdującego się w bezpośrednim sąsiedztwie horyzontu. W tym celu powstaje teleskop *Event Horizon* oraz interferometr GRAVITY przy VLTI (*Very Large Telescope Interferometer*). Czekać na te wyrafinowane instrumenty, astronomowie ekscytują się niespodziewaną atrakcją: ogromną chmurą gazu zbliżającą się do Sgr A\*. Chmura, która została odkryta w 2002 r. i nazwana G2, w ciągu następnego paru miesięcy przeleci w pobliżu dziury. Jeśli wierzyć symulacjom hydrodynamicznym, zostanie rozrzucona i zniekształcona przez przyciąganie grawitacyjne oraz – być może – nawet rozerwana na kawałki! Wciągany pod horyzont rozrzucony gaz będzie widoczny przez kolejnych parę lat. Liczymy na to, że obserwatorzy będą mieć szczęście i spadający blisko horyzontu gaz rozjaśni tajemnicze okolice Sgr A\*, która niechętnie zdradza swoje sekrety, ponieważ jest – przynajmniej obecnie – niezbyt aktywną czarną dziurą.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Wężownika. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

## Niebo jak własna kieszeń: Czerwiec

Rozpoczynające się lato (przesilenie letnie 21 VI o 7:04) stwarza dobrą okazję do obserwacji gwiazdozbioru Wężownika (łac. *Ophiuchus*). Wężownik jest ciekawy z wielu powodów: przede wszystkim jest jednym z *trzynastu* gwiazdozbiorów, przez które przechodzi ekliptyka (zwykle pamięta się jedynie o dwunastu znakach zodiaku) – Słońce przebywa w gwiazdozbiórze Wężownika od 29 XI do 17 XII. Wężownik zмага się z Wężem, rozdzielając ten gwiazdozbiór na dwie części – Głowę i Ogon – położone, odpowiednio, obok jasnego Wolarza i Orła. W dawnych czasach Wężowi i Wężownikowi towarzyszył Byk Poniatowskiego, gwiazdozbiór wyodrębniony przez Marcina Poczobutta-Odlanickiego, astronoma i rektora wileńskiego uniwersytetu pod koniec XVIII wieku. Wśród gwiazd Byka Poniatowskiego, które obecnie stanowią część Wężownika, znajduje się Gwiazda Barnarda: oddalony od Ziemi o zaledwie 6 lat świetlnych czerwony karzeł o jasności 9,54<sup>m</sup> i największym obecnie znanym ruchu własnym 10,3/rok. Gwiazdozbiór zawiera także wiele gromad kulistych, co jest związane z położeniem w kierunku centrum Galaktyki. Najjaśniejszą gwiazdą Wężownika jest α Ophiuchi, nazwana Rasalhague (Głowa Wężownika, 2,08<sup>m</sup>).

W czerwcu spodziewamy się Arietyd (radiant w gwiazdozbiórze Barana, maks. 7 VI), a pod koniec miesiąca – nieregularnego roju czerwcowych Bootydów (radiant w Wolarzu, maks. 28 VI). Nów Księżycy wypada 8 VI, pełnia 23 VI. Wenus (−3,33<sup>m</sup>) i Merkury (1,07<sup>m</sup>) znajdują się aktualnie w gwiazdozbiórze Bliźniąt, i są słabo widoczne przed zachodem Słońca, natomiast Mars (1,69<sup>m</sup>) pojawia się na krótko przed wschodem w Byku. W tym samym gwiazdozbiórze, bardzo blisko Słońca, jest również Jowisz (konjunkcja 19 VI). Nie zawiedzie Saturn (gwiazdozbiór Panny, 0,66<sup>m</sup>), obok którego 19 VI znajdzie się wieczorem Księżyc.

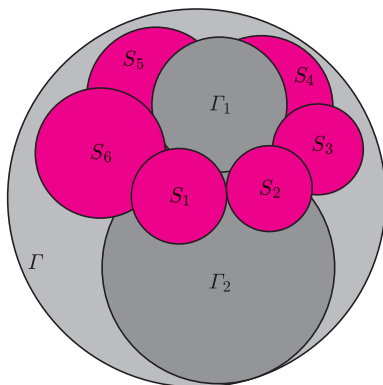
M. B.

Niektóre własności inwersji:

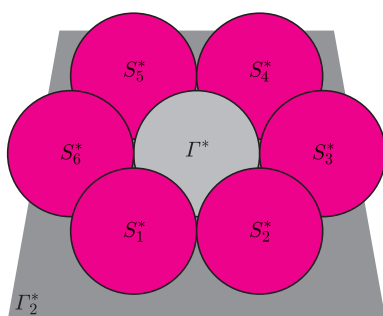
- obrazem punktu  $A^*$  jest punkt  $A$ ,
- obrazem sfery przechodzącej przez punkt  $S$  jest płaszczyzna nieprzechodząca przez  $S$  (i na odwrót),
- obrazem sfery nieprzechodzącej przez  $S$  jest sfera nieprzechodząca przez  $S$ ,
- obrazem okręgu nieprzechodzącego przez  $S$  jest okrąg nieprzechodzący przez  $S$ .

Punkt  $S$  nazywa się *środkiem inwersji*. Nie definiujemy jego obrazu  $S^*$ .

Więcej o inwersji przestrzennej znaleźć można w *Delcie* 12/2012.



Rys. 1. Szare sfery są parami styczne i każda z nich styczna jest do każdej z kolorowych sfer, tworzących łańcuch.



Rys. 2. Identyczne piłeczki na stole. Nie narysowano płaszczyzny  $\Gamma_1^*$ , równoległej do  $\Gamma_2^*$  i stycznej do sfer od góry.

Taki łańcuch okręgów nazywa się *Łańcuchem Steiner*.

Tematem poprzedniego *deltoidu* była inwersja na płaszczyźnie. Analogicznie przekształcenie zdefiniować można w przestrzeni: *obrazem punktu  $A \neq S$  w inwersji względem sfery o środku  $S$  i promieniu  $r$  jest taki punkt  $A^*$  na półprostej  $SA^{\rightarrow}$ , że  $SA \cdot SA^* = r^2$* . Na marginesie podano niektóre własności inwersji w przestrzeni.

**Zadanie 1.** Styczne zewnętrznie sfery  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  są styczne wewnętrznie do sfery  $\Gamma$  (rys. 1). Do każdej z tych trzech sfer styczna jest każda z  $n$  sfer  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , ponadto dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sfera  $S_i$  styczna jest do sfery  $S_{i+1}$  (przy czym  $S_{n+1} = S_1$ ). Dla jakich  $n$  istnieje taki łańcuch sfer  $S_i$ ? W jaki sposób zależy to od rozmiarów i wzajemnego położenia sfer  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ ? Czy i jak zależy to od wyboru początkowej sfery  $S_1$ ?

**Rozwiązanie.** Zastosujemy inwersję względem dowolnej sfery o środku w punkcie styczności sfer  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Wówczas obrazami tych dwóch sfer, przechodzących przez środek inwersji, są płaszczyzny  $\Gamma_1^*$  i  $\Gamma_2^*$ . Płaszczyzny te są równoległe, bo jedynym wspólnym punktem sfer  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  jest środek inwersji.

Obrazem każdej z pozostałych sfer  $\Gamma, S_1, S_2, \dots, S_n$  jest sfera (bo żadna z nich nie przechodzi przez środek inwersji) styczna do  $\Gamma_1^*$  i  $\Gamma_2^*$ . Z równoległości tych płaszczyzn wynika, że wszystkie sfery  $\Gamma^*, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$  mają średnice równe odległości  $\Gamma_1^*$  od  $\Gamma_2^*$ , czyli są przystające. Ponadto wszystkie sfery  $S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$  są styczne do sfery  $\Gamma^*$  oraz dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sfera  $S_i^*$  styczna jest do sfery  $S_{i+1}^*$  (przy czym  $S_{n+1}^* = S_1^*$ ). Odpowiada to sytuacji, gdy na stole (płaszczyźnie  $\Gamma_2^*$ ) ustawiamy piłeczki, przy czym łańcuch kolejno stycznych piłeczek  $S_i^*$  otacza środkową piłeczkę  $\Gamma^*$ , stykając się także z nią (rys. 2). Skoro wszystkie piłeczki są tej samej wielkości, to taki łańcuch „domyka” się wtedy i tylko wtedy, gdy  $n = 6$ .

Stąd również w wyjściowej sytuacji (przed inwersją) łańcuch sfer  $S_i$  ma zawsze dokładnie sześć elementów i nie zależy to od rozmiarów ani położenia sfer  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ , ani też od wyboru sfery  $S_1$ . Taki łańcuch sfer nazywa się *Hexletem Soddy’ego*. □

**Uwaga.** Dzięki zastosowaniu inwersji, z wyjściowego układu sfer, zazwyczaj niesymetrycznego, uzyskujemy sytuację idealnie symetryczną: równoległe płaszczyzny, identyczne sfery w eleganckim układzie sześciu otaczających siódmą... Pozostaje pytanie, gdzie po inwersji „ukryła się” cała asymetria wyjściowej sytuacji? Otóż jest ona „zakodowana” w położeniu środka inwersji wewnątrz sfery  $\Gamma^*$ .

**Wnioski.** Po inwersji punkty styczności sfer  $S_i^*$  leżą na jednym okręgu.

Nie przechodzi on przez środek inwersji (bo środek ten jest wewnątrz sfery  $\Gamma^*$ ), stąd także w wyjściowej sytuacji punkty styczności sfer  $S_i$  leżą na jednym okręgu.

Dla każdej z płaszczyzn  $\Gamma_1^*, \Gamma_2^*$ , a także dla sfery  $\Gamma^*$ , po inwersji punkty styczności ze sferami  $S_i^*$  leżą na jednym okręgu. Stąd także przed inwersją dla każdej ze sfer  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$  jej punkty styczności ze sferami  $S_i$  są na jednym okręgu.

Po inwersji istnieją dwie sfery przechodzące przez środek inwersji oraz styczne do wszystkich sfer  $S_i^*$ . Można bowiem wyobrazić sobie, że sfera  $\Gamma^*$  to balonik, który nadmuchujemy tak, by cały czas nadal był styczny do wszystkich sfer  $S_i^*$ . W miarę jak rośnie, „wypychamy” go do góry lub do dołu. W każdym z tych dwóch wariantów istnieje dokładnie jedno położenie, przy którym nasz balonik przechodzi przez środek inwersji. Każda z takich dwóch sfer odpowiada wobec tego, w wyjściowej sytuacji, płaszczyźnie i nadal jest styczna do wszystkich sfer  $S_i$ . Istnieją zatem takie dwie płaszczyzny styczne do wszystkich sfer  $S_i$  z góry i z dołu. Ponadto, środki sfer  $S_i$  leżą wobec tego na jednej płaszczyźnie – dwusiecznej kąta dwusiecznego utworzonego przez te dwie płaszczyzny styczne do sfer.

**Zadanie 2.** Na płaszczyźnie dane są rozłączne wewnętrznie okręgi  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Do każdego z nich styczny jest każdy z  $n$  okręgów  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , ponadto dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  okrąg  $S_i$  styczny jest do okręgu  $S_{i+1}$  (przy czym  $S_{n+1} = S_1$ ). Dla jakich  $n$  istnieje taki łańcuch okręgów  $S_i$ ? W jaki sposób zależy to od rozmiarów i wzajemnego położenia okręgów  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ ? Czy i jak zależy to od wyboru początkowego okręgu  $S_1$ ?

**Wskazówka.** Dla dowolnych dwóch okręgów rozłącznych na płaszczyźnie istnieje inwersja przeprowadzająca je na okręgi współśrodkowe.