


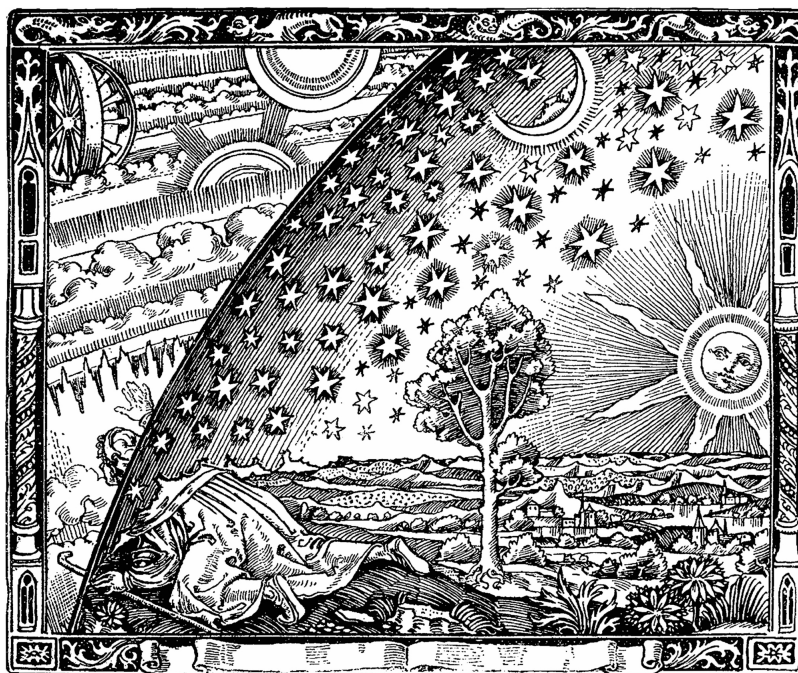


SPIS TREŚCI NUMERU 6 (493)

CK Vul – pierwsza czerwona nowa <i>Marcin Hajduk</i>	str. 1
 Zadania	str. 4
Jak rozpoznać Cylona? <i>Grzegorz Kosiorowski</i>	str. 5
Gdy matematyka naśladowuje komórki nerwowe <i>Marcin Granat</i>	str. 8
 Troje rodziców jednego dziecka <i>Magdalena Fikus</i>	str.10
Wyniki Olimpiad 2014/2015	str.11
O obrotach cząsteczek, albo jeszcze jedna furtka do mechaniki kwantowej <i>Andrzej Majhofer</i>	str.15
Informatyczny kącik olimpijski (82): Wiercenia <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.16
Grupowa eksploracja <i>Dominik Pająk</i>	str.17
Wszechświaty wyspowe <i>Agnieszka Janiuk</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Władca pierścieni	str.24
Niebo w czerwcu	str.24
 Zmieści się? <i>Joanna Jaszuńska</i>	str.25



szukamy dziury w całym

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem T_EX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

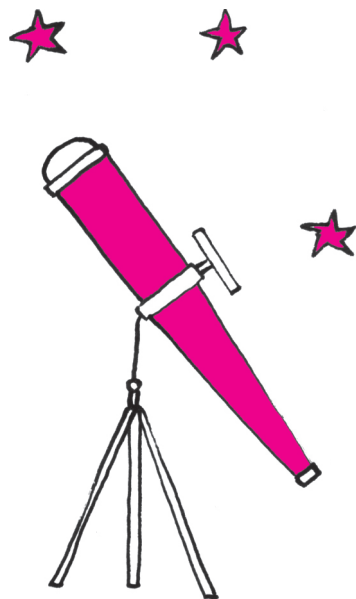
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

CK Vul – pierwsza czerwona nowa

Marcin HAJDUK*

*Centrum Astronomiczne PAN
im. Mikołaja Kopernika



CK Vul (w gwiazdozbiornie *Vulpecula – Lisiek*) jest niezwykle gwiazdą, obserwowaną w XVII wieku m.in. przez Jana Heweliusza, gdy osiągnęła maksymalną jasność 2,6 mag. Po trzech latach gwiazda zniknęła z nieboskłonu. Na podstawie XVII-wiecznych zapisków grupa naukowców wyznaczyła pozycję obiektu na niebie i w 1982 roku odnalazła pozostałości po wybuchu gwiazdy. Wciąż jednak nie udało się bezpośrednio zaobserwować samej gwiazdy. Badając pozostałości po wybuchu, można próbować dociec, jaka była przyczyna nagłego pojaśnienia w 1670 roku. Przez długi czas nie było wśród naukowców zgody co do natury tego obiektu. Obserwacje Heweliusza są co jakiś czas przywoływane i analizowane w kontekście coraz to innych modeli proponowanych dla CK Vul, w niesamowity sposób łącząc wysiłki współczesnych astronomów i dawnych obserwatorów nieba we wspólnym dążeniu do poznania prawdy. Najnowsze obserwacje pokazują, że CK Vul jest wynikiem zlania się dwóch gwiazd. Gdyby nie XVII-wieczne zapiski, obiekt nie zostałby w ogóle odkryty i być może nigdy byśmy się o nim nie dowiedzieli.

Pierwsza obserwacja gwiazdy miała miejsce 20 czerwca 1670 roku; osiągnęła ona wtedy 3 mag. Obserwatorem był Dom Anthelme z Dijon (zakon kartuzów). Kolejne obserwacje prowadzili członkowie Królewskiej Akademii Nauk w Paryżu, m.in. Giovanni Cassini. 25 lipca 1670 roku gdański astronom Jan Heweliusz odkrył ją niezależnie i jako pierwszy ogłosił pojawienie się jej na niebie (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1670, 5, 2087–2091), dostarczając jednocześnie dużo dobrej jakości obserwacji. Jesienią owego roku gwiazda osłabła na tyle, że przestała być widoczna nieuzbrojonym okiem.

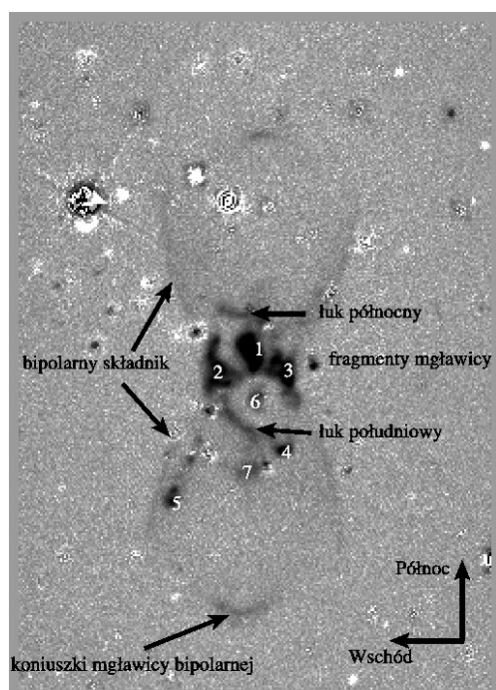
Krzywą zmian blasku CK Vul przedstawił m.in. Józef Smak w *Uranii* 6/2011.

Po pierwszym maksimum w 1670 roku kolejne, jaśniejsze maksimum gwiazdy zaobserwowano w 1671 roku i trzecie, słabsze, w 1672 roku. Dwa i pół miesiąca po ostatnim pojawieniu się gwiazda kolejny raz osłabła. 26 sierpnia 1677 roku Heweliusz spróbował użyć teleskopu do odnalezienia gwiazdy, jednak ta okazała się poza zasięgiem instrumentu.

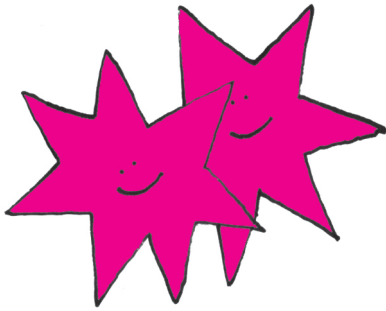
Oprócz pomiarów jasności Heweliusz przekazał nam też informacje innego rodzaju. Astronom odnotował czerwony kolor gwiazdy 30 kwietnia 1671 roku. Trzykrotnie w jego zapiskach pojawia się intrygująca uwaga, że gwiazda jest „zamglona” bądź „rozmażana”.

W katalogu gwiazd zmiennych CK Vul widnieje jako gwiazda nowa. Jest to ciasny układ podwójny dwóch gwiazd, z których mniejsza jest białym karłem. Układ jest tak ciasny, że większa gwiazda wypełnia powierzchnię Roche’a i traci materię na rzecz białego karła. Materia okresowo, co kilkadziesiąt tysięcy lat, wybuchna na powierzchni białego karła, co powoduje raptowne pojaśnienie gwiazdy. Dawne gwiazdy nowe są cennym kąskiem dla astronomów, pozwalającym poznać lepiej ich naturę i dowiedzieć się, jak zachowują się między kolejnymi wybuchami.

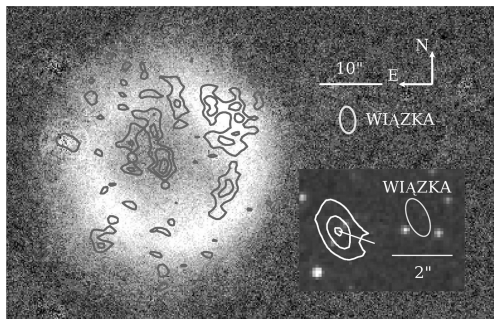
Kolejne próby odnalezienia gwiazdy podejmowali m.in. Halley, Pickering i Barnard, jednak bez rezultatu. W 1982 roku Michael Shara i Anthony Moffat (*Astrophysical Journal*, 1982, 258, 41), korzystając ze współrzędnych obiektu wyznaczonych na podstawie XVII-wiecznych obserwacji, odnaleźli mgławicę widoczną w dozwolonych i wzbronionych liniach emisyjnych, typowych dla ekstremalnie rozrzedzonych mgławic gazowych (rys. 1). CK Vul stała się jednym z koronnych dowodów na teorię hibernacji gwiazd nowych. Zgodnie z nią transfer masy ustaje w okresie między kolejnymi wybuchami nowej, a sam układ ma w tym czasie bardzo niską jasność.



Rys. 1. Obraz mgławicy CK Vul w linii H α wykonany 8-metrowym teleskopem Gemini na Hawajach. Ponumerowane lub opisane są najjaśniejsze składniki mgławicy. Dla przejrzystości gwiazdy tła zostały usunięte z rysunku (źródło: Hajduk i in., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, 432, 167).



O zjawisku bardzo późnego rozbłysku helowego autor tego artykułu pisał w numerze 2/2009 *Uranii-Postępów Astronomii*.



Rys. 2. Obiekt Sakuraga (V4334 Sgr). W tle umieszczony jest obraz optyczny, wykonany za pomocą Very Large Telescope w Chile, w którym widoczna jest stara, rozległa mgławica. Konturami oznaczone są obserwacje radiowe wykonane za pomocą instrumentu Very Large Array, w których – oprócz najjaśniejszych fragmentów starej mgławicy – widoczne jest też centralne źródło, stanowiące nowo wyrzuconą mgławicę (źródło: Hajduk i in., *Science*, 2005, 328, 231).



Rys. 3. Obraz echa świetlnego wokół gwiazdy V838 Mon, wykonany przez kosmiczny teleskop Hubble'a 8 lutego 2004 roku (źródło: Space Telescope Science Institute).

Shara i Moffat zwrócili uwagę na kilka, wyróżniających CK Vul spośród klasycznych nowych, niezwykle cichych, takich jak niezwykle krzywa blasku, wysoka masa wyrzuconej otoczki, czy też nadspodziewanie mała jasność gwiazdy centralnej w centrum mgławicy. Obserwowana prędkość ekspansji wyrzuconej otoczki rzędu kilkudziesięciu kilometrów na sekundę była dużo niższa niż prędkość ucieczki z białego karła.

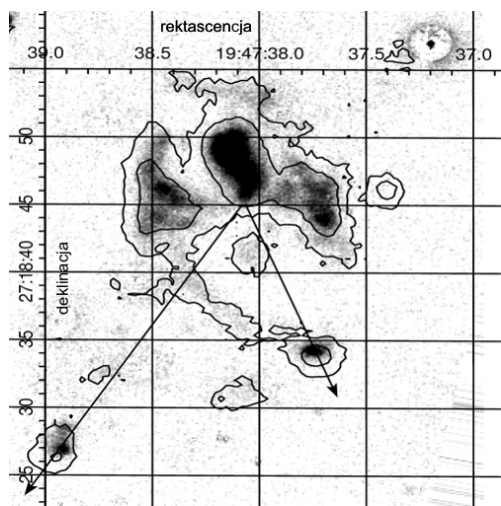
Dziesięć lat później Tim Naylor podważył interpretację CK Vul jako gwiazdy nowej: podczas obserwacji nie znalazł obiektu, który mógłby być uznany za gwiazdę nową, podając w ten sposób w wątpliwość hipotezę gwiazdy centralnej zaproponowaną przez Sharę i Moffata. Okazało się też, że mgławica nie jest tak symetryczna, jak to się wydawało z poprzednich obserwacji (bipolarny składnik z rysunku 1 nie był wówczas jeszcze odkryty). Naylor wraz ze współpracownikami oszacował też masę wyrzuconej otoczki, która zdecydowanie przewyższała typową masę wyrzuconą na skutek wybuchu gwiazdy nowej (Naylor i in., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1992, 258, 449).

Kilka lat później Thomas Harrison zaproponował dla CK Vul model bardzo późnego rozbłysku helowego (*Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 1996, 108, 1112). Bardzo późny rozbłysk helowy następuje w momencie, gdy gwiazda pozbyła się już prawie całej swojej otoczki i jest stygnącym białym karłem z cienką warstwą wodorową na powierzchni. Pod nią znajduje się dostateczna ilość helu, by doprowadzić do ostatniego rozbłysku gwiazdy. W wyniku rozbłysku biały karzeł, otoczony materią utraconą we wcześniejszym etapie czerwonego olbrzyma, jeszcze raz ekspanduje do rozmiarów czerwonego olbrzyma. Skala czasowa powrotu czerwonego olbrzyma do stadium białego karła jest bardzo niepewna. Cechą charakterystyczną takich obiektów jest nietypowy skład chemiczny ubogiej w wodór, nowo powstałej mgławicy, a także obecność „starej”, rozrzedzonej mgławicy, pozostałości po pierwszej fazie czerwonego olbrzyma.

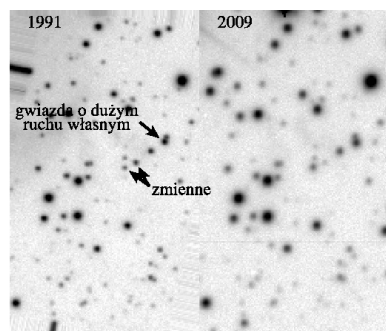
W końcu Taichi Kato zaproponował, aby rozbłysk CK Vul wytłumaczyć zlanie się dwóch gwiazd (*Astronomy and Astrophysics*, 2003, 399, 695). Kato zauważył podobieństwo krzywej blasku CK Vul z lat 1670–1672 do V838 Mon. Było to krótko po tym, jak Noam Soker i Romuald Tylenda opublikowali swój model V838 Mon, tłumaczący wybuch obiektu zlanie się dwóch gwiazd (*Astrophysical Journal*, 2003, 582, 105). V838 Mon zwana była czerwoną nową, gdyż – w odróżnieniu od zwykłych nowych – po maksimum rozbłysku następował spadek temperatury gwiazdy. Podobna interpretacja wybuchu CK Vul dodatkowo zyskałaby atrakcyjne wyjaśnienie obserwowanego zamglonego obrazu gwiazdy jako echa świetlnego (rys. 3), choć sam Kato odnosił się do tego pomysłu z rezerwą. Skale czasowe wybuchu obserwowane w V838 Mon i CK Vul bardzo się różnią; w tym pierwszym obiekcie wybuch trwał około miesiąca, a w CK Vul aż trzy lata.

Oprócz przedstawionych powyżej scenariuszy pojawiły się również w literaturze inne, mniej lub bardziej wyrafinowane modele, tłumaczące obserwowane właściwości CK Vul. Wśród nich jest m.in. bardzo późny rozbłysk helowy „wspomagany” akrecją, stanowiący kombinację wybuchu gwiazdy nowej i bardzo późnego rozbłysku helowego. Pojawiły się też sugestie, że obserwowana mgławica nie jest w ogóle powiązana z gwiazdą obserwowaną przez Heweliusza.

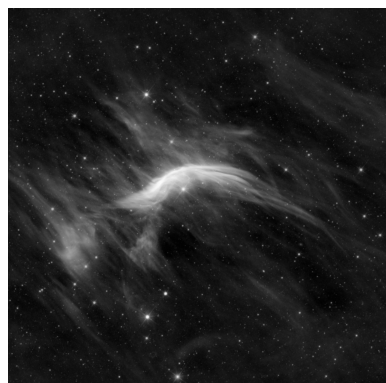
Analiza obrazów mgławicy otrzymanych w 1991 i 2004 roku wykazała jednak, że jest ona pozostałością po wybuchu w 1670 roku (Hajduk i in., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, 378, 1298). Obserwowane tempo ekspansji mgławicy było zgodne z oczekiwanym czasem



Rys. 4. Obraz mgławicy CK Vul wykonywany w filtrze H α w 1991 roku (w tle) i 2004 roku (kontury). Strzałkami pokazany jest kierunek ekspansji dwóch zwartych, oddalonych fragmentów mgławicy (oznaczonych numerami 4 i 5 na rysunku 1), otrzymany z porównania pozycji tychże fragmentów na niebie w 1991 i 2004 roku. Początek strzałek znajduje się w miejscu, gdzie nastąpił wybuch w 1670 roku. Gwiazdy tła zostały usunięte dla przejrzystości rysunku. Z pracy Hajduk i in., *MNRAS*, 2007, 378, 1298.



Rys. 5. Porównanie obrazów w paśmie R (5890–7270 Å, co odpowiada kolorowi czerwonemu) wykonanych w 1991 i 2009 roku za pomocą 4,2-metrowego teleskopu Williama Herschela w obserwatorium na Wyspach Kanaryjskich. Zaznaczone są dwie gwiazdy tła zmieniające jasność oraz jedna niezwiązana z CK Vul gwiazda tła charakteryzująca się dużym ruchem własnym (źródło: Hajduk i in., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, 432, 167).



Rys. 6. Gwiazda ζ Oph obserwowana przez podczerwony teleskop WISE (źródło: NASA).

życia mgławicy, który upłynął od obserwacji Heweliusza i jemu współczesnych. Porównanie obrazów mgławicy otrzymanych w odstępie 13 lat pozwoliło również wskazać punkt na niebie, w którym nastąpiło wyrzucenie mgławicy (centrum ekspansji), a więc i spodziewane położenie gwiazdy centralnej. Kierunek ekspansji pokazany jest strzałkami na rysunku 4 dla dwóch oddalonych fragmentów mgławicy, oznaczonych numerami 4 i 5 na rysunku 1. Centrum ekspansji mgławicy znajduje się tam, gdzie strzałki mają początek.

Po wyznaczeniu pozycji gwiazdy odpowiedzialnej za wybuch nie pozostaje nic innego, jak tylko zbadać tę gwiazdę, określić jej typ i na tej podstawie starać się zaproponować mechanizm wybuchu. Problem jednak w tym, że w centrum ekspansji mgławicy CK Vul żadna gwiazda nie jest widoczna, przynajmniej aż do granicy czułości teleskopu (około 20 mag). Najprawdopodobniej gwiazdę przesłania nam optycznie gruba otoczka pyłowa. Wiemy o jej obecności z obserwacji w innych zakresach widma (w podczerwieni i falach radiowych).

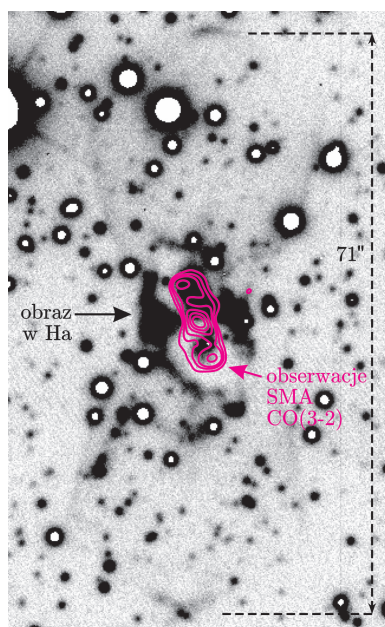
Wiemy też, że w obiekcie musi istnieć źródło, które jest w stanie jonizować obserwowaną mgławicę. Mgławica widoczna jest w wysoko wzbudzonej linii dwukrotnie zjonizowanego tlenu na długości fali 5007 Å, charakterystycznej dla mgławic planetarnych. Oznacza to,

że źródło jonizujące jest wciąż aktywne i gorące. Bez niego rekombinacja jonów tlenu zajęłaby zaledwie 20 lat i nie obserwowalibyśmy w widmie mgławicowej linii tlenu. Problem w tym, że w przypadku zlania się dwóch normalnych gwiazd spodziewamy się w wyniku dostać chłodną gwiazdę, a nie gorącą, zwarty obiekt.

W 2009 roku otrzymałem dobrej jakości obrazy w paśmie R (rys. 5) z teleskopu Williama Herschela. Pozwoliło to na odnalezienie w polu gwiazdowym CK Vul dwóch ciekawych gwiazd. Są one położone bardzo blisko siebie w płaszczyźnie nieba i jednocześnie w pobliżu centrum mgławicy CK Vul. Jedna z nich nieustannie jaśnieje od 30 lat, a druga słabnie.

Te dwie gwiazdy, wykazujące duże zmiany jasności, są również gwiazdami tła niezwiązanymi bezpośrednio z CK Vul. Dzięki nim jednak możemy dowiedzieć się ważnych rzeczy o naszym obiekcie. Najprawdopodobniej zmienność tych dwóch gwiazd tła jest spowodowana przesuwającym się niejednorodnym obłokiem pyłowo-gazowym, który można obserwować w podczerwieni. Otoczka CK Vul okazuje się więc jeszcze masywniejsza, bardziej niejednorodna i zróżnicowana, niż widać to na obrazach optycznych. Oprócz poczerwienienia, spowodowanego (poza materią międzygwiazdową) pyłem zawartym w wyrzuconym przez CK Vul obłoku, zostawia on jeszcze inny ślad w widmach znajdujących się w tle gwiazd. Mowa tu o linii litu na długości fali 6707 Å. Linia ta, lecz o dużo mniejszym natężeniu, widoczna jest m.in. w widmie gwiazdy ζ Oph, której światło w drodze na Ziemię przedziera się przez obłoki materii międzygwiazdowej (rys. 6). Tak silna absorpcja, jak obserwowana w widmach gwiazd tła CK Vul, świadczy o dużej zawartości tego pierwiastka w wyrzuconej chmurze pyłu. Lit może być jednak produkowany zarówno przez stosunkowo masywne gwiazdy na tzw. asymptotycznej gałęzi olbrzymów, jak również w wybuchach gwiazd nowych. Lit obserwowany też jest w pozostałościach po wybuchu wspomnianej wcześniej V838 Mon.

Ostatnie kilka lat przyniosło przełomowe odkrycia w badaniu gwiazd typu V838 Mon. W 2011 roku Romuald Tylanda zwrócił uwagę na krzywą blasku gwiazdy V1309 Sco, przypominającą V838 Mon. Okazało się, że zanim doszło do wybuchu, krzywa blasku tego obiektu wyglądała jak krzywa blasku układu podwójnego gwiazd ze zmniejszającym się okresem aż do momentu,



Rys. 7. Molekularna emisja CO na tle mgławicy obserwowanej optycznie w CK Vul (źródło: Kamiński i in., *Nature*, 2015, 520, 322).

w którym nastąpił wybuch. Przyniosło to ostateczny dowód na to, że wybuch V1309 Sco był wynikiem złania się gwiazd (Tylenda i in., *Astronomy and Astrophysics*, 2011, 528, 114) i rzuciło światło również na pochodzenie innych obiektów o podobnej charakterystyce. Wybuch V1309 Sco trwał jednak dużo krócej niż wybuch w CK Vul. Niemniej jednak dwa lata później Tylenda i in. (*Astronomy & Astrophysics*, 2013, 555, 16) odkryli kolejny obiekt tego typu, tym razem o skali czasowej wybuchu porównywalnej z CK Vul.

Prawdziwego przełomu w badaniu CK Vul dokonał Tomasz Kamiński. Skierował on na CK Vul instrument SMA (*Submillimeter Array*). Jest to urządzenie do badania promieniowania w zakresie submilimetrowym, w którym dobrze widać molekuly i chłodny pył. Już jedna obserwacja pozwoliła wyjaśnić wiele wątpliwości dotyczących CK Vul. Okazało się, że oprócz mgławicy jasnej optycznie w obiekcie widoczna jest też druga, młodsza mgławica molekularno-pyłowa. Mgławica ma kształt dwóch wypływów – północnego i południowego. Południowy wypływ przechodzi właśnie na tle dwóch omawianych wcześniej gwiazd, powodując ich zmienność w dziedzinie optycznej. Zderzenie nowego wypływu ze starą mgławicą powoduje jej jonizację, tak więc do wyjaśnienia obserwowanych linii emisyjnych nie jest potrzebna gorąca gwiazda w układzie. Dzięki tym badaniom odkrycie Heweliusza zyskuje jeszcze bardziej na znaczeniu, pozwalając badać, jakie są skutki złania się dwóch gwiazd, po prawie trzystu pięćdziesięciu latach od wybuchu. Takiej możliwości nie dają nam obiekty odkrywane współcześnie.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1459. Dane są punkty A, B oraz okrąg ω o środku w punkcie A . Dla punktu C należącego do okręgu ω i nienależącego do prostej AB , punkt P jest przecięciem prostej BC i dwusiecznej kąta A w trójkącie ABC . Wyznaczyć zbiór wszystkich otrzymanych w ten sposób punktów P , gdy C przebiega okrąg ω .

Rozwiązanie na str. 16

M 1460. Funkcja f , odwzorowująca zbiór liczb całkowitych dodatnich w siebie, jest niemalejąca i spełnia równość $f(ab) = f(a)f(b)$ dla dowolnych liczb względnie pierwszych a i b . Udowodnić, że

$$f(8)f(13) \geq (f(10))^2.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1461. Dana jest dodatnia liczba parzysta n . W turnieju, w którym bierze udział n drużyn, zostanie rozegranych $n(n-1)/2$ meczów *każdy z każdym*. Wykazać, że możliwe jest takie podzielenie rozgrywek na $n-1$ rund, by każda drużyna wystąpiła w każdej rundzie dokładnie raz.

Rozwiązanie na str. 8

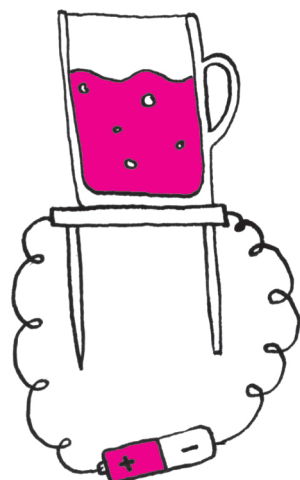
Przygotował Szymon CHARZYŃSKI

F 881. Oszacować koszt zagotowania szklanki wody (250 ml), która na początku ma 20°C , przy użyciu energii z baterii w rozmiarze AA. Dobrej jakości bateria, kosztująca około 2 zł, podając prąd 500 mA przy napięciu 1,2 V, wyczerpuje się po około godzinie. Ile razy taniej jest użyć do tego celu energii z sieci (cena 1 kWh to około 55 gr)?

Rozwiązanie na str. 9

F 882. Najniższe przełożenie, jakim dysponuje rowerzysta w swoim rowerze, składa się z zębatek o 28 ząbkach z tyłu i 22 z przodu. Masa roweru stanowi 20% masy rowerzysty, długość korby to 17,5 cm, a promień koła 32 cm. Jaki jest największy kąt nachylenia zbrocza, pod jakie rowerzysta ma szansę podjechać, używając zwykłych pedałów, bez nosków i zatrząsków? Jaki warunek powinien spełniać współczynnik tarcia statycznego μ , aby koło toczyło się po powierzchni bez poślizgu?

Rozwiązanie na str. 17



Jak rozpoznać Cylona?

Grzegorz KOSIOROWSKI*

Artykuł *Modelowanie fikcji: inwazja zombie* (Delta 3/2015) miał za zadanie przypomnieć, że zastosowania matematyki nie są ograniczone ramami świata rzeczywistego (a przynajmniej takiego, jaki za rzeczywisty w danym momencie uważamy). Dzięki uniwersalności matematyki potrafimy modelować wszystko, co tylko możemy sobie wyobrazić: w szczególności to, co powstało w umysłach twórców literatury i filmów science-fiction. Poniżej zaprezentuję przykład wykorzystania metod matematycznych (dokładniej, statystycznych) do rozwiązania problemów postawionych przed bohaterami popularnego serialu *Battlestar Galactica*.



Czy to jest Cylon? Pewnie nie, ale wizerunki Cylonów są lepiej chronione prawem autorskim. (fot. Zdzisław Pogoda)

1. Battlestar Galactica – wstępne informacje. By zrozumieć badane zagadnienie, potrzebnych będzie kilka podstawowych informacji o samym serialu i przedstawionym w nim świecie. Czterosezonowy *Battlestar Galactica* (a właściwie nowa wersja serialu o tym samym tytule z lat 70.) był emitowany w USA w latach 2003–2009 i zdobył olbrzymią popularność – zarówno wśród krytyków (czego wyrazem były najcenniejsze dla twórców seriali nagrody: Emmy i Peabody), jak i wśród publiczności, której głosom zawdzięcza drugie miejsce w rankingu najlepszych seriali science-fiction *Entertainment Weekly* oraz wysokie miejsca (w pierwszej dziesiątce) w różnych klasyfikacjach najlepszych seriali wszech czasów i wszystkich rodzajów.

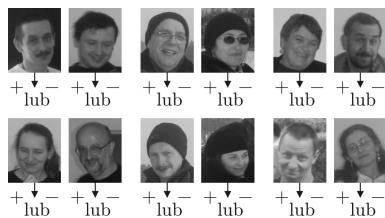
Sedno fabuły, rozgrywającej się zarówno w przestrzeni kosmicznej, jak i na rozmaitych planetach, nie wydaje się na pierwszy rzut oka zbyt oryginalne (przynajmniej jak na ten gatunek filmowy). Jest nim bunt robotów obdarzonych wysoce rozwiniętą sztuczną inteligencją (zwanych Cylonami) oraz ich walka przeciw ludziom. Serial rozpoczyna się od zniszczenia prawie całej ludzkiej cywilizacji w wyniku nagłego ataku Cylonów. Resztki ludzkości (ok. 50 000 uratowanych z katastrofy) walczą o przetrwanie i uciekają przez kosmos przed pościgiem Cylonów, poszukując nowego domu. Floty różnorodnych statków kosmicznych strzeże jedynie ocalały okręt bojowy – tytułowy *Battlestar Galactica*.

Oryginalnym pomysłem i w rezultacie źródłem napięcia fabularnego, zapewniającego serialowi powodzenie, było, między innymi, „uczłowieczenie” zbuntowanych robotów – i to w sensie dosłownym. Pierwsza, skonstruowana przez ludzi i doskonale im znana forma Cylonów przypomina wyglądem rozbudowany toster. Jednakże, dzięki ewoluującej sztucznej inteligencji, Cyloni potrafili przebudować i udoskonalić kolejne swoje kopie tak, by były praktycznie nieodróżnialne od ludzi.

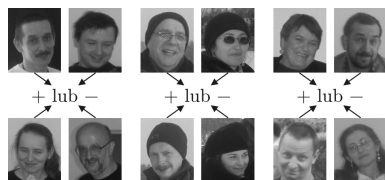
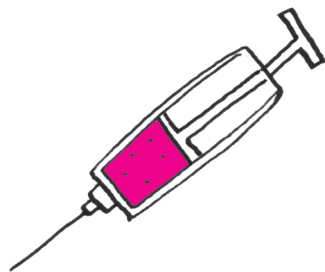
Konsekwencje tego faktu, zarówno dla fabuły, jak i atmosfery serialu są niezwykle doniosłe. Agenci Cylonów, udający ludzi, infiltrują flotę rozbitek, powodując poważne zagrożenie: szerzą fałszywe pogłoski, zdradzają położenie floty pościgowi, dokonują aktów sabotażu i zamachów na przywódców ludzkości itp. Jednocześnie, istnienie cylońskich agentów tworzy jedyną w swoim rodzaju atmosferę podejrzliwości, gdyż każdy z bohaterów serialu może tak naprawdę okazać się wrogiem, przyczyniającym się do klęski pozostałych. Paranoja ta ma dodatkową, głębszą warstwę: ukryci na pokładzie Cyloni mogą nie tylko zachowywać się, myśleć i odczuwać jak ludzie, ale nawet sądzić, że są ludźmi! Dzieje się tak, gdyż dopóki nie zostanie uruchomiony program, według którego dany Cylon działa, nie ma on świadomości swojej natury. Prawdopodobnie ta właśnie niepewność kierująca krokami bohaterów w skrajnie wymagających sytuacjach wyróżnia ten serial wśród wielu innych o podobnej tematyce.

2. Postawienie problemu – wykrywanie agentów. Przedstawiona powyżej sytuacja jest, z perspektywy ludzkiej floty, praktycznie beznadziejna. Rozwiązaniem, jak zwykle w filmach fantastyczno-naukowych, ma być technologia na służbie dziwnie zachowującego się geniusza. W serialu *Battlestar Galactica* rolę genialnego dziwaka, który ma poradzić sobie z zagrożeniem, pełni Gaius Baltar – wielka osobowość medialna, polityk i playboy, ale przede wszystkim naukowiec. Baltar jest tytułowany doktorem, choć nie wiadomo jakiej nauki – zajmuje się wszelkimi sprawami związanymi z technologią: od informatyki i fizyki po biologię

*Wydział Finansów,
Katedra Matematyki,
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie



Plan Baltara: testujemy każdą próbkę z osobna. Przez 61 lat...



Testy grupowe – pierwsza faza dla grup wielkości 4.



(choć, jak za chwilę się przekonamy, raczej nie jest to matematyk). I właśnie Gaius Baltar skonstruował tzw. detektor Cylonów, czyli urządzenie, które w próbce krwi danej osoby wykrywa substancje charakterystyczne dla Cylonów (jeśli takie istnieją). Wydawałoby się, że problem został rozwiązany, ale... Oddajmy głos samemu Baltarowi:

47 905 ludzi we flocie oznacza 47 905 próbek krwi. 11 godzin potrzeba, by przetestować jedną z nich. No cóż, to zajmie chwilę... 21 956 dni. Nieco ponad 60 lat. Jeśli założę, że od czasu do czasu muszę spać, możemy to zaokrąglić do 61. Chyba już wolę się zabić (odcinek 9, sezon 1).

Podsumowując: ludzka flota dysponuje bardzo ograniczonymi zasobami – w szczególności tylko jednym stanowiskiem laboratoryjnym i jednym naukowcem wystarczająco kompetentnym, by prowadzić testy. W rezultacie można testować jednocześnie tylko jedną próbkę. Agentów cylońskich we flocie jest niewiele, więc nie będziemy na nich trafiać zbyt często. Baltar planuje po kolei wykonać testy na każdej z próbek, co zajmie tyle czasu, że agenci cylońscy mogliby wielokrotnie zniszczyć flotę, zanim cała procedura się zakończy (i to przy założeniu, że testy mają 100% skuteczności). Nie mówiąc już o tym, że sam Baltar lubi korzystać z uroków życia i nie ma zamiaru spędzić go w laboratorium.

Z tego powodu projekt detektora Cylonów został zakończony i stosowany był tylko do sprawdzania pojedynczych, najbardziej podejrzanych osób. Tymczasem okazuje się, że gdyby Gaius Baltar był lepszym statystykiem (lub miał jakiegoś statystyka do pomocy), mógłby znacząco poprawić oczekiwany czas trwania projektu, zmniejszając go do rozsądnych rozmiarów.

Rozwiązanie problemu Baltara znaleźć możemy w pracy *Human or Cylon? Group testing on Battlestar Galactica* Christophera R. Bildera, statystyka z Uniwersytetu Nebraska w Lincoln. Opiera się ono na zastosowaniu tzw. **testów grupowych**.

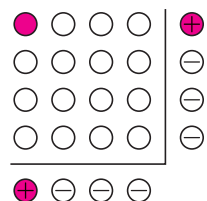
3. Testy grupowe. Pomysł jest bardzo prosty: jeśli przewidujemy, że Cylonów infiltrujących flotę jest stosunkowo niewiele (a jeśli jest inaczej, to ludzkość i tak może się w zasadzie poddać), to możemy oszczędzić wiele czasu, łącząc „podejrzanych” w grupy i zlewając część próbki krwi każdego członka grupy do jednej, wspólnej próbki. Teraz testujemy każdą z tych grup z osobna. Jeśli taki test da wynik negatywny (tj. brak oznak „cyloństwa”), wiemy, że w danej grupie nie ma Cylona i nie musimy testować każdego członka grupy z osobna (jeśli populację podzieliliśmy na grupy n -osobowe, to na każdym takim teście oszczędziliśmy sobie $n - 1$ testów). Jeśli zaś w jakiejś grupie wynik jest pozytywny, korzystając z niewykorzystanych reszt próbek, testujemy wszystkich członków danej grupy według wcześniejszego planu. Co prawda w tym drugim przypadku wykonujemy jeden nadmiarowy test, ale w sumie i tak to podejście będzie korzystne, gdyż większość wyników będzie negatywnych (z założenia o niewielkiej liczbie Cylonów).

Pomysł ten nie jest w zastosowaniach matematyki niczym nowym. Po raz pierwszy testy grupowe zostały zaproponowane i zastosowane przez Roberta Dorfmana w 1943 r. do badania amerykańskich żołnierzy na frontach II wojny światowej pod kątem chorób zakaźnych. Do dziś metoda jest używana przez Czerwony Krzyż do sprawdzania, czy krew pobrana od krwiodawców nie jest zakażona np. wirusowym zapaleniem wątroby, czy wirusem HIV – wykorzystuje się testowanie grupowe na grupach 16-próbkowych. W ten sposób sam Amerykański Czerwony Krzyż bada 6 milionów próbek rocznie (choć, trzeba przyznać, ma do tego znacznie lepsze warunki niż Baltar). Testowanie grupowe stosuje się też w weterynarii (wykrywanie zakażonych zwierząt podczas epidemii) i tworzeniu lekarstw (eksperymentalne wykrywanie substancji czynnych).

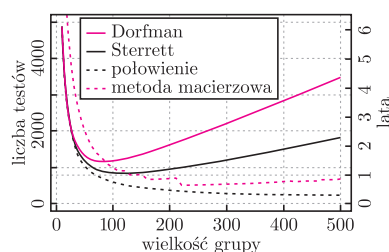
W oczy rzuca się to, że metodę Dorfmana dość łatwo można ulepszyć, zwłaszcza jeśli chodzi o drugą fazę: testy indywidualne. Pierwsza taka poprawka pochodzi od Andrew Sterretta (1957 r.). W grupie, która otrzymała wynik pozytywny, badamy próbki tylko do momentu, gdy otrzymamy wynik pozytywny. Gdy tak się stanie, resztę tej grupy znów testujemy „zbiorowo”, co oszczędza nam znowu trochę testów, o ile otrzymamy wynik negatywny, tj. w grupie był tylko jeden Cylon (znów jest to dość prawdopodobne, ze względu na „rzadkość” Cylonów).



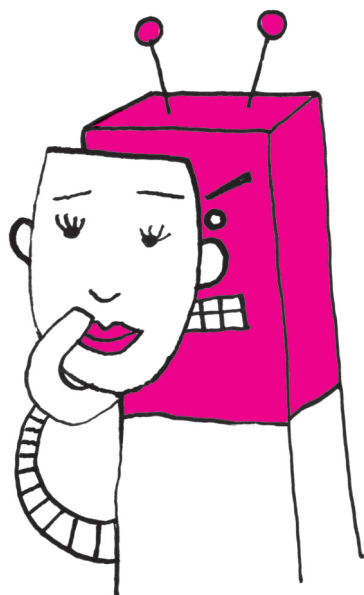
Metoda Sterretta – idea: jeśli przetestujemy najpierw osoby z górnego rzędu, otrzymamy wynik pozytywny u osoby po prawej. Wtedy osoby z dolnego rzędu możemy przetestować grupowo, co zmniejszy o jeden liczbę koniecznych testów.



Metoda macierzowa: na czerwono zaznaczone wiersz i kolumna, których testy dały wynik pozytywny, oraz wskazana przez te testy próbka.



Wykres oczekiwanej liczby koniecznych do wykonania testów w zależności od wyboru wielkości grup testowych.



Literatura: praca Christophera R. Bildera *Human or Cylon? Group testing on Battlestar Galactica*, *Chance* 22 (2009), no. 3, 46–50.

Jeszcze lepsze wyniki uzyskali Eugene Litvak, Xin Tu i Marcello Pagano w 1994 roku. Zaproponowali oni tzw. metodę połowienia (*halving*). W każdym kroku grupę „pozytywną” dzielimy na dwie, mniej więcej równe części i każdą z tych części testujemy grupowo, a następnie wybieramy kolejną, mniejszą grupę „pozytywną”, aż dojdziemy do jednej osoby. Na przykład, jeśli mamy grupę 8 próbek, które dają razem pozytywny wynik badania, dzielimy ją na dwie czwórki i je testujemy. Następnie wybieramy czwórkę, która dała wynik pozytywny, dzielimy ją na dwie dwójki i testujemy te dwójki, aż wreszcie dwójkę, która da wynik pozytywny, testujemy indywidualnie. Wartość oczekiwana liczby prób koniecznych do znalezienia wszystkich pozytywnych próbek w tym przypadku jest znacznie mniejsza niż w metodzie Sterretta, nie mówiąc o metodzie Dorfmana.

Istnieją również metody testowania grupowego, które nie opierają się na prostym podziale na grupy i są mniej więcej równie efektywne, jak wymienione wcześniej. Wyróżnia się spośród nich metoda macierzowa, opracowana przez Ravego Phatarfoda i Aidana Sudbury’ego w 1994 roku. Próbkę układamy w postaci dużej tablicy i grupowo testujemy wszystkie jej wiersze oraz wszystkie jej kolumny. Przecięcia wierszy i kolumn, które dały wyniki pozytywne, wskazują próbki „podejrzane”. Wystarczy je przetestować indywidualnie, by znaleźć te, o które chodziło.

4. Testy grupowe a wykrywanie Cylonów. Czy testy grupowe faktycznie pomogłyby Baltarowi w wykryciu Cylonów? Pamiętajmy, że opłaca się je stosować tylko w przypadku, gdy liczba próbek pozytywnych w stosunku do całej populacji jest niewielka. Z dalszych odcinków serialu można się dowiedzieć, że w momencie podjęcia badań przez Baltara we flocie przebywało 7 cylońskich agentów, a zatem ten stosunek wynosił $p = 7/47905 \approx 0,0001461$. Z kolei z danych Amerykańskiego Czerwonego Krzyża wynika, że częstość występowania próbek krwi zarażonych wirusem HIV wynosi 0,0000975, czyli jest mniej więcej taka sama. Na potrzeby Czerwonego Krzyża testy grupowe były idealne, więc i doktorowi Baltarowi mogłyby się przydać.

Szczegółowe oszacowania skuteczności poszczególnych metod można odczytać z wykresu na marginesie.

Jak widać, najlepsze wyniki daje metoda połowienia: tylko 221 testów (101 dni) dla grup wielkości 500 i zaledwie 172 testy (ok. 79 dni) dla grup wielkości 4080. Najprymitywniejsza metoda Dorfmana osiąga swoje optimum przy grupach wielkości 80 i wymaga wykonania 1156 testów (czyli 1,5 roku), co nadal daje istotną przewagę nad oszacowanym przez Baltara czasem 61 lat.

Oczywiście, rzeczywistość może postawić nam dodatkowe wymagania, nawet jeśli założymy, że Baltar jest geniuszem, jego urządzenie nigdy nie zawodzi i nie ma potrzeby powtórnego testowania próbek na obecność błędów. Po pierwsze – wykresy powyższe zostały utworzone przy założeniu istnienia siedmiu Cylonów we flocie. W istocie ta liczba nie była znana z góry, więc oszacowanie optymalnej wielkości grup testowych może być dość trudne. Po drugie – wyznaczona matematycznie optymalna wielkość grupy może być niepraktyczna w zastosowaniu. Na przykład „ślady cyloństwa” pojedynczej osoby w grupie wielkości 4080 (optymalnej dla metody połowienia) mogą być tak rozcieńczone, że praktycznie niewykrywalne przez aparaturę. Czytelnika zainteresowanego dokładnymi rozważaniami na te tematy, jak również analizą błędów pomiaru oraz możliwego odchylenia liczby testów od wartości oczekiwanej, odsyłam do oryginalnej pracy Ch.R. Bildera, gdzie te zagadnienia są poruszane.

Nam wystarczy informacja, że gdyby Baltar zastosował nawet najbardziej naiwną metodę testowania grupowego (Dorfmana), nawet dla mocno nieoptymalnej wielkości grup równej 16, to badania zajęłyby mu co najwyżej 4 lata – a więc skończyłyby je wystarczająco wcześnie, by miało to wpływ na fabułę. Jako że wśród cylońskich agentów były osoby kluczowe dla bezpieczeństwa floty, ich wykrycie mogłoby mieć daleko idące konsekwencje, przede wszystkim dla widzów: spadek napięcia wywołanego paranoją i zapewne związany z tym spadek zainteresowania serialem. Może więc tym razem niekonsultowanie badań ze statystykiem wyszło wszystkim na dobre?



Rozwiązanie zadania M 1461.

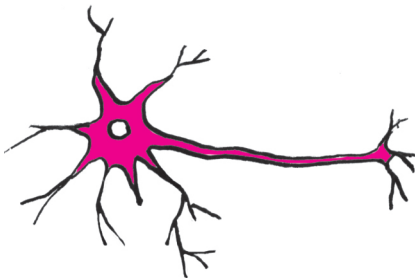
Oznaczmy drużyny przez $1, \dots, n$. Niech w i -tej rundzie (dla $i = 1, \dots, n-1$) drużyny a i b (dla $1 \leq a < b \leq n-1$) grają ze sobą, jeśli $a + b + i$ jest podzielne przez $n-1$, zaś drużyny a i n (dla $1 \leq a \leq n-1$) – jeśli $2a + i$ jest podzielne przez $n-1$.

Dla ustalonych $1 \leq a < b \leq n-1$ dokładnie jedna spośród $n-1$ kolejnych liczb $a + b + 1, \dots, a + b + n - 1$ jest podzielna przez $n-1$, więc a i b zagrają ze sobą dokładnie jednej z rund. Podobnie drużyny n i a dla $a < n$ zagrają ze sobą dokładnie raz, ponieważ dokładnie jedna z liczb $2a + 1, \dots, 2a + n - 1$ jest podzielna przez $n-1$.

Ustalmy rundę $i \leq n-1$. Gdyby drużyna n grała w i -tej rundzie dwa razy, to dla pewnych $1 \leq a < b \leq n-1$ liczba $2a + i - (2b + i) = 2(a - b)$ byłaby podzielna przez $n-1$. Ponieważ n jest parzyste, dostalibyśmy, że $n-1 \mid b - a < n-1$, co jest niemożliwe. Gdyby drużyna $a \leq n-1$ grała dwa razy w i -tej rundzie, to zachodziłaby jedna z dwóch możliwości:

- 1) drużyna a gra z drużynami $b < b' \leq n-1$, skąd $n-1 \mid b' - b$, a to jest niemożliwe;
- 2) drużyna a gra z drużynami $b < n$ i n , skąd $n-1 \mid (2a + i) - (a + b + i) = a - b$, co również jest niemożliwe.

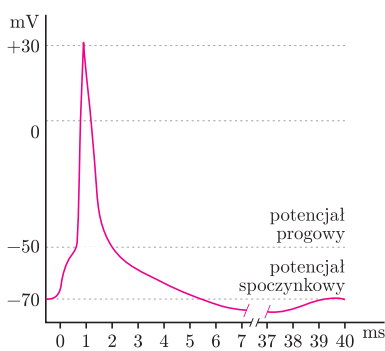
W takim razie zaproponowany podział na rundy spełnia warunki zadania.



Funkcja opisująca aktywację neuronu:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } e \geq p, \\ 0 & \text{dla } e < p, \end{cases}$$

e – suma sygnałów wejściowych, p – próg pobudliwości neuronu.



Wartość potencjału elektrycznego pobudzonego neuronu.

*student farmacji, Collegium Medicum, Uniwersytet Jagielloński

Gdy matematyka naśladuje komórki nerwowe

Marcin GRANAT*

We współczesnej nauce obserwuje się dynamiczny rozwój nauk interdyscyplinarnych. Wśród nich można wymienić badania nad sztucznymi sieciami neuronowymi, które są modelami matematycznymi projektowanymi w celu przetwarzania informacji i mają zastosowanie w wielu dziedzinach nauki. Modele te są inspirowane występującymi w naturze strukturami neuronalnymi, takimi jak, na przykład, ludzki mózg. Ze względu na biologiczne inspiracje zagadnienia związane z sieciami neuronowymi najwygodniej omawiać, zakładając, że mają charakterystyczne cechy zbliżone do naturalnych struktur neuronowych.

Podstawową jednostką funkcjonalną każdej sztucznej sieci neuronowej jest sztuczny neuron. Dlatego przed stworzeniem takiej sieci należy dysponować matematycznym modelem pojedynczej komórki nerwowej. Taki model jest najprostszym do analizy elementem sieci neuronowej i poznanie go może stanowić wstęp do rozważań na temat sztucznych sieci neuronowych.

Standardowa komórka nerwowa składa się z ciała komórki (perikarionu) oraz odchodzących od niego elementów – pojedynczego aksonu (neurytu) i wielu dendrytów. Neurony pełnią funkcję odbierania, przekazywania, przetwarzania i gromadzenia informacji. Komórki nerwowe są ułożone w sieć i komunikują się ze sobą. Aktywność tych komórek manifestuje się zmianami napięcia w obrębie ich błony komórkowej. W stanie spoczynku neurony wykazują stałą różnicę potencjału elektrycznego pomiędzy wnętrzem komórki a środowiskiem zewnętrznym, której wartość wynosi średnio -70 mV. W naturze sygnały docierające do neuronów powodują zmiany napięcia błony komórkowej. Gdy wartość tych bodźców jest odpowiednio wysoka, aby spowodować wzrost potencjału błonowego do progowej wartości -50 mV, obserwuje się aktywację komórki. Następuje wtedy kaskada procesów fizjologicznych w obrębie błony komórkowej, co jest widoczne jako nagły wzrost potencjału elektrycznego, sięgającego dodatnich wartości (patrz rysunek). Droga wygenerowanego sygnału biegnie wzdłuż aksonu, który następnie łączy się z wieloma dendrytami kolejnych neuronów. Po przekazaniu informacji komórka stabilizuje różnicę potencjału elektrycznego do wartości spoczynkowej i jest gotowa na odbieranie kolejnych bodźców. Wzorując się na naturze, sztuczny neuron powinien więc odbierać wiele sygnałów wejściowych (dendryty) z różnych źródeł i generować jeden sygnał wyjściowy (akson).

W naturalnej sieci neuronowej informacje docierające do komórek nerwowych mają różne wartości. Od ich sumy zależy, czy docelowy neuron zostanie pobudzony, a co za tym idzie, czy sygnał zostanie przekazany dalej, czy ulegnie wygaśnięciu.

Pobudzenie komórki nerwowej jest zgodne z zasadą „wszystko albo nic”. Mówi ona o tym, że neuron zostanie pobudzony tylko wtedy, gdy suma wartości sygnałów docierających e jest większa lub równa wartości progowej p pobudzającej komórkę. Mniejsze wartości nie są w stanie wywołać żadnej odpowiedzi ze strony komórki docelowej. Taką właściwość neuronów niezwykle łatwo przenieść na grunt cyfrowy i przedstawić za pomocą systemu binarnego, gdzie cyfra 1 oznaczać będzie pobudzenie komórki, a 0 – stan spoczynku.

Istotne jest, że sygnały odbierane przez komórki mogą być nasilane lub wyciszane. Pozwala to na zaistnienie sytuacji, w której pewne informacje są faworyzowane, co odbywa się poprzez wzrost wartości e z podprogowej na pobudzającą. W odwrotnym przypadku informacja progowa może zostać uznana za nieistotną i przestać generować pobudzenia. Przypisywanie wag poszczególnym sygnałom odbieranym pozwala sieciom neuronowym uczyć się i samodoskonalic. Taka umiejętność jest bardzo praktyczna dla naukowców, ponieważ modele komputerowe, które uczą się na własnych błędach, nie wymagają wprowadzania tak wielu poprawek, jak modele bez tej zdolności.

W naturze selekcja bodźców zewnętrznych odbywa się przez skomplikowane mechanizmy biochemiczne. Aktywność neuronów jest regulowana między innymi przez uwalnianie związków chemicznych, które ułatwiają lub hamują pobudzenie. Żywe komórki nerwowe mają zdolność kategoryzowania sygnałów, ponieważ uczenie się i dostosowywanie do zmiennego otoczenia jest cechą korzystną ewolucyjnie.

**Rozwiązanie zadania F 881.**

Energia potrzebna do podgrzania szklanki wody o 80 K to: $Q = m \cdot \Delta T \cdot c_p =$

$$= 0,25 \text{ kg} \cdot 80 \text{ K} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 84000 \text{ J.}$$

Energia uzyskana z jednej baterii:

$$E = IUt = 1,2 \text{ V} \cdot 0,5 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 8100 \text{ J.}$$

Stosunek $Q/E \approx 38,89$, czyli

potrzebujemy 39 baterii, których koszt to

około 78 zł. Koszt podgrzania energią

$$\text{z sieci: } k = 84000 \text{ J} \cdot 55 \frac{\text{gr}}{\text{kWh}} = 1,283 \text{ gr.}$$

Stosunek tych kosztów to około 6000.

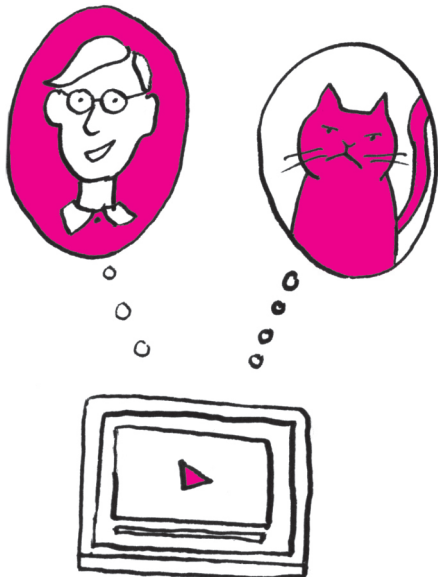
Inaczej jest w sztucznych sieciach neuronowych, w których powyższe właściwości komórek zostały zastąpione opisem matematycznym. Sztuczne neurony, pracujące nad rozwiązaniem danego problemu, rozpoczynają obliczenia, wykorzystując wartości sygnałów wejściowych oraz wybranych losowo wag. Po uzyskaniu wyniku, a z nim wielkości funkcji błędu, sieć neuronowa poszukuje takich wartości wag, dla których błąd ten jest najmniejszy. Następnie obliczenia są przeprowadzane tak długo, aż uzyskana zostanie zadowalająco mała wartość błędu. Decyzje, jak zmieniać wartości wag, sztuczna sieć neuronowa podejmuje na podstawie odpowiednich algorytmów. Jest ich wiele rodzajów i wiele modyfikacji, a o ich wyborze decyduje badacz podczas tworzenia sieci.

Sztuczne sieci neuronowe znajdują ogromne zastosowanie w wielu obszarach nauki oraz życia codziennego. Wykorzystuje się je w różnych, niejednokrotnie odległych aspektach ludzkiej działalności, jak, na przykład, finanse, medycyna. Sztuczne sieci neuronowe potrafią analizować odręcznie pismo chińskie, czuć nad bezpieczeństwem pracy robotów czy sterować transportem w firmach przewozowych. Programy komputerowe bazujące na modelach neuronów są często stosowane do badań określanych mianem *in silico*. W wielu laboratoriach przed przystąpieniem do doświadczeń empirycznych stosuje się wstępne analizy z użyciem modelowania komputerowego. Takie postępowanie jest korzystne dla badaczy, ponieważ pozwala na wstępne odrzucenie tych obiektów badań, które już na tym etapie nie wykazały obiecujących właściwości. To z kolei przekłada się na skrócenie czasu i zmniejszenie kosztów eksperymentu.

Znana każdemu użytkownikowi Internetu firma Google także wykorzystuje sztuczne sieci neuronowe. Przykładem może być model, pracujący na specjalnie dla niego zbudowanym sprzęcie elektronicznym, składającym się z 16 tysięcy procesorów. Umożliwiło to stworzenie sztucznej sieci zawierającej trzy miliony neuronów i miliard połączeń. Po zleceniu sieci neuronowej analizy filmów z serwisu YouTube okazało się, że oprogramowanie to samodzielnie nauczyło się wyróżniać pewne obiekty, jak na przykład ludzkie twarze czy wizerunki kotów. Ze względu na fakt, że badane przez sieć neuronową filmy były pozbawione jakichkolwiek opisów kategoryzujących, można wnioskować, że model neuronowy wykreował na własne potrzeby koncepcje przedstawianych obiektów i na tej podstawie zaczął je wyróżniać. Można to porównać do sytuacji, w której człowiek obserwuje obcy gatunek zwierzęcia i uczy się jego zachowania. Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych przez Google prawdopodobnie nie skończy się na powyższym przykładzie. Dalszy rozwój takich modeli może umożliwić doskonalenie poszczególnych usług internetowych. Na przykład samouczące się oprogramowanie mogłoby ulepszyć algorytmy popularnego obecnie tłumacza Google, co skutkowałoby trafniejszymi tłumaczeniami w zależności od użytego kontekstu. Dodatkowo opracowanie doskonalszego programu do rozpoznawania mowy zaowocowałoby dokładną analizą wypowiedzianych słów i ich natychmiastowym tłumaczeniem, bez konieczności używania klawiatury. Być może w niedalekiej przyszłości każdy korzystający z wyszukiwarki internetowej będzie miał kontakt z wynikami opracowanymi przez sztuczną sieć neuronową.

Pomimo wielu zalet modelowanie wzorowane na neuronach nigdy nie daje gwarancji powodzenia i tak jak każda metoda eksperymentalna niesie za sobą więcej porażek niż sukcesów. Mnogość badań pomyślnie wykorzystujących sztuczne sieci neuronowe wynika nie tyle z ich niezawodności, co z ogromnego obszaru ich zastosowań. Warto także zwrócić uwagę na fakt, że w świecie naukowym rzadko publikowane są wyniki nieudanych eksperymentów.

W przypadku próby opisu obiektu za pomocą modelu matematycznego należy też pamiętać, że w rzeczywistości modelowaniu nie podlega sam obiekt, a jedynie nasza wiedza o nim. Dlatego im mniej mamy informacji na temat danego zjawiska, tym gorszy otrzymamy model. Zestawiając zachowanie modelu z rzeczywistym zachowaniem przedmiotu badań, po pewnym czasie (na ogół) obserwuje się rozbieżności pomiędzy tymi dwoma procesami. Wynika to właśnie z niepełnej wiedzy badacza na temat modelowanego zjawiska. Ze względu na niezwykle wysoki poziom skomplikowania procesów naturalnych modelowanie pozwala na oszacowanie wyników zawsze obarczonych pewnym błędem. Możliwości sztucznych sieci neuronowych są także zależne od wykorzystywanego sprzętu komputerowego. Jest tak, ponieważ ze wzrostem liczby modelowanych parametrów rośnie zapotrzebowanie na moc obliczeniową.

**Rozwiązanie zadania M 1460.**

Zauważmy, że z własności funkcji f

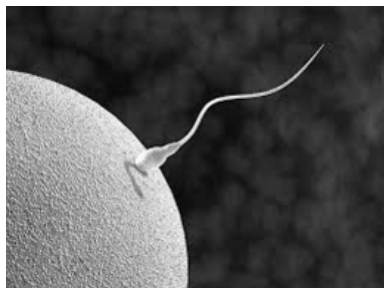
wynika prawdziwość dwóch nierówności:

$$f(7)f(13) = f(91) \geq f(90) = f(9)f(10),$$

$$f(8)f(9) = f(72) \geq f(70) = f(7)f(10).$$

Po wymnożeniu tych nierówności stronami otrzymujemy tezę.

Pál Erdős [Ann. of Math. (2) 47 (1946), 1–20] wykazał, że funkcja f spełniająca podane warunki musi być postacią $f(n) = n^k$ dla pewnego $k \geq 0$.



www.scholaris.pl

Eukarioty to te organizmy, których materiał genetyczny zamknięty jest w jądrze komórkowym. Bakterie nazywają się prokariotami, jądra nie mają.

Wakacyjne Warsztaty Wielodyscyplinarne (11)

Jesteś licealistą i pasjonują Cię nauki ścisłe?

Chciałbyś rozwinąć swoje zainteresowania o rzeczy, których nie ma w szkole?

WWW

to coroczna impreza organizowana przez studentów Uniwersytetu Warszawskiego i innych uczelni, skierowana do uzdolnionych i zafascynowanych nauką licealistów.

Podczas warsztatów odbywa się kilkanaście bloków zajęć w małych grupach. W programie poprzednich edycji znalazły się zajęcia poświęcone m.in. równaniom diofantycznym, mikrokontrolerom AVR, czarnym dziurom i inżynierii wstecznej. Wieczorami odbywają się luźne wykłady, a także gry w planszówki, go, brydża, Ktulu i RPGi.

Na naszej stronie możesz zapoznać się z tegorocznym programem i obejrzieć relacje z poprzednich edycji:

<http://warsztatywww.wikidot.com>

Od uczestników oczekujemy entuzjazmu i zaangażowania.

Jeżeli znasz innych Pasjonatów, którzy mogliby być tym zainteresowani – podziel się z nimi informacją o Warsztatach!

Troje rodziców jednego dziecka

Siedziałam w kawiarni, przeczekując pewien termin bliskiego spotkania. Poza mną była tam tylko grupa osób w wieku więcej niż średnim. Coś świętowali, ale na trzeźwo i byli dość głośni. I z tych ich rozmów usłyszałam komentarz o przyszłym horrorze genetycznym, czyli tworzeniu zarodków z materiału genetycznego trójki rodziców. I co z tego wyniknie. I że w takim świecie trudno będzie żyć.

Miałam pół wolnej godziny i mam duszę starej popularyzatorki. Podeszłam i zapytałam, czy chcieliby wiedzieć, co się kluje w laboratoriach genetyków. Byli weseli i kulturalni i zaprosili mnie do stolika.

Standardowa metoda *in vitro* polega na zapłodnieniu pozaustrojowym komórki jajowej (kobiety) plemnikiem (mężczyzny). Komórka jajowa jest relatywnie duża i zawiera wszystkie konieczne do jej życia elementy. Trwa przecież w kobiecie od urodzin do późnych lat. Plemnik jest ruchliwy i małe, powstaje wciąż od nowa w życiu swojego mężczyzny. Niesie właściwie tylko jądro komórkowe z pojedynczym kompletem genów. Ma dotrzeć szybko do jaja, „pokonać” licznych konkurentów, wdzierając się do środka i połączyć swój DNA z DNA jądra komórki jajowej.

W komórce jajowej jądrem są jeszcze małe twory zwane mitochondriami, około 100 000 na komórkę. Znalazły się dawno temu w komórkach przodków nie tylko człowieka, ale wszystkich eukariotów. Najciekawsza i ekscytująca hipoteza dotycząca ich pochodzenia głosi, że kiedyś do komórki prokariotycznej wniknęła inna prokariotyczna i tam już została. Wszystko, co miała, się w niej „uwsteczniło”, został tylko DNA kodujący białka konieczne do wytwarzania energii niezbędnej dla życia. W ten sposób komórka biorca stała się bezwarunkowo uzależniona od najeźdźcy, a mitochondria w każdej komórce biocyta namnożyły się wielokrotnie. Obecnie ich liczba na komórkę zależy od potrzeb energetycznych tkanki, mierzy się setkami, a w dodatku w każdym mitochondrium znajduje się do 10 cząsteczek mitochondrialnego DNA. I jak to w życiu bywa, DNA może ulegać mutacjom – wtedy mogą zachodzić niekorzystne zmiany w białkach, które są przez ten DNA kodowane, co może być przyczyną ciężkich schorzeń obejmujących mózg, serce, mięśnie, nerki i gruczoły wydzielnicze. Podejrzewa się, że zmiany w mitochondrialnym DNA mogą być także odpowiedzialne za procesy starzenia.

Ponieważ mitochondriów na komórkę jest wiele, to nie zawsze nosicielka takiej mutacji jest chora. O, pojawił się rodzaj żeński, ponieważ w plemnikach w zasadzie nie mieszczą się mitochondria (życie plemnika jest krótkie) i mitochondria dziedziczymy od mamy. Zdiagnozowanie choroby mitochondrialnej jest trudne, zawodne, czasami wręcz niemożliwe, ale prawdopodobieństwo przekazania choroby dziecku – zwiększone.

Wyobraźmy sobie parę, w której kobieta ma groźne mutacje mitochondrialne. Co można by zrobić, żeby ich dziecko tej choroby nie odziedziczyło? Można by z komórki jajowej tej kobiety pobrać jądro komórkowe i wprowadzić do komórki jajowej (bez jądra) innej kobiety, zdrowej, zachowując zatem jej „zdrowe” mitochondria. Po zapłodnieniu *in vitro* plemnikiem mężczyzny powstanie hybryda genetyczna: jednokomórkowy zarodek, którego materiał jądrowy pochodzi od ojca i matki właściwej, a mitochondria od innej dawczyni. Dodać jeszcze należy, że DNA mitochondrialny stanowi nieznaczny promil całego DNA i koduje tylko 13 białek „energetycznych”, wobec 25 tysięcy białek kodowanych przez genom jądrowy. Jest to tak nieznaczna ilość genów i białek, że przekazanie mitochondriów od dawczyni traktuje się jako transplantację tkanki.

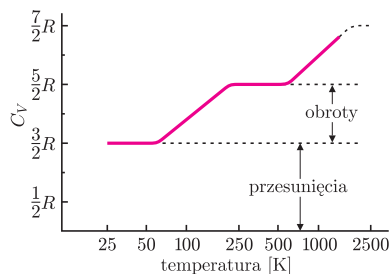
Opisana procedura jest jeszcze wirtualna i hipotetyczna, ale w 2014 roku obie Izby Parlamentu Brytyjskiego dopuściły doprowadzanie jej do etapu procedury *in vitro* w położnictwie.

Moich rozmówców w kawiarni porzuciłam w trakcie aktywnej i ożywionej dyskusji. Współczesna genetyka dostarcza wielu tematów do interesujących debat, pod warunkiem, że wiemy o czym debatujemy.

Magdalena FIKUS

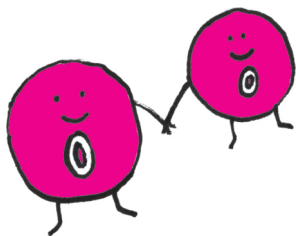
O obrotach cząsteczek, albo jeszcze jedna furtka do mechaniki kwantowej

Andrzej MAJHOFER*



Uproszczony schemat zależności ciepła właściwego dwuatomowego wodoru H_2 od temperatury.

Wyjaśnienie dokładnego przebiegu zależności przedstawionej na rysunku było w latach dwudziestych XX wieku jednym z najważniejszych sprawdzianów nowo powstającej mechaniki kwantowej, a prześledzenie postępu w tej kwestii jest rzeczą niewątpliwie pouczającą. Zagadnienie to badał m.in. Max Planck – gdyby zadał sobie trud naszkicowania wynikającej z jego rachunków zależności, pewnie dziś mówilibyśmy o teorii Plancka ciepła właściwego.



Najniższe wzbudzenia związane z drganiami cząsteczek odpowiadają temperaturom rzędu kilkuset kelwinów. Przejścia elektronowe odpowiadają zaś energiom rzędu elektronowoltów; porównanie z wartością stałej Boltzmanna wskazuje, że wzbudzenia elektronów „uaktywniają się” w temperaturach rzędu 10^4 K.

W obszarze temperatur bliskich temperaturze pokojowej molowe ciepło właściwe w stałej objętości gazów dwuatomowych jest z dobrym przybliżeniem równe $5R/2$, gdzie R jest tzw. stałą gazową. Można wyjaśniać to na gruncie fizyki klasycznej za pomocą zasady ekwipartycji energii – składająca się z dwóch punktowych atomów cząsteczka ma pięć stopni swobody: trzy związane z przesunięciami całej cząsteczki w przestrzeni oraz dwa związane z ustawieniem osi łączącej atomy. W równowadze termicznej w temperaturze T średnia energia cząsteczki jest równa iloczynowi czynnika $kT/2$, gdzie $k = 8,617 \cdot 10^{-5}$ eV/K jest stałą Boltzmanna, i liczby stopni swobody, zatem ciepło właściwe w stałej objętości, czyli energia potrzebna do podgrzania jednego mola ($N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ cząsteczek) o 1 K, jest równa właśnie $5N_A k/2 = 5R/2$, gdzie skorzystaliśmy z relacji $N_A k = R$.

Przedstawione powyżej rozumowanie pozwoliło Rudolfowi Clausiusowi wysunąć w latach osiemdziesiątych XIX wieku przypuszczenie, że tlen i azot składają się właśnie z cząsteczek dwuatomowych, a gazy, których ciepło właściwe wynosi $3R/2$ – z pojedynczych atomów. Tymczasem w temperaturach niższych od pokojowej przewidywanie to nie musi być poprawne – wystarczy spojrzeć choćby na zależność od temperatury ciepła właściwego wodoru przedstawioną na rysunku.

Wyjaśnienie takiej zależności musi odwołać się do mechaniki kwantowej, przewidującej skwantowanie niektórych wielkości charakteryzujących ruch cząsteczki – w tym przypadku związanych z jej obrotem. Moment pędu J jest bowiem zawsze całkowitą wielokrotnością wartości $\hbar = h/2\pi$: $J = j\hbar$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Zasadę ekwipartycji energii można zaś stosować jedynie wtedy, gdy temperatura T jest na tyle wysoka, że energia termiczna kT przekracza energię najniższego stanu wzbudzonego związanego z rozważanym stopniem swobody. Jeżeli wartość kT jest mniejsza od energii najniższego stanu wzbudzonego, to odpowiadający mu stopień swobody jest „zamrożony” i nie daje wkładu do ciepła właściwego. Dla stanów rotacyjnych cząsteczki najniższy stan odpowiada $j = 0$, a pierwszy stan wzbudzony $j = 1$. Oszacujmy energię stanu rotacyjnego o momencie pędu J , posługując się mechaniką klasyczną:

$$E_J = \frac{J^2}{2I},$$

gdzie I oznacza moment bezwładności cząsteczki. Stany rotacyjne nie dają wkładu do ciepła właściwego, gdy $kT < E_J$ dla najniższej różnej od zera wartości $J = 1\hbar$. Wśród gazów dwuatomowych najmniejszy moment bezwładności, a więc i najwyższą energię wzbudzeń rotacyjnych ma cząsteczka wodoru H_2 . Jej moment bezwładności to:

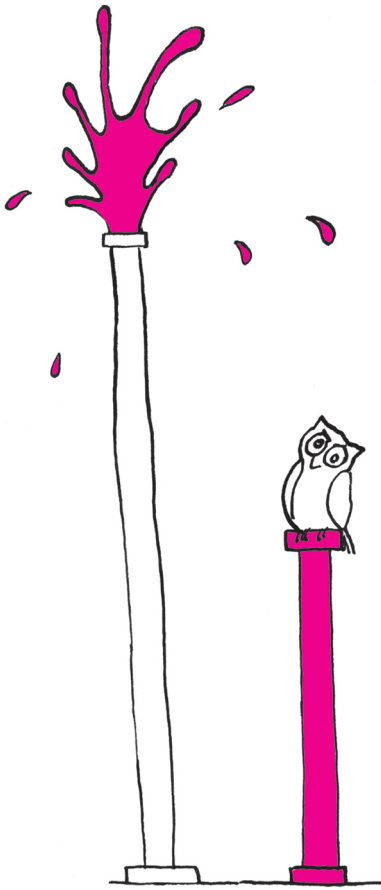
$$I = M_p \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_p \left(\frac{a}{2}\right)^2 = M_p \frac{a^2}{2},$$

gdzie $a \approx 10^{-10}$ m jest typową odległością jąder atomów cząsteczek dwuatomowych (długością wiązania), $M_p = 9,38 \cdot 10^{-31}$ kg to zaś masa protonu. Otrzymujemy więc, że dla

$$T < T_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 k M_p a^2}$$

molowe ciepło właściwe gazów dwuatomowych będzie takie jak gazów jednoatomowych. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy $T_{\text{rot}} = 48,2$ K; dokładniejsze obliczenia uwzględniające długość wiązania H_2 , czyli $a = 7,4 \cdot 10^{-11}$ m, oraz fakt, że zgodnie z mechaniką kwantową wartość kwadratu momentu pędu to $J^2 = j(j+1)\hbar^2$, prowadzą (dla wodoru) do wartości $T_{\text{rot}} = 176$ K. Dla pozostałych cząsteczek dwuatomowych granica ta jest kilka do kilkudziesięciu razy niższa. Niewyjaśnioną zagadką pozostawało, dlaczego w rozumowaniach takich jak rozumowanie Clausiusa dla uzyskania zgodności z doświadczeniem należało rozważać tylko ruch postępowy i obrotowy, a pomijając drgania cząsteczek i wzbudzenia elektronów. Rozwiązanie tej zagadki wykracza poza możliwości fizyki klasycznej.

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



Informatyczny kącik olimpijski (82): Wiercenia

W tym kąciku omówimy zadanie *Wiercenia*, które pojawiło się na Potyczkach Algorytmicznych w roku 2009. Ekipa poszukująca złoż ropy wykonała dwa odwierty: w punkcie $A = 0$ natrafiono na ropę, zaś w punkcie $B = n + 1$ ropy nie znaleziono. Wiedząc, że złoż ropy zajmuje pewien spójny fragment odcinka AB , ekipa chce zlokalizować najdalszy punkt spośród punktów o współrzędnych $1, 2, \dots, n$, w którym występuje ropa. Wykonanie odwiertu w punkcie i zajmuje czas $t[i]$; ekipa może wykonywać tylko jeden odwiert naraz. Należy wyznaczyć taki plan wierceń, aby czas potrzebny na ustalenie, dokąd sięga złoż ropy, był w pesymistycznym przypadku jak najkrótszy.

Na początek zauważmy, że jeśli wykonanie każdego z odwiertów zajmuje taki sam czas, to wtedy, stosując wyszukiwanie binarne, uzyskamy odpowiedź, wykonując optymalną liczbę $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ odwiertów. Zróznicowanie czasów istotnie komplikuje zadanie; spróbujemy je rozwiązać, korzystając z programowania dynamicznego.

Oznaczmy przez $d[a, b]$ optymalny czas lokalizacji granicy złoża na odcinku od punktu a do punktu b (włącznie), przy założeniu, że wiemy, iż w punkcie $a - 1$ jest ropa, a w punkcie $b + 1$ jej nie ma. Aby wyznaczyć granicę złoża na odcinku $[a, b]$, musimy zacząć od wykonania odwiertu w jednym z punktów i tego odcinka. Jeśli znajduje się tam ropa, to granicę złoża będziemy poszukiwać na odcinku $[i + 1, b]$, w przeciwnym przypadku granica jest na odcinku $[a, i - 1]$. Dostajemy zatem wzór rekurencyjny

$$(*) \quad d[a, b] = \min_{a \leq i \leq b} (t[i] + \max(d[a, i - 1], d[i + 1, b])).$$

Zakładamy, że $d[a, b] = 0$ dla $a > b$. Rozwiązaniem jest wartość $d[1, n]$. Obliczenie jej wprost z powyższej rekurencji da nam algorytm o złożoności czasowej $O(n^3)$ i pamięciowej $O(n^2)$. Algorytm będzie miał n faz, w ℓ -tej fazie będziemy wypełniać komórki tablicy odpowiadające odcinkom o długości ℓ :

```

for  $\ell := 0$  to  $n - 1$  do
  for  $a := 1$  to  $n - \ell$  do
     $b := a + \ell$ ;  $d[a, b] := \infty$ ;
    for  $i := a$  to  $b$  do
       $d[a, b] := \min(d[a, b], t[i] + \max(d[a, i - 1], d[i + 1, b]));$ 

```

Aby przyspieszyć powyższy algorytm, będziemy potrzebowali kilku obserwacji. Zauważmy, że jeśli przedłużymy jakiś odcinek, to czas szukania w nim granicy złoża jest zawsze nie mniejszy niż w oryginalnym odcinku. Zatem wraz ze wzrostem i we wzorze (*) wartość $d[a, i - 1]$ nie zmniejsza się, a wartość $d[i + 1, b]$ nie rośnie. Istnieje więc taki indeks $s[a, b] \in [a - 1, b]$, że spełnione są nierówności

$$d[a, i - 1] \leq d[i + 1, b] \text{ dla } i \leq s[a, b] \quad \text{oraz} \quad d[a, i - 1] > d[i + 1, b] \text{ dla } i > s[a, b].$$

Możemy zatem przepisać wzór (*) w równoważnej formie, pozbywając się liczenia maksimum:

$$(**) \quad d[a, b] = \min \left(\min_{a \leq i \leq s[a, b]} (t[i] + d[i + 1, b]), \min_{s[a, b] < i \leq b} (t[i] + d[a, i - 1]) \right).$$

Skorzystamy również z tego, że tablica s jest monotoniczna względem każdej współrzędnej, dzięki czemu wartość $s[a, b]$ jest ograniczona przez wartości dla krótszych odcinków:

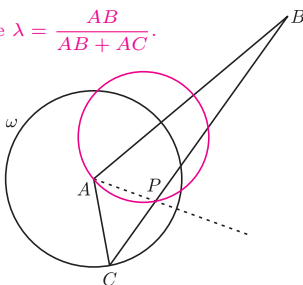
$$s[a, b - 1] \leq s[a, b] \leq s[a + 1, b].$$

Istotnie, jeśli weźmiemy dowolne $i \leq s[a, b - 1]$ i znowu skorzystamy z tego, że przedłużenie odcinka nie zmniejsza czasu poszukiwania granicy złoża, to dostaniemy $d[a, i - 1] \leq d[i + 1, b - 1] \leq d[i + 1, b]$, zatem $i \leq s[a, b]$, co dowodzi lewej nierówności (prawej dowodzimy analogicznie). Ponieważ $s[a, a] = a$, to możemy dla wygody przyjąć $s[a, b] = b$ dla $a > b$. Zatem, aby wyznaczyć $s[a, b]$, wystarczy przejrzeć wartości od $s[a, b - 1]$ do $s[a + 1, b]$. Dzięki temu wyznaczenie ich dla wszystkich odcinków $s[a, a + \ell]$ o ustalonej długości ℓ zajmie sumarycznie czas liniowy:

$$\sum_{a=1}^{n-\ell} (s[a + 1, a + \ell] + 1 - s[a, a + \ell - 1]) = s[n - \ell + 1, n] - s[1, \ell] + n - \ell \leq 2n.$$



Rozwiązanie zadania M 1459.
Z twierdzenia o dwusiecznej wiemy, że $\frac{PC}{PB} = \frac{AC}{AB}$, a skąd $BP = \lambda \cdot BC$,
gdzie $\lambda = \frac{AB}{AB + AC}$.



Zatem punkt P to obraz punktu C przy jednokładności o środku B i skali λ . Poszukiwany zbiór punktów P jest więc obrazem okręgu ω (bez dwóch punktów) przy tej jednokładności.



Rozwiązanie zadania F 882.

Maksymalny moment siły, jaki może uzyskać rowerzysta, opierając cały ciężar ciała na korbie ustawionej poziomo, wynosi $M_0 = mgr$, gdzie m to masa rowerzysty, r – długość korby. Moment siły, z jakim koło działa na podłożu, jest $M_1 = \frac{28}{22}M_0$, a siła działająca na punkt styczności koła z podłożem

$$F_1 = \frac{M_1}{R},$$

gdzie R jest promieniem koła. Załóżmy, że koło toczy się bez poślizgu. Wtedy wartość siły tarcia statycznego F_T jest równa F_1 . Siła równoległa do zbocza, działająca na rowerzystę z rowerem, jest

równa $F_g = \frac{6}{5}mg \sin \alpha$, gdzie α to kąt nachylenia zbocza. Z warunku równowagi sił $F_T = F_g$ po uproszczeniu dostajemy warunek

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{r}{R} \cdot \frac{28}{22} \cdot \frac{5}{6}.$$

Wstawiając dane, otrzymujemy maksymalną wartość kąta $\alpha_{\max} \approx 35^\circ$. Dla większych kątów, nawet opierając cały ciężar swojego ciała na pedale, rowerzysta wraz z rowerem będzie się staczał do tyłu. W sytuacji granicznej, kiedy moment siły, z jaką rowerzysta naciska na pedał, przeniesiony przez przekładnię na podłożu, dokładnie równoważy składową ciężaru układu styczną do zbocza, rower spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym. W tej sytuacji warunek na brak poślizgu jest taki sam, jak dla klocka umieszczonego na równi pochyłej: $\mu \geq \tan \alpha$, czyli dla danych w zadaniu i $\alpha = \alpha_{\max}$ mamy

$$\mu \geq 0,71.$$

Jeżeli żądamy, aby koło toczyło się bez tarcia w całym zakresie kątów, to siła F_1 nie może przekroczyć maksymalnej siły tarcia statycznego równej

$$F_{T_{\max}} = \mu \frac{6}{5}mg \cos \alpha.$$

Po uproszczeniu warunek $F_1 \leq F_{T_{\max}}$ sprowadza się do

$$\mu \geq \frac{r}{R} \cdot \frac{28}{22} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Oba otrzymane ograniczenia na współczynnik tarcia są rosnącymi funkcjami α i są tożsame dla kąta $\alpha = \alpha_{\max}$. Wystarczy zatem $\mu \geq 0,71$.

W końcu pokażemy, jak szybko wyliczać minima we wzorze (**). Załóżmy, że mamy strukturę danych, która przechowuje pary (indeks, wartość) i udostępnia operacje jak na kolejce: wstawienie pary na koniec kolejki (*push*) oraz usunięcie pary z początku kolejki (*pop*). Dodatkowo operacja *first* będzie zwracała indeks pary z początku kolejki, a kluczowa operacja *min* będzie zwracała minimum ze wszystkich wartości w kolejce. Będziemy korzystać z $2n$ kolejek, które nazwiemy $A[i]$ oraz $B[i]$ dla $1 \leq i \leq n$.

Podczas wyliczania $d[a, b]$ w ℓ -tej fazie algorytmu będziemy zakładać, że wszystkie wartości z lewego minimum w (**) znajdują się w kolejce $B[b]$ (w kolejności malejących indeksów i), a wszystkie wartości z prawego minimum w kolejce $A[a]$ (w kolejności rosnących indeksów). Kolejka $A[a]$ w fazie $\ell - 1$ była wykorzystywana podczas obliczeń dla komórki $d[a, b - 1]$, zatem zawiera pary $(i, t[i] + d[a, i - 1])$ dla indeksów $s[a, b - 1] < i \leq b - 1$. Ponieważ $s[a, b - 1] \leq s[a, b]$, więc wystarczy usunąć z niej pary o indeksach nie większych niż $s[a, b]$ oraz dodać parę o indeksie b . Analogicznie uaktualniamy pary w kolejce $B[b]$. Pseudokod całego algorytmu jest następujący (zakładamy, że dla pustej kolejki pętla *while* nie wykonuje się, a operacja *min* zwraca ∞):

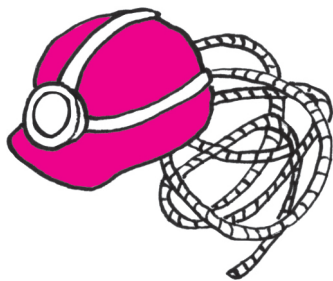
```

for  $\ell := 0$  to  $n - 1$  do
  for  $a := 1$  to  $n - \ell$  do
     $b := a + \ell$ ;
    for  $i := s[a, b - 1]$  to  $s[a + 1, b]$  do
      if  $d[a, i - 1] \leq d[i + 1, b]$  then
         $s[a, b] := i$ ;
     $A[a].push(b, t[b] + d[a, b - 1])$ ;
    while  $A[a].first \leq s[a, b]$  do  $A[a].pop$ ;
     $B[b].push(a, t[a] + d[a + 1, b])$ ;
    while  $B[b].first > s[a, b]$  do  $B[b].pop$ ;
     $d[a, b] := \min(A[a].min, B[b].min)$ ;

```

Kolejki możemy zaimplementować tak, aby wszystkie udostępniane operacje działały w zamortyzowanym czasie stałym. Zauważmy, że tuż przed wykonaniem operacji *push*(i, v) możemy usunąć z końca kolejki wszystkie pary o wartościach nie mniejszych niż v , gdyż para (i, v) będzie lepszym kandydatem na minimum. Dzięki temu pary znajdujące się w kolejce będą zawsze posortowane rosnąco według wartości, zatem operacja *min* po prostu zwróci wartość pary z początku kolejki. Ostatecznie złożoność czasowa algorytmu wyniesie $O(n^2)$.

Tomasz IDZIASZEK

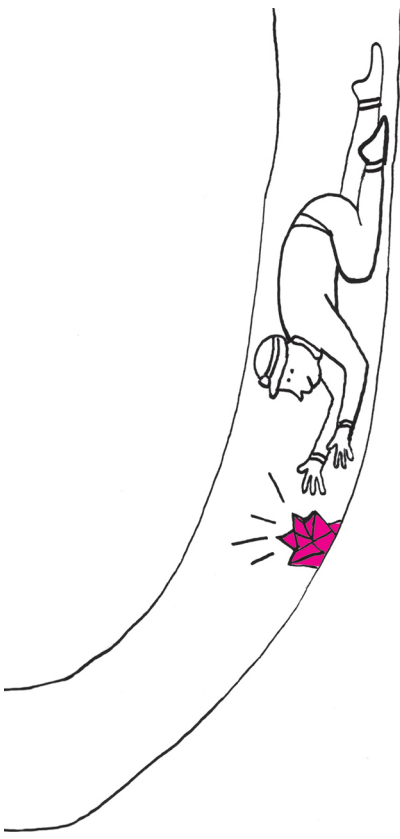


Grupowa eksploracja

Dominik PAJAŁ*

Wyobraźmy sobie sytuację, w której grupa speleologów chce wyeksplorować nieznaną jaskinię. Przy każdym rozgałęzieniu muszą podejmować decyzję, ilu z nich pójdzie każdym z nowych tuneli. Być może czasami będzie się opłacało zostawić część z nich przy rozgałęzieniu. Niektóre z tuneli będą się, być może, kończyły ślepo, a niektóre będą się dalej rozgałęziały. Speleolodzy mają telefony i mogą się ze sobą komunikować, więc gdy jeden z nich odkryje tunel z dużą liczbą rozgałęzień, może wezwać posiłki. Intuicyjnie rozsądne wydaje się wysyłanie większej liczby speleologów w te rejony jaskini, w których jest więcej tuneli. Chcielibyśmy jakoś sformalizować (i nieco uprościć) ten problem

*University of Cambridge



i przeanalizować takie naturalne podejście. Uproszczenia będą dwa: jaskinia będzie przedstawiona jako drzewo, czyli spójny graf bez cykli, a zespół speleologów będzie dość liczny...

Problem definiujemy następująco: mamy danych k agentów, początkowo umieszczonych w korzeniu r nieznanego drzewa

$$T = (V, E)$$

o znanej liczbie wierzchołków

$$n = |V|.$$

Drzewo jest nieznane, to znaczy, że nasza początkowa wiedza to tylko liczba krawędzi wychodzących z korzenia. W pierwszym kroku nasz algorytm musi wybrać, ilu agentów przetraversuje krawędzie wychodzące z r , a ilu zostanie w r do następnej rundy. Jeżeli agentowi przydzielimy trawersowanie krawędzi z r do pewnego sąsiada v , to przejście krawędzi zajmie agentowi całą rundę i pojawi się on w wierzchołku v na początku następnej rundy. W następnej rundzie będzie on mógł przetraversować dowolną krawędź wychodzącą z v . Wszyscy agenci, którzy w danej rundzie przechodzą krawędzie, robią to równocześnie.

Przez D będziemy oznaczać odległość od korzenia r do najdalszego liścia l w drzewie T . Odległość jest liczona jako liczba krawędzi na ścieżce łączącej r z l . Oczywiście, nie jesteśmy w stanie wyeksplorować w czasie mniejszym niż D , ponieważ przejście ścieżki z r do l zajmuje D rund.

Gdy wierzchołek jest odwiedzony przez pewnego agenta po raz pierwszy, to otrzymujemy informację o jego stopniu (liczbie wychodzących krawędzi). Ponadto dostajemy też informację o tym, która krawędź prowadzi do korzenia. Po pewnej liczbie kroków eksploracji już coś wiemy o wyglądzie drzewa T . Oznaczmy przez $T^{(t)}$ poddrzewo drzewa T , składające się z wierzchołków, które zostały poznane do chwili t . Na przykład $T^{(1)}$ to korzeń razem z dziećmi korzenia, ponieważ już na początku pierwszej rundy wiemy, ile dzieci ma korzeń. Drzewo $T^{(t)}$ zatem zawiera pewne wierzchołki, które nie są jeszcze odwiedzony, ale są już znane. Dla $v \in V$ oznaczmy przez $T^{(t)}(v)$ poddrzewo drzewa $T^{(t)}$ zawierające tylko te wierzchołki, dla których v jest przodkiem (ucinamy krawędź łączącą v z jego rodzicem i dostajemy $T^{(t)}(v)$). Przez $L(T^{(t)}(v))$ oznaczamy liczbę wierzchołków znanych, ale nieodwiedzonych w drzewie $T^{(t)}(v)$. Czasami na wierzchołki znane, ale nieodwiedzony będziemy mówili „nieukończone ścieżki”, ponieważ każdy taki wierzchołek jest korzeniem, być może dużego, nieznanego drzewa.

Dostajemy do dyspozycji pokaźnych rozmiarów zespół agentów

$$k = \lceil Dn^c \rceil,$$

dla pewnej stałej $c > 1$, ale chcemy eksplorować szybko, czyli w czasie jak najbliższym D .

Propozycja algorytmu. Na początku wszyscy agenci w korzeniu są nieaktywni. W każdej rundzie aktywujemy x agentów w korzeniu (x wyznaczymy później). Wszyscy aktywni agenci w każdej rundzie idą w dół drzewa. Agentów dzielimy proporcjonalnie do liczby nieukończonych ścieżek w poddrzewach. Drobnym niuansem są zaokrąglenia; w pseudokodzie zapiszemy wszystko dokładnie:

Algorithm $\mathcal{A}(T, r, x)$ at time step s :

Aktywuj x agentów w korzeniu r .

for each odwiedzony $v \in V(T^{(s)})$ **do**: { ustalamy, gdzie posłać agentów z v }

Niech $\mathcal{A}_v^{(s)}$ – zbiór agentów w v na początku rundy s .

Oznaczmy przez v_1, v_2, \dots, v_d wszystkie dzieci v .

Niech $i^* := \arg \max_i \{L(T^{(s)}(v_i))\}$. { dziecko z największą liczbą „nieukończonych ścieżek” }

Podziel $\mathcal{A}_v^{(s)}$ na rozłączne zbiory $\mathcal{A}_{v_1}, \mathcal{A}_{v_2}, \dots, \mathcal{A}_{v_d}$, takie że:

$$(i) |\mathcal{A}_{v_i}| = \left\lfloor \frac{|\mathcal{A}_v^{(s)}| \cdot L(T^{(s)}(v_i))}{L(T^{(s)}(v))} \right\rfloor, \text{ dla każdego } i \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{i^*\},$$

$$(ii) |\mathcal{A}_{v_{i^*}}| = |\mathcal{A}_v^{(s)}| - \sum_{i \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{i^*\}} |\mathcal{A}_{v_i}|.$$

for each $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ **do for each** agent $g \in \mathcal{A}_{v_i}$ **do** $\text{move}^{(s)}$ g to vertex v_i .

end algorithm \mathcal{A} .

Analiza. Algorytm \mathcal{A} nie robi niczego odkrywczego, po prostu wysyła więcej agentów tam, gdzie jest więcej ścieżek do odkrycia. Ale jego analiza nie jest oczywista. Algorytm, odkrywając kolejne wierzchołki drzewa, na bieżąco zmienia wartości liczby nieukończonych ścieżek w poddrzewach (funkcja L), co ma wpływ na proporcje podziału liczby agentów. Wydaje się, że jest to kluczowa własność algorytmu, więc w naszej analizie musimy ją zbadać. Oczywiście, musimy też wyznaczyć odpowiednią wartość parametru x . Na razie ustalmy tylko, że $x > 2n$.

Weźmy dowolny liść f z drzewa T i ścieżkę długości $D_f \leq D$ łączącą f z korzeniem r . Oznaczmy tę ścieżkę przez $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{D_f})$, gdzie $f_0 = r$ i $f_{D_f} = f$. Chcemy się przyjrzeć, jak liczne grupy agentów będą wędrowały po ścieżce \mathcal{F} . Liczba agentów wysyłana wzdłuż ścieżki zależy od liczby nieukończonych ścieżek w odpowiednich poddrzewach. Jeżeli oznaczymy $\lambda_j^{(i)} = L(T^{(i)}(f_j))$, to i -tym w kroku z wierzchołka f_j wysłamy do f_{j+1} mniej więcej (z dokładnością do zaokrąglenia) $\frac{\lambda_{j+1}^{(i)}}{\lambda_j^{(i)}}$ -tą część agentów znajdujących się w f_j

na początku rundy i . Zapomnijmy na chwilę o zaokrągleniach i pójdźmy dalej tym tropem. Do liścia f dotrze $\alpha_i = x \frac{\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i+1)} \dots \lambda_{D_f}^{(i+D_f-1)}}{\lambda_0^{(i)} \lambda_1^{(i+1)} \dots \lambda_{D_f-1}^{(i+D_f-1)}}$ agentów

wysłanych w rundzie i z korzenia. Zauważmy, jak wyglądają pierwsze dwie wartości:

$$\alpha_1 = x \frac{\lambda_1^{(1)} \lambda_2^{(2)} \lambda_3^{(3)} \dots \lambda_{D_f}^{(D_f)}}{\lambda_0^{(1)} \lambda_1^{(2)} \lambda_2^{(3)} \dots \lambda_{D_f-1}^{(D_f)}},$$

$$\alpha_2 = x \frac{\lambda_1^{(2)} \lambda_2^{(3)} \lambda_3^{(4)} \dots \lambda_{D_f}^{(D_f+1)}}{\lambda_0^{(2)} \lambda_1^{(3)} \lambda_2^{(4)} \dots \lambda_{D_f-1}^{(D_f+1)}}.$$

Jeżeli wymnożymy $\alpha_1 \cdot \alpha_2$, to dość dużo się uprości. Wymnożmy zatem a kolejnych wartości α_i . Biorąc pod uwagę, że z definicji funkcji L mamy $1 \leq \lambda_i^{(j)} \leq n$,

to dostaniemy $\prod_{i=1}^a \alpha_i \geq \frac{x^a}{n^{a+D}}$. Czyli jeżeli ustalimy

$a = \left\lceil \frac{D \log_2 n}{\log_2(x/(2n))} \right\rceil$, to dostaniemy $\prod_{i=1}^a \alpha_i \geq 2^a$, czyli dla pewnego $j^* \in \{1, 2, \dots, a\}$ mamy $\alpha_{j^*} \geq 2$. Gdyby nie było zaokrąglenia i każde dziecko dostawałoby należny

przydział agentów, to α_{j^*} agentów spośród grupy, która wyrusza w rundzie j^* , dotarłoby do liścia f .

W rzeczywistości liczby agentów są czasem zaokrąglane w dół, zgodnie z regułą (i) z algorytmu, ale można pokazać, że te zaokrąglenia zbyt dużo nie psują.

Przyjrzyjmy się liczbie agentów, podążających ścieżką \mathcal{F} , spośród grupy, która wyrusza w rundzie j^* . Zauważmy, że w przypadku, gdy $\lambda_{i+1}^{(j^*+i)}/\lambda_i^{(j^*+i)} > 1/2$, to wtedy drzewo $T^{(j^*+i)}(f_{i+1})$ zawiera co najmniej połowę wszystkich otwartych ścieżek drzewa $T^{(j^*+i)}(f_i)$.

W takim przypadku wierzchołek f_{i+1} będzie tym wyróżnionym dzieckiem wierzchołka f_i i dostanie swój należny przydział agentów (reguła (ii)). Zauważmy, że α_{j^*} jest iloczynem x i pewnej liczby czynników nie większych od 1. Skoro $\alpha_{j^*} \geq 2$, to co najwyżej $\log_2 x - 1$ z tych czynników może być nie większych niż $1/2$. Agenci, którzy wyruszyli z korzenia w rundzie j^* i podążali ścieżką \mathcal{F} , zostali „zaokrągleni w dół” co najwyżej $\log_2 x - 1$ razy. Stąd da się już łatwo wykazać, że z grupy, która wyruszyła w rundzie j^* , co najmniej jeden agent dotrze do liścia f . Jeżeli

wypuścimy z korzenia co najmniej $a = \left\lceil \frac{D \log_2 n}{\log_2(x/(2n))} \right\rceil$

grup agentów, to jedna z nich wyeksploruje dowolnie wybrany liść f , czyli a grup wyeksploruje całe drzewo. Całkowity czas eksploracji to

$a + D - 1 \leq D \cdot \left(1 + \frac{\log_2 n}{\log_2(x/(2n))}\right)$, ponieważ tyle rund potrzeba, żeby a -ta grupa dotarła do liści. Łączna liczba użytych agentów to co najwyżej

$x \cdot D \cdot \left(1 + \frac{\log_2 n}{\log_2(x/(2n))}\right)$. Ustalając $x = n^c/b$ dla odpowiednio dobranej stałej b , dostajemy:

Twierdzenie. Dla dowolnego ustalonego $c > 1$ i znanego n problem eksploracji drzew może być rozwiązany w czasie $D \cdot \left(1 + \frac{1}{c-1} + o(1)\right)$ przy użyciu $\lceil Dn^c \rceil$ agentów.

Notacja $o(1)$ oznacza funkcję, która dąży do 0 dla n dążącego do nieskończoności. Zauważmy, że znajomość n jest potrzebna algorytmowi jedynie do podziału zespołu wszystkich k agentów na grupy po x . Da się skonstruować algorytm, który eksploruje w czasie $O(D)$, bez znajomości n , używając Dn^c agentów.

Uwagi końcowe

- Można wykazać, że nie da się eksplorować szybciej niż w czasie $D \cdot \left(1 + \frac{1}{c} - o(1)\right)$, czyli jesteśmy już dość blisko optymalnego algorytmu.
- Algorytm można uogólnić na dwa sposoby. Można przerobić na wersję rozproszoną, gdzie agenci podejmują suwerenne decyzje, bazując na swojej wiedzy, i mogą się komunikować z innymi agentami będącymi w tym samym wierzchołku. Można też w ten sposób eksplorować dowolne grafy. Co ciekawe, oba uogólnienia nie dodają zbyt dużo do czasu eksploracji, czyli cała trudność problemu leżała w „centralnie sterowanej” eksploracji drzew.
- Czytelników, którzy zastanawiają się, czy to podejście da się zastosować dla mniejszej grupy agentów, gorąco zachęcam do próbowania.

Wszechświaty wyspowe

Agnieszka JANIUK Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

Chyba każdy z nas przynajmniej raz w życiu zastanawiał się nad tym, jakie jest jego miejsce we wszechświecie. Z punktu widzenia ludzkości istotne jest pytanie o to, czy jesteśmy w nim sami, czy istnieją inne cywilizacje. A jeśli istnieją, to jak daleko od nas mogą się znajdować i czy komunikacja z nimi będzie kiedykolwiek możliwa.

Pytania tego typu, już od czasów Immanuela Kanta, zadawali sobie filozofowie. Myśliciel z Królewca w połowie XVIII wieku stworzył koncepcję wszechświatów wyspowych. W pracy pt. „Ogólna historia naturalna i teoria nieba” podał niezwykle śmiałą, aczkolwiek opartą jedynie na intuicji, hipotezę kosmologiczną. Zgodnie z nią siła przyciągania, jaką obdarzona jest materia, definiuje strukturę świata jako całości. Dzięki niej powstają układy planetarne, układy gwiazdowe, a dalej kolejne, systematyczne układy wyższych rzędów. Znanе w jego czasach mgławice uważał za odległe układy gwiazd, leżące poza obszarem Drogi Mlecznej. Tę ostatnią trafnie zinterpretował jako zrzutowany na sferę niebieską dysk utworzony z gwiazd, wśród których znajduje się nasze Słońce.

Zainteresowani tym zagadnieniem astronomowie zaczęli w systematyczny sposób badać obiekty mgławicowe. Katalog opracowany przez Williama Herschela liczył około 2500 obiektów, zaś po uzupełnieniach Johna Dreyera, opracowany przez New General Catalogue (NGC) pod koniec XIX wieku liczył już prawie 8000 obiektów. Kolejne uzupełnienia, Index Catalogue (IC), rozszerzyły jego zawartość, ale jedynym kryterium łączącym wszystkie obiekty był ich wygląd: przypominały rozmyte plamki światła. Nieznana była jednak natura tych mgławic, a obserwacje pokazywały, że niektóre z nich miały widmo z prążkami charakterystycznymi dla gorącego gazu, zaś inne miały widma ciągłe, podobne do widm pobliskich gwiazd.

Aby móc stwierdzić, czy widoczne w obiektywie teleskopu mgławice są, jak mówiono, innymi wyspami, czyli układami gwiazd podobnymi do Drogi Mlecznej, ale niezależnymi od niej, należało zbadać, po pierwsze, rozmiary samej Drogi Mlecznej, a po drugie, odległości do mgławic.

W 1918 roku Harlow Shapley zaproponował nowy model naszej Galaktyki, o doprawdy ogromnych rozmiarach. Niemożliwe więc było, aby mgławice znajdowały się poza nią – ani te gazowe, które istotnie są podświetlanymi promieniowaniem gwiazd obłokami gazu, ani mgławice spiralne. W ustaleniu odległości pomocna miała okazać się obserwacja gwiazdy nowej, która pojawiła się w mgławicy Andromedy M31. Metoda badawcza polegała na wyznaczeniu maksymalnej jasności gwiazdy i porównaniu jej z wykalibrowanymi wybuchami innych nowych gwiazd zaobserwowanych w naszej Galaktyce – na jej podstawie Shapley stwierdził, że Andromeda z pewnością znajduje się w obrębie Drogi Mlecznej. Podobnie zakwalifikował inną mgławicę, M101, w której badania ruchów własnych gwiazd pozwoliły wyznaczyć prędkość kątową rotacji. Znaczna jej wartość, 0,02 sekundy łuku na rok, w połączeniu z dużymi rozmiarami obiektu (jeśli miałby być on podobnych rozmiarów jak Droga Mleczna), implikowałaby prędkości liniowe przekraczające prędkość światła.

Uznano zatem, że M101 nie może być dużych rozmiarów galaktyką, ale małym, pobliskim obiektem.

Obecnie wiemy, że zarówno model Galaktyki opracowany przez Shapleya (nie wziął pod uwagę efektu ekstynkcji międzygwiazdowej), jak i odległość wyznaczona do M31 (nie rozróżniano wówczas gwiazd nowych od supernowych, ani teoretycznie, ani obserwacyjnie), były częściowo błędne. Niemniej jednak historia ta pokazuje, że sam sposób rozumowania uczonego był logicznie poprawny, a luki wynikały jedynie z interpretacji danych obserwacyjnych, nie dziwnego więc, że odkrycie prawdy o naturze wszechświatów wyspowych nastąpiło znaczących trudności.

Jednym ze zwolenników idei Kanta był Heber Curtis, a słynna debata między Curtisem i Shapleyem odbyła się w 1920 roku przed zgromadzeniem Narodowej Akademii Nauk w Waszyngtonie. Argumenty Shapleya wydawały się nie do podważenia. Dowodził on, na przykład, że mgławice spiralne nie są galaktykami podobnymi do Drogi Mlecznej, ponieważ mają inne charakterystyki widmowe, na przykład, ich dyski są bardziej niebieskie niż zagęszczenia centralne, nie widać również linii absorpcyjnych charakterystycznych dla widm gwiazd obserwowanych w pobliżu Słońca. Różnice te wyjaśnił dopiero ćwierć wieku później Walter Baade, który wprowadził klasyfikację populacji gwiazdowych. Koronnym argumentem Shapleya była tzw. sfera unikania. Jak się wydaje, mgławice spiralne „unikają” płaszczyzny naszej Galaktyki, ponieważ obserwuje się je głównie w kierunku biegunów. Zauważono ponadto, że wiele mgławic oddala się od nas z dużymi prędkościami. Shapley wywnioskował zatem, że to Droga Mleczna wywiera wpływ na mgławice, powodując ich ucieczkę. Rozumowanie Shapleya sprowadzało się więc w końcu do tego, że powinna istnieć jakaś nieznana siła odpychająca, która działa w Galaktyce – wyjaśniałaby ona obydwie te zjawiska.

Heber Curtis przypuszczał, że „sfera unikania” może być efektem przesłaniania niektórych obiektów przez pył. Taki poprzeczny pas ciemnego pyłu był widoczny w niektórych obiektach mgławicowych – jeśli więc są one innymi Galaktykami, a z kolei nasza jest do nich podobna, to w Drodze Mlecznej też możliwe jest istnienie w płaszczyźnie równikowej ciemnego pasa, który zasłania niektóre mgławice. Z punktu widzenia debaty twierdzenie Curtisa wyglądało na „machanie rękami”. Takiego pasa nikt nie widział, ponadto nie odnosił się on w ogóle do problemu ucieczki mgławic. A jednak okazało się, że to ten, obdarzony intuicją, wyobraźnią i pragnący przede wszystkim określić naturę mgławic uczoney miał rację...

W 1923 roku niezbitych dowodów potwierdzających te stwierdzenia dostarczył Edwin Hubble, który zidentyfikował cefeidę w M31. Na podstawie relacji między okresem pulsacji cefeidy a jej jasnością można było określić odległość do obiektu, co umiejscawiało ją daleko poza krańcami Drogi Mlecznej. To pionierskie odkrycie otworzyło całą nową dziedzinę nauki: astronomię pozagalaktyczną. Nie powstałaby ona pewnie, gdybyśmy intuicję i wyobraźnię w nauce porzucili całkowicie na rzecz suchej logiki.

Interferencja dwóch atomów

Od początku XVIII wieku interferencja uważana jest przez kolejne pokolenia wyedukowanych za dowód na falową naturę światła. Mechanika kwantowa spłynęła po nich jak po gęsi, skutkując powstaniem potworka *dualizmu korpuskularno-falowego*. Paszтет ten jest aktualnie serwowany w dawkach o różnej toksyczności w standardowym procesie edukacji.

Wynika z tego przeświadczenie współczesnego wyedukowanego o zachodzeniu interferencji światła dzięki wzajemnemu wzmacnianiu lub wygaszaniu fotonów podążających do celu różnymi drogami.

Na szczęście wnikliwi Czytelnicy *Delty* mają świadomość, że, zgodnie z mechaniką kwantową, to istnienie różnych możliwych dróg dla pojedynczego fotonu odpowiada za tego typu efekty. Zostały przecież przeprowadzone doświadczenia, w których obraz interferencyjny powstaje właśnie poprzez rejestrację pojedynczych fotonów.

Kwantowe zjawisko interferencji nie ogranicza się do światła. Odpowiednik dwuszczelinowego doświadczenia Younga został już przeprowadzony dla tak masywnych pojedynczych obiektów jak cząsteczki fulerenu (nanoskopowa piłka „grochowa”, o szkielecie z sześćdziesięciu atomów węgla znajdujących się w wierzchołkach dwudziestościanu ściętego).

Interferencja par (i większej liczby) obiektów jest jednak możliwa pod warunkiem zaaranżowania podziału czegoś między tymi obiektami w sposób uniemożliwiający rozróżnienie, co któremu obiektowi się dostało. Najprościej jest, gdy obiekty są nierozróżnialne. Wtedy tym czymś, co jest dzielone, może być droga, którą obiekty podążają.

Trzy dekady temu taki eksperyment dla fotonów przeprowadzili Hong, Ou i Mandel. Para nierozróżnialnych kwantów rozlatuje się w dwóch kierunkach. Następnie każdy z fotonów odbija się od odpowiednio ustawionych luster, po czym kwanty te padają na lustro półprzepuszczalne. Każdy z fotonów z równym prawdopodobieństwem przechodzi albo odbija się od tego lustra. Są cztery możliwości. W pierwszych dwóch kwanty albo oba przechodzą, albo oba się odbijają, trafiając do różnych detektorów. W pozostałych dwóch przypadkach jeden przechodzi, a drugi się odbija (lub na odwrót), trafiając do tego samego (jednego z dwóch) detektora. Jednak na skutek interferencji fotony zawsze kierują się do tego samego detektora (interferencja konstruktywna), nigdy do dwóch różnych (interferencja destruktywna).

Oczywiście, efekt występuje o tyle, o ile fotony docierają do lustra półprzepuszczalnego jednocześnie.

W eksperymencie obserwuje się zanik rejestracji fotonów w różnych detektorach w miarę dostrajania tej jednoczesności.

W pracy [1] opublikowano wyniki analogicznego eksperymentu wykonanego dla atomów ^4He . Para atomów jest wybijana z kondensatu Bosego–Einsteina w górę, z różnymi prędkościami (12,1 cm/s oraz 7 cm/s), wzdłuż osi głównej elipsoidalnego kondensatu poprzez oddziaływanie z przemieszczającą się siecią optyczną. Następnie pułapka optyczna utrzymująca kondensat oraz ta dodatkowa sieć są wyłączane, a atomy zaczynają spadać swobodnie w kierunku detektora.

Po 500 mikrosekundach od wybicia włączana jest druga sieć optyczna, od której atomy odbijają się (dyfrakcja Bragga) w taki sposób, że po około 500 mikrosekundach znajdują się w tym samym miejscu. Wtedy ta druga sieć włączana jest jeszcze raz na połowę poprzedniego czasu, realizując funkcję lustra półprzepuszczalnego. W ten sposób atomy poruszają się po różnych trajektoriach aż do momentu, w którym z równym prawdopodobieństwem mogą pozostać na swojej trajektorii lub przeskoczyć na drugą. Synchronizację można regulować poprzez dobór okresu między realizacją odbicia od kryształu optycznego (sieci optycznej) oraz realizacją lustra półprzepuszczalnego za pomocą tego kryształu.

Zgodnie z oczekiwaniami obserwowany jest zanik częstości zliczeń rozdzielonych w czasie (odpowiednik dwóch detektorów w oryginalnym eksperymencie HOM z fotonami) dla optymalnego dostrojenia.

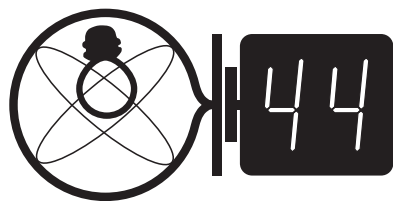
Wynik nie jest zaskoczeniem. Jest natomiast w jawnej sprzeczności z niekwantową intuicją (zbiorem przesądów przyswajanych w procesie standardowej edukacji).

Za swoje główne osiągnięcie autorzy uznają realizację dwuatomowego źródła. Wskazują, że wyrazistość tego typu interferencji może być użyta do oceny jakości takich źródeł. Mogą one doprowadzić do podobnego rozwoju w szeroko pojętej dziedzinie przetwarzania informacji kwantowej, do jakiego doprowadziły źródła dwufotonowe.

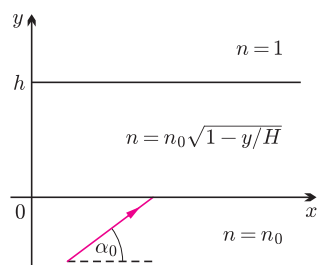
Piotr ZALEWSKI

[1] R. Lopes, A. Imanaliev, A. Aspect, M. Cheneau, D. Boiron oraz C.I. Westbrook, *Atomic Hong–Ou–Mandel experiment*, *Nature*, 2015, 520(7545):66; DOI: 10.1038/nature14331.

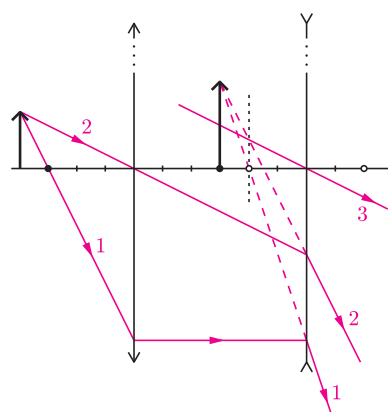
Klub 44



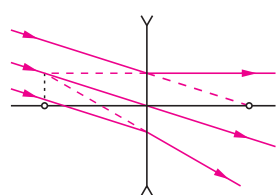
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2015



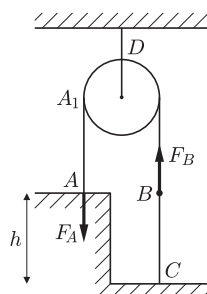
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie delta.mi.edu.pl

Zadania z fizyki nr 600, 601

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

600. Naczynie o objętości $2V = 20$ l rozdzielone jest na dwie równe części nieruchomą przegrodą. Do jednej części naczynia wprowadzono argon o masie $m_A = 20$ g, do drugiej wodoru o masie $m_H = 2$ g. Przez przegrodę może przenikać tylko wodoru. Jakie ciśnienia ustala się w obu częściach naczynia po ustaleniu się stanu równowagi? Temperatura w części naczynia zawierającej argon wynosi $T_1 = 300$ K, w drugiej części $T_2 = 600$ K. Masy molowe argonu i wodoru są odpowiednio równe $m_A = 40$ g/mol, $m_H = 2$ g/mol.

601. Między dwoma ośrodkami o współczynnikach załamania $n_0 > 1$ i $n_1 = 1$ znajduje się warstwa ośrodka, w którym współczynnik załamania zmienia się zgodnie ze wzorem $n = n_0 \sqrt{1 - y/H}$, gdzie $H = \text{const}$ (patrz rys. 1). Grubość warstwy wynosi $h = H(1 - 1/n_0^2)$. Z ośrodka o współczynniku załamania n_0 wpada do niejednorodnej warstwy promień światła. Dla jakich wartości kąta α_0 promień wróci do optycznie gęstszego ośrodka? Dla jakiej wartości tego kąta odległość między punktami wejścia i wyjścia promienia będzie największa? (Wskazówka: rozważ ruch punktu materialnego, który porusza się po torze promienia.)

Rozwiązania zadań z numeru 2/2015

Przypominamy treść zadań:

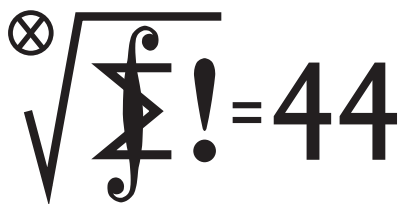
592. Układ składa się z dwóch cienkich soczewek o wspólnej osi optycznej: skupiającej o ogniskowej $f_1 = 3$ cm i rozpraszającej o ogniskowej $f_2 = -2$ cm, ustawionych w odległości $d = 6$ cm. Przedmiot znajduje się w odległości $x_1 = 4$ cm od soczewki skupiającej. Znaleźć konstrukcyjnie położenie obrazu po przejściu promieni przez układ.

593. Cienki, nierozciągliwy łańcuszek o zaniedbywalnie małych ogniwach przerzucony jest przez nieruchomy bloczek (zob. rys. 4). Końce zwisających z bloczka części łańcuszka leżą na stole i na podłodze, przy czym część leżąca na stole jest wystarczająco długa i ułożona w mały kopczyk wokół punktu A (odcinek AA_1 jest pionowy). Znaleźć ustaloną prędkość wiszącej części łańcuszka. Błat stołu znajduje się na wysokości h nad podłogą. Tarcie zaniedbujemy.

592. Niech pierwszy promień wychodzący z przedmiotu przechodzi przez ognisko soczewki skupiającej, jego dalszy bieg przedstawiony jest na rysunku 2. Drugi promień przechodzi przez środek soczewki skupiającej, chcemy znaleźć jego kierunek po przejściu przez soczewkę rozpraszającą. Wiemy, że gdy na soczewkę rozpraszającą pada równoległa wiązka światła pod pewnym kątem do osi optycznej, przedłużenia promieni przechodzących przez soczewkę przecinają się w jej płaszczyźnie ogniskowej (rys. 3). Na rysunku 2 narysujemy trzeci promień pomocniczy, który przechodzi przez środek soczewki rozpraszającej równoległe do promienia drugiego. Przedłużenie promienia 2 przecina się z promieniem 3 w płaszczyźnie ogniskowej soczewki rozpraszającej, a z promieniem 1 tam, gdzie znajduje się szukany obraz przedmiotu. Aby sprawdzić poprawność konstrukcji, możemy wykonać obliczenia. Obraz w soczewce skupiającej powstaje w odległości $y_1 = x_1 f_1 / (x_1 - f_1) = 12$ cm. Jest on przedmiotem pozornym dla drugiej soczewki: $x_2 = d - y_1 = -6$ cm. Odległość obrazu od drugiej soczewki $y_2 = -3$ cm. Jest to obraz pozorny, który znajduje się między soczewkami w środku odległości między nimi.

593. Niech μ oznacza masę jednostki długości łańcuszka, a l długość jego odcinka ADB . Oznaczmy przyspieszenie, z jakim porusza się w pewnej chwili czasu wisząca część łańcuszka, przez a , natomiast jej prędkość w tej samej chwili przez v . Równanie ruchu odcinka BC łańcuszka ma postać: $\mu h a = \mu h g - F_B$, równanie odcinka ADB : $\mu l a = F_B - F_A$, gdzie F_A i F_B są siłami naprężenia łańcuszka odpowiednio w punktach A i B . Stąd $F_A = \mu h(g - a) - \mu a l$. Rozważmy bardzo krótki przedział czasu Δt . W tym czasie unosi się ze stołu odcinek łańcuszka o masie $\Delta m = \mu v \Delta t$. Zmiana pędu tego odcinka $\Delta m v = F_A \Delta t$, stąd $\mu v^2 = F_A$. Ustalona prędkość łańcuszka, gdy $a \rightarrow 0$, wynosi $v_{\max} = \sqrt{gh}$.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
689 ($WT = 1,60$) i 690 ($WT = 2,45$)
z numeru 11/2014

Wojciech Maciak	Warszawa	43,85
Piotr Kumor	Olsztyn	43,67
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszka	38,82
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	35,79
Paweł Najman	Kraków	31,92
Janusz Olszewski	Warszawa	31,86
Krzysztof Maziarz	Kraków	31,40

Zadania z matematyki nr 703, 704

Redaguje Marcin E. KUCZMA

703. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A oraz C są równe, przy tym ostre. Punkty P, Q , leżące odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}, AD^{\rightarrow}$, są wyznaczone przez warunki $|CP| = |CQ| = |CA|$. Wykazać, że długość odcinka PQ nie przekracza obwodu trójkąta ABD .

704. Wyznaczyć największą liczbę A oraz najmniejszą liczbę B , takie że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniona jest nierówność

$$A \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leq ab + 2bc + cd \leq B \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Zadanie 704 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2015

Przypominamy treść zadań:

695. Znaleźć wszystkie pary wielomianów rzeczywistych P, Q , spełniające równanie

$$\frac{P(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{Q(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

696. Wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów, jakie można rozmieścić na płaszczyźnie tak, by każde trzy spośród nich były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

695. Oznaczmy przez $L(x)$ oraz $R(x)$ lewą i prawą stronę postulowanego równania

$$L(x) = (x^2 + x + 1)P(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)Q(x^2 + x + 1) = R(x).$$

Przyjmijmy, że P, Q nie są wielomianami zerowymi. Jasne, że muszą mieć jednakowy stopień $n \geq 1$ oraz równe współczynniki wiodące:

$$P(x) = ax^n + F(x), \quad Q(x) = ax^n + G(x) \quad (a \neq 0);$$

F, G – wielomiany stopni $\leq n - 1$.

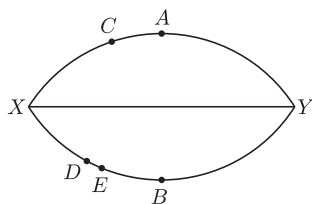
Tak więc

$$\begin{aligned} P(x^2 - x + 1) &= a(x^2 - x + 1)^n + F(x^2 - x + 1) = \\ &= ax^{2n} - nax^{2n-1} + (\text{wielomian stopnia } \leq 2n - 2); \\ Q(x^2 + x + 1) &= a(x^2 + x + 1)^n + G(x^2 + x + 1) = \\ &= ax^{2n} + nax^{2n-1} + (\text{wielomian stopnia } \leq 2n - 2); \end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned} L(x) &= ax^{2n+2} + (a - na)x^{2n+1} + (\text{wielomian stopnia } \leq 2n); \\ R(x) &= ax^{2n+2} + (na - a)x^{2n+1} + (\text{wielomian stopnia } \leq 2n). \end{aligned}$$

Stąd $a - na = 0$, czyli $n = 1$, czyli $P(x) = ax + b$, $Q(x) = ax + c$. Podstawiając w wyjściowym równaniu $x = 0$ oraz $x = 1$, otrzymujemy zależności $b = c$ oraz $3(a + b) = 3a + c$, skąd $b = c = 0$. Ostatecznie więc $P(x) = Q(x) = ax$; przyjęliśmy, że $a \neq 0$ – wszelako dla $a = 0$ dostajemy parę wielomianów zerowych, które też są rozwiązaniem. Oczywiście każda para postaci $P(x) = Q(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$ – dowolna stała) spełnia zadane równanie.



696. Wierzchołki oraz środek pięciokąta foremnego dają przykład szóstki punktów o podanej własności. Pokażemy, że siedmiu punktów nie da się rozmieścić w wymagany sposób.

Przypuśćmy, że jest to możliwe i niech A, B będą dwoma punktami z tej siódemki, których odległość jest maksymalna. Pozostałe punkty leżą w „soczewce”, ograniczonej łukami okręgów o środkach A, B i promieniu $|AB|$. Skoro każdy z tych pięciu punktów ma wraz z A, B tworzyć trójkąt równoramienny, mogą one leżeć jedynie na owych łukach oraz odcinku XY , łączącym ich wspólne końce. Na samym odcinku XY leżą co najwyżej dwa punkty (trójka współliniowa nie tworzy trójkąta). Pozostałe trzy punkty leżą na łukach XAY, XBY (bez końców X, Y).

Nie mogą wszystkie trzy leżeć na jednym z tych łuków, np. XAY , bowiem wraz z punktem A dałoby to czwórkę

punktów, spośród których pewne trzy nie tworzyłyby trójkąta równoramiennego. Zatem na jednym łuku, np. XAY , leży jeden punkt C , zaś na łuku XBY dwa punkty D, E . Przyjmijmy, że C leży między A i X .

Każdy punkt łuku BY jest oddalony od C o odcinek dłuższy niż $|AB|$, więc D, E muszą być punktami łuku BX . Każdy z odcinków AC, CD ma wtedy długość mniejszą niż $|AD|$ ($= |AX| = |AB|$); warunek równoramienności trójkąta ACD wymusza równość $|AC| = |CD|$. Zastępując w tym rozumowaniu D przez E , dostajemy równość $|AC| = |CE|$. Wobec tego $|CD| = |CE|$. To już jest oczekiwana sprzeczność, bo jedynym punktem łuku XAY , położonym w równych odległościach od D i E , czyli na symetralnej odcinka DE , jest punkt A .

Stąd odpowiedź: największa liczba punktów, o jakich mowa w zadaniu, wynosi sześć.

Prosto z nieba: Władca pierścieni



Fotomontaż: M. Kenworthy/Leiden

Saturn, planeta 8,5 raza większa od Ziemi i ważąca prawie 100 razy więcej, wyróżnia się na tle innych charakterystycznymi pierścieniami. Pozostałe trzy gazowe giganty Układu Słonecznego również mają pierścienie, jednak te otaczające Jowisza, Urana i Neptuna są o wiele mniejsze i rzadsze od pierścieni Saturna, dlatego zostały odkryte dopiero podczas misji satelitarnych w latach 70. XX wieku. Pierścienie składają się z niewielkich cząstek lodowych i skalnych o różnych rozmiarach (od μm do m); są przy tym niezwykle cienkie (grubość rzędu km przy promieniu rzędu kilkudziesięciu tysięcy km). Ich stabilność w długiej skali czasowej jest zapewniona przez obecność „satelitów pasterskich”, znajdujących się z pierścieniami w rezonansie orbitalnym. Księżyce te odpowiadają także za obserwowane „przerwy” w pyłowym dysku. Mimo wielu badań nie jest do końca jasne, czy pierścienie są zjawiskiem niedawnym, przejściowym, czy też pozostałością po burzliwej historii wczesnego Układu Słonecznego.

Budowę pierścieni J1407b poznano podczas analizy krzywej zmian blasku gwiazdy zaćmiewanej przez planetę i pierścienie.

Przykład naszego układu planetarnego pokazuje, że pierścienie to naturalna cecha gazowych gigantów – tego typu formacje powinny znajdować się też wokół wielu egzoplanet. Na całe szczęście od paru lat trwa złota era masowych odkryć pozaziemskich układów planetarnych, a obserwatorzy wręcz prześcigają się w dostarczaniu danych o obiektach dziwacznych i ekstremalnych. Wystarczy wspomnieć o J1407b (masywnej egzoplanecie lub brązowym karle), wokół którego już w 2012 r. odkryto zestaw pierścieni tak okazałych, że w porównaniu z nim Saturn wygląda jak drugoligowy Uran. Układ pierścieni J1407b rozciąga się na 120 mln km, czyli jest około 200 razy większy od Saturnowego, dlatego obiekt szybko zyskał miano „super-Saturna na sterydach”. Gdyby J1407b zastąpił Saturna w Układzie Słonecznym, byłby dobrze widoczny na niebie nawet za dnia, a jego rozmiar kątowy wielokrotnie przewyższałby rozmiar tarczy Księżyca (ilustracja powyżej). Super-Saturn wchodzi w skład młodego układu planetarnego: system pierścieni powstał niedawno, o czym świadczy ich duża masa, szacunkowo równa masie Ziemi. Badacze spekulują, że w ciągu paru milionów lat pierścienie super-Saturna będą zanikać kosztem formujących się egzoksiężyców.

Michał BEJGER

Niebo w czerwcu

Czerwiec rozpoczyna się pełnią Księżyca (2 VI). Dzień przed pełnią Księżyc przemknie obok Saturna ($0,9^m$) – odległość koniunkcji wyniesie $1,5^\circ$. Druga, podobna koniunkcja będzie mieć miejsce 29 VI. By obserwować te zjawiska, należy wieczorem skupić wzrok na kierunku wschodnim (wysokość, na której zajdzie koniunkcja, będzie, niestety, niewielka, około 20°), odszukując przy okazji gwiazdozbiór Wagi i charakterystyczne szczytce Skorpiona z czerwonym Antaresem, wynurzające się w tym czasie spod wschodniego horyzontu.

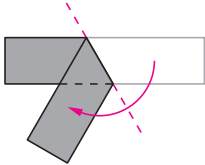
Parę dni później (5 VI) będziemy mieli okazję obserwować Wenus w momencie największej elongacji wschodniej. Planeta będzie świecić bardzo jasno (-4^m) w odległości około 45° od Słońca, w najwyższym z punktu widzenia ziemskiego obserwatora punkcie swojej orbity. 13 VI Wenus znajdzie się blisko dobrze widocznej gołym okiem (jasność $3,7^m$) gromady otwartej M44 (Żłóbka) w gwiazdozbiórze Raka; odległość na sferze niebieskiej pomiędzy tymi obiektami wyniesie około $0,5^\circ$.

Również w gwiazdozbiórze Raka, nieco powyżej Wenus i w kierunku południowym znajdziemy bardzo jasnego Jowisza ($-1,7^m$).

Kolejne wydarzenia czerwcowego nieba to: nów Księżyca 16 VI oraz przesilenie letnie 21 VI (o godzinie 18:38) – noc z 21 na 22 VI będzie w tym roku najkrótsza. Kilka dni później Merkury o jasności $0,6^m$ oddali się na maksymalną odległość po zachodniej stronie Słońca (22° , największa elongacja zachodnia). Obserwacje należy przeprowadzić wczesnym rankiem, w porze wschodu Słońca, czyli około 4:30 rano.

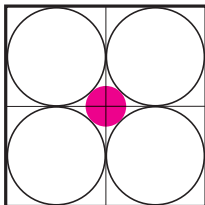
Wspomnianego na początku Saturna możemy wykorzystać także do namierzenia słabego roju Theta Ophiuchid, którego radiant w Wężowniku znajduje się powyżej i w kierunku wschodnim od czerwcowej pozycji planety. Aktywność roju nie jest wielka (parę zdarzeń na godzinę), ale maksimum przypadające w połowie miesiąca w czasie niezbyt jasnego Księżyca daje szansę na obserwację bolidów.

M. B.

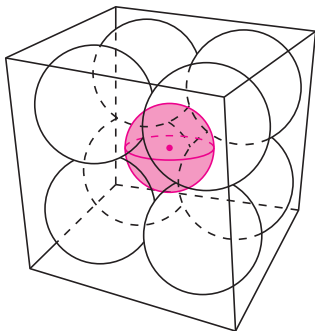


Rys. 1

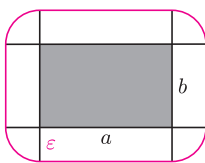
Analogiczny problem dla czworokątów opisano w *deltoidzie* 9/2010.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. ε -otoczka prostokąta, jej pole równe jest $ab + 2(a + b)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$.

Zadanie 4 pochodzi z książki K. Ciesielskiego *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki*, Omega, 2012.

Zmieści się?

Joanna JASZUŃSKA

1. Prostokątny pasek papieru można przykryć pewnym kołem. Pasek ten składamy wzdłuż dowolnej prostej (rys. 1). Czy nadal można go przykryć tym samym kołem?
2. Czy trójkąt może zmieścić się w kole mniejszym od koła na nim opisanego?
3. a) Kwadrat o boku 2 dzielimy na cztery kwadraty jednostkowe i w każdy z nich wpisujemy koło. Koło K ma środek w środku kwadratu i jest styczne zewnętrznie do każdego z pozostałych kół (rys. 2). Wyznacz jego promień r .
b) Wyznacz promień analogicznej kuli K dla sześcianu o krawędzi 2 i ośmiu kul o średnicy 1 (rys. 3).
c) Wyznacz promień analogicznej n -wymiarowej kuli K dla n -wymiarowego hipersześcianu o krawędzi 2 i 2^n kul n -wymiarowych o średnicy 1.
4. Poczta w Bęcwałonii nie przyjmuje do przesyłki paczek dłuższych niż 1 metr; firmy kurierskie akurat strajkują. Pan Fletowski chce przesłać pilnie swój cenny flet o długości 1,65 m. Czy istnieje możliwość przesłania fletu?
5. Poczta w Pudełkolandii przewozi tylko prostopadłocienne paczki, a opłata za przesyłkę równa jest sumie długości, szerokości i wysokości opakowania. Czy można zaoszczędzić, umieszczając pudełko o większej sumie długości wymiarów wewnątrz pudełka o mniejszej sumie?

Rozwiązania

- R1.** Tak. Koło przykrywające pasek można składać wraz z nim, wtedy złożony pasek mieści się w złożonym kole, które można przykryć kołem niezłożonym. \square
- R2.** Tak, dowolny trójkąt rozwartokątny zmieści się w kole, którego średnicą jest jego najdłuższy bok – cięciwa koła opisanego. \square
- R3.** a) Średnica każdego z czterech kół równa jest 1, a przekątna kwadratu jednostkowego ma długość $\sqrt{2}$, stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$. \square
b) Średnica każdej z ośmiu kul równa jest 1, a przekątna sześcianu jednostkowego ma długość $\sqrt{3}$, stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$. \square
c) Średnica każdej z 2^n kul równa jest 1, a przekątna hipersześcianu jednostkowego ma długość \sqrt{n} , stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{n} - 1)$. \square
- Dla $n > 4$ uzyskujemy $r > \frac{1}{2}$, więc „mała” kulka K jest większa od każdej z „dużych” kul, a dla $n > 9$ mamy $r > 1$, czyli kula K wystaje poza hipersześcian!
- R4.** Tak. Pan Fletowski może umieścić flet wzdłuż głównej przekątnej sześciennego pudła o krawędzi długości 1 m – jej długość to $\sqrt{3} \approx 1,73$ m. \square
- R5.** Nie. Rozważmy ε -otoczkę pudełka o wymiarach $a \times b \times c$, czyli zbiór złożony z wszystkich punktów z jego wnętrza oraz punktów odległych od niego o mniej niż ε (rys. 4). Ma ona kształt większego prostopadłościanu o zaokrąglonych krawędziach i rogach. Jej objętość równa jest
- $$abc \text{ (objętość wyjściowego prostopadłościanu) } +$$
- $$+ 2(ab + bc + ca)\varepsilon \text{ (objętości prostopadłościanów zbudowanych na ścianach) } +$$
- $$+ (a + b + c)\pi\varepsilon^2 \text{ (fragmenty na równoległych krawędziach sumują się do walców o promieniu podstawy } \varepsilon) +$$
- $$+ \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \text{ (fragmenty na rogach prostopadłościanu sumują się do kuli o promieniu } \varepsilon).$$
- Zauważmy, że jeśli pudełko o wymiarach $d \times e \times f$ da się włożyć do pudełka o wymiarach $a \times b \times c$, to również ε -otoczka pierwszego mieści się w ε -otoczce drugiego. To z kolei oznacza, że różnica objętości jest nieujemna:
- $$abc + 2(ab + bc + ca)\varepsilon + (a + b + c)\pi\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 - def - 2(de + ef + fd)\varepsilon - (d + e + f)\pi\varepsilon^2 - \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \geq 0.$$
- Załóżmy, że $a + b + c \neq d + e + f$. Powyższa różnica objętości jest wówczas wielomianem stopnia 2 zmiennej ε . Skoro ma on wartość nieujemną dla każdego $\varepsilon > 0$, to musi mieć dodatni współczynnik przy najwyższej potęgde ε . Stąd $a + b + c > d + e + f$, co kończy dowód. \square