

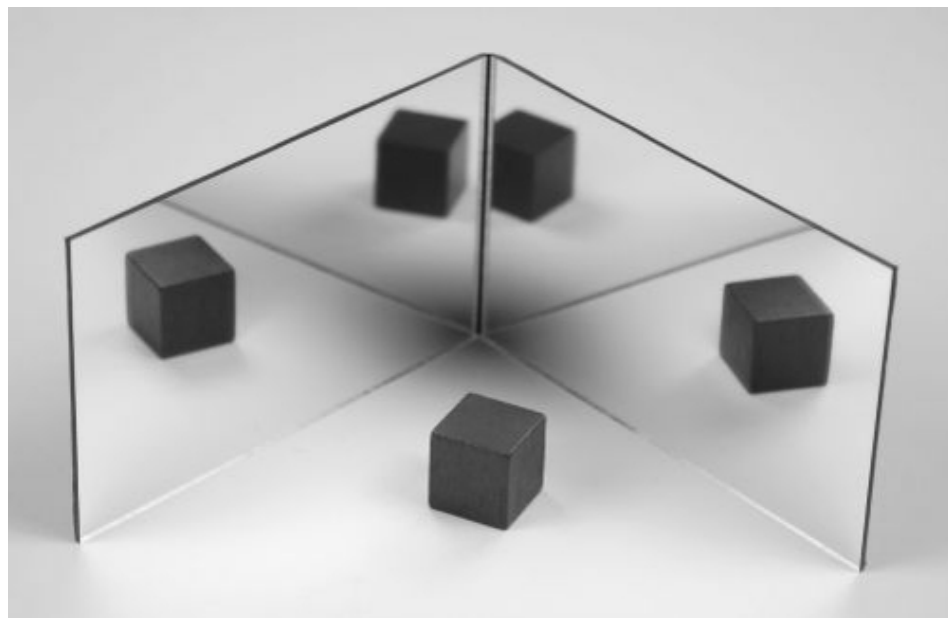


ISSN 1643-1987
P-ISSN 1643-1987
E-ISSN 1643-1987

SPIS TREŚCI NUMERU 8 (495)

Twierdzenie o powracaniu i pewne zagadki nierównowagowej mechaniki statystycznej (I) <i>Krzysztof Turzyński, Henryk Żołądek</i>	str. 1
Jakich wielościanów nie ma, a jakie są? <i>Marek Kordos</i>	str. 4
Prosto w środek <i>Łukasz Rajkowski</i>	str. 6
Kłopoty z komunikacją <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 7
Wycieczka na Marsa <i>Lech Falandysz</i>	str. 9
Architekci i algorytmy (2) <i>Paweł Perekieta, Tomasz Idziaszek</i>	str.12
Poziom morza na Marsie <i>Michał Bejger</i>	str.14
Logarytm – logika i rytm? <i>Adam Kolany</i>	str.14
Okręgi Carlyle'a <i>Karol Gryszka</i>	str.16
 Zadania	str.18
Informatyczny kącik olimpijski (84): Sklep ze słodyczkami <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.19
 Chińczycy nadchodzą <i>Magdalena Fikus</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Galaktyczne dinozaury	str.24
Niebo w sierpniu	str.24
 Nożyczki matematyczne <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

W następnym numerze polecamy



odbicia

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrząstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

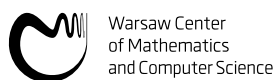
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



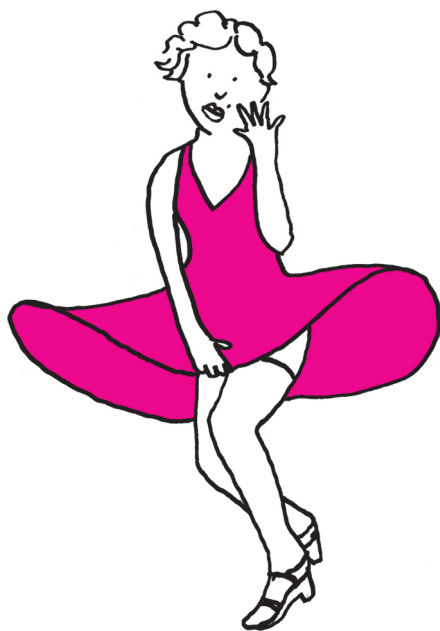
Warsaw Center
of Mathematics
and Computer Science

wcmcs.edu.pl

Twierdzenie o powracaniu i pewne zagadki nierównowagowej mechaniki statystycznej (I)

Krzysztof TURZYŃSKI, Henryk ŻOŁĄDEK*

Wymienione w tytule tematy uchodzą za trudne. Tym ważniejsze jest zacząć od rzeczy prostych i powszechnie znanych. Weźmy pewien zbiór o skończonej liczbie elementów i jego różnowartościowe przekształcenie na siebie, czyli permutację. Dla lepszego efektu wizualnego będziemy sobie wyobrażać zbiór czarnych lub białych kwadratów wypełniających pola kwadratowej tablicy 32×32 oraz permutację, dla której w i -tym wierszu i j -tej kolumnie tablicy umieszczamy kwadrat poprzednio znajdujący się w wierszu o numerze $(i + j) \bmod 32$ oraz kolumnie o numerze $(2i + j) \bmod 32$. Wyniki wielokrotnego złożenia takiej permutacji dla pewnego wyjściowego ułożenia kwadratów przedstawione są na rysunku 1: po wykonaniu 32 iteracji otrzymujemy taki sam wzór jak na początku.



Rys. 1

Czy podobne efekty – powracanie zbioru do stanu wyjściowego po wielokrotnym wykonaniu pewnego przekształcenia – możemy zaobserwować także dla zbiorów nieskończonych? Aby odpowiedzieć na to, intuicyjnie zrozumiałe, ale nie do końca precyzyjne pytanie, przypatrzmy się jeszcze trzem dość prostym przykładom.

Obrót na okręgu. Niezbyt skomplikowanym przykładem zbioru nieskończonego jest odcinek $[0, 1]$. Żeby uniknąć kłopotów związanych z tym, iż odcinek ma końce, możemy utożsamić jego lewy koniec z prawym – otrzymamy wtedy okrąg długości 1, którego punkty ponumerowane są liczbami rzeczywistymi od 0 do 1 (tyle że jedynek skleiłiśmy z zerem). Dla takiego okręgu oraz $\alpha \in (0, 1)$ określimy przekształcenie R_α następującym wzorem:

$$R_\alpha(x) = x + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor.$$

Symbol części całkowitej $\lfloor \cdot \rfloor$, występujący w tej definicji, zapewnia, że gdy liczba $x + \alpha$ przekracza 1, przekształcenie R_α umieszcza ją z powrotem na odcinku $[0, 1]$ w takiej samej odległości od 0, w jakiej liczba $x + \alpha$ znajduje się „na prawo” od 1. Z tego względu przekształcenie R_α możemy wyobrażać sobie jako przesuwanie punktów naszego okręgu o odcinek α (rys. 2). Jeżeli α jest liczbą wymierną, którą możemy zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, nietrudno będzie przekonać się, że po q -krotnym wykonaniu przekształcenia R_α każdy punkt okręgu wróci na swoje wyjściowe miejsce. Możemy tę *własność powracania* wyrazić w mądry sposób, mówiąc, że dla dowolnego punktu x_0 , leżącego na okręgu, jego *dotatnia orbita*

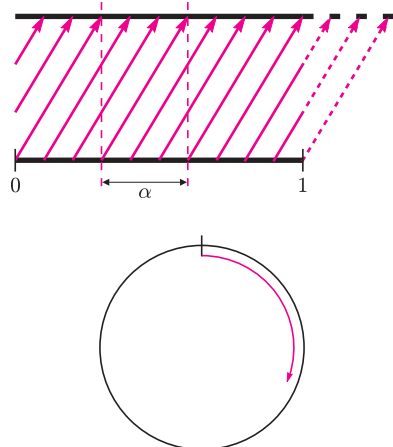
$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{R_\alpha(x_0), R_\alpha^2(x_0), R_\alpha^3(x_0), \dots\}$$

przechodzi przez punkt x_0 (oznaczamy $R_\alpha^2(x_0) = R_\alpha(R_\alpha(x_0)) = R_{2\alpha}(x_0)$, $R_\alpha^3(x_0) = R_\alpha(R_{2\alpha}(x_0)) = R_{3\alpha}(x_0)$ itd.). Dla α niewymiernego tak sformułowana własność powracania nie zachodzi, nie sposób się jednak oprzeć wrażeniu, że w wyniku wielokrotnego przekształcania punkt x_0 powróci „w pobliżu” swego położenia wyjściowego. Możemy to wyrazić następującym stwierdzeniem

Własność powracania: Dla dowolnego punktu początkowego x_0 i dowolnego jego otoczenia U orbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ przecina U .

Używając mądrych słów, moglibyśmy powiedzieć, że R_α ma własność *topologicznej tranzytywności* oraz że jest przekształceniem *prawie okresowym*.

Skośny obrót torusa. Innym prostym przykładem zbioru nieskończonego jest kwadrat o boku 1. Żeby nie kłopotać się jego brzegiem, wykonamy operację podobną do sklejanego końców odcinka, tyle że teraz należy skleić przeciwległe boki tak, by



Rys. 2. Obrót na okręgu.

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

kierunki strzałek na rysunku 3 się zgadzały. W ten sposób otrzymujemy torus. Punkty tego torusa możemy opisać dwiema współzrędnymi (x, y) odpowiednich punktów kwadratu, przy czym $0 \leq x, y < 1$. Na torusie możemy zdefiniować następujące przekształcenie:

$$T(x, y) = (x, x + y - [x + y])$$

przyporządkowujące danemu punktowi torusa pewien inny punkt. Ponieważ współrzędna x nie zmienia się przy tym przekształceniu, działanie T sprowadza się do przesuwania punktów odcinka $x = \text{const}$ o x „w górę” (lub, równoważnie, obrotu odpowiedniego okręgu o x), a zatem przekształcenia rozważanego w poprzednim przykładzie. Wynika stąd, że sformułowana powyżej własność powracania jest spełniona także dla przekształcenia T .

Siodło-węzeł na okręgu. Po tej rozgrzewce możemy przystąpić do analizy nieco trudniejszego przykładu. Rozważmy przekształcenie $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ określone wzorem:

$$T(x) = x + \frac{1}{8} \sin^2(\pi x).$$

Możemy uważać je za różnowartościowe przekształcenie okręgu na siebie. Jak wyglądają orbity tego przekształcenia? Najprościej przekonać się o tym, rysując wykres $T(x)$ i pamiętając, że $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$. Wynik iterowania przekształcenia T dla pewnego dowolnie wybranego punktu x_0 przedstawiony jest na rysunku 4. Widzimy, że dla dowolnego punktu początkowego $x_0 \neq 0$ orbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ składa się z wyrazów ciągu $x_n = T^n(x_0)$, który jest zbieżny do... No właśnie, powiedzielibyśmy odruchowo, że jest zbieżny do 1, ale utożsamiliśmy jedynekę z zerem. Widzimy zatem, że punkt 0 ma ciekawą własność: odpycha punkty leżące odeń na prawo, a przyciąga te leżące na lewo. Przez analogię do sytuacji, z jakimi spotykamy się przy przekształceniach dwuwymiarowych, możemy nazwać go punktem typu *siodło-węzeł*.

Łatwo zauważyć, że jedynie jednopunktowa orbita $\mathcal{O}^+(0) = \{0\}$ punktu 0 ma rozważaną poprzednio własność powracania. Dla $x_0 \neq 0$ orbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ rozmiąca się z dostatecznie małym otoczeniem punktu x_0 .

Miara. Na podstawie trzech przykładów doszliśmy do wniosku, że jedne przekształcenia mają własność powracania, a inne jej nie mają, przynajmniej w wersji, jaką podaliśmy. Czy nie da się lepiej? Czy można sformułować jakieś ogólniejsze twierdzenie dotyczące powracania? Okazuje się, że można. Niezbędne będzie do tego pojęcie miary zbioru, a dokładniej miary probabilistycznej.

Sama nazwa wskazuje na to, że pojęcie miary wprowadzono po to, by określać, jak „duży” jest zbiór. Ścisła definicja miary jest dość techniczna, choć intuicyjna, ograniczymy się zatem do podania własności miary. Otóż *miara* na zbiorze X jest funkcją określoną na pewnej rodzinie podzbiorów X o odpowiednich własnościach. Funkcja ta, którą będziemy oznaczać przez μ , spełnia:

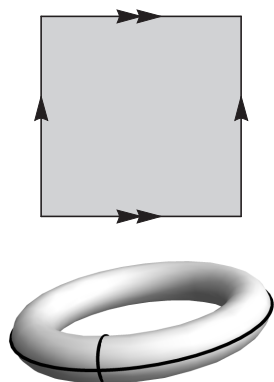
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- dla $A \subset B$ zachodzi $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$,
- jeśli A_1, A_2, \dots są parami rozłączne, to $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Miarę nazywamy *probabilistyczną*, jeśli $\mu(X) = 1$.

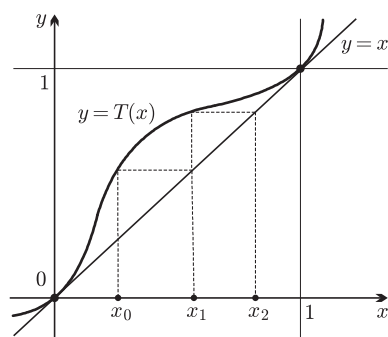
Nikt nie zdziwi się chyba, że dobrą miarą dla odcinka jest jego długość, miarą dla (otwartego) podzbioru płaszczyzny – jego pole. Rozszerzenie tej intuicji na bardziej złożone przypadki prowadzi do pojęcia *miary Lebesgue’a*, w które nie będziemy się bardziej szczegółowo zagłębiać. Istnieje wszakże jeszcze jeden prosty przykład miary. Każda gospodyni prowadząca tzw. salon wie, że o jego randze decyduje nie ogólna liczba gości, lecz liczba gości znamienitych. Najprostszym odpowiednikiem takiego pomysłu jest wyróżnienie w zbiorze X pewnego punktu x_0 i powiedzenie, że $\mu(A) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in A$, a w przeciwnym przypadku $\mu(A) = 0$. Taką miarę nazywamy *miarą Diraca* i oznaczamy δ_{x_0} ; jej uogólnienie na dowolną skończoną liczbę wyróżnionych punktów jest oczywiste.

Dla przekształcenia $T : X \rightarrow X$ miara μ jest *niezmiennicza*, jeśli $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Dla obrotu na okręgu, R_α , oczywistym przykładem miary niezmienniczej jest miara Lebesgue’a, w szczególności długość odcinka nie zmienia się przy równomiernym przesunięciu wszystkich punktów. Ale dla obrotu postaci $R_{p/q}$ są jeszcze inne miary niezmiennicze – postaci

$$(*) \quad \mu = \frac{1}{q} (\delta_{x_0} + \delta_{x_0 + \frac{1}{q}} + \dots + \delta_{x_0 + \frac{q-1}{q}}).$$



Rys. 3. Sklejenie przeciwległych boków kwadratu zgodnie z kierunkiem strzałek daje torus.



Rys. 4. Wykres funkcji

$$T(x) = x + \frac{1}{8} \sin^2(\pi x)$$

oraz graficzny sposób znajdowania wartości kolejnych iteracji tego przekształcenia.

Przeciwobrazem zbioru A przy przekształceniu $T : X \rightarrow X$ nazywamy zbiór $T^{-1} = \{x \in X : T(x) \in A\}$. Symbol T^{-n} oznacza przeciwobraz przy przekształceniu T^n .

Jeśli obrót jest niewymierny, jedyną miarą niezmienniczą jest miara Lebesgue'a. Ma ona wówczas następującą

Własność ergodyczności: Jeśli $T^{-1}(A) = A$, to $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A) = 1$; jedyne podzbiory niezmiennicze – zbiór pusty i cały okrąg – są trywialne w sensie miarowym.

W przypadku skośnego obrotu torusa naturalną miarą niezmienniczą dla T jest miara Lebesgue'a: prostokąt $[a, b] \times [c, d]$ jest przekształcany na równoległobok o wysokości $b - a$ i długości podstawy $d - c$. Ale istnieją też miary postaci

$$\mu([a, b] \times [c, d]) = \delta_{x_0}([a, b]) \cdot \mu_1([c, d]),$$

gdzie μ_1 jest miarą Lebesgue'a na okręgu (miary „skupione” na okręgu danym przez $x = x_0$) lub, dla $x_0 = p/q$, miarą daną wzorem (*).

Interesują nas często „typowe” własności, spełnione dla *prawie każdego* obiektu. Istnieją dwa sposoby rozumienia tego zwrotu: „prawie każdy” oznacza każdy z wyjątkiem elementów skończonego zbioru punktów lub każdy z wyjątkiem elementów pewnego zbioru miary zero. Będziemy się dalej posługiwać drugim znaczeniem tego zwrotu. Możemy teraz sformułować pewne bardzo ważne twierdzenie.

Twierdzenie Poincarégo o powracaniu. Niech przekształcenie $T : X \rightarrow X$ zachowuje probabilistyczną miarę μ . Wtedy dla każdego zbioru A o mierze $\mu(A) > 0$ prawie każdy punkt $x_0 \in A$ powraca do A , tzn. dla pewnego $n > 0$ zachodzi $T^n(x_0) \in A$.

Dowód. Niech B będzie zbiorem tych punktów A , które nigdy nie powracają do A . W szczególności, dla $n > 0$ i $x \in B$ mamy $T^n(x) \notin B$, czyli $x \notin T^{-n}(B)$, a więc $T^{-n}(B) \cap B = \emptyset$. Stąd

$$T^{-1}(B) \cap T^{-1-n}(B) = T^{-1}(T^{-n}(B) \cap B) = T^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Analogicznie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $T^{-k}(B) \cap T^{-k-n}(B) = \emptyset$. Zatem zbiory postaci $T^{-n}(B)$ są parami rozłączne oraz mają taką samą miarę. Gdyby zachodziło $\mu(B) > 0$, to z własności c) w definicji miary mielibyśmy $\mu(\bigcup T^{-n}(B)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B) = \infty$, co byłoby sprzeczne z tym, że $\bigcup T^{-n}(B) \subset X$ oraz $\mu(X) = 1$. Musi zatem zachodzić $\mu(B) = 0$. \square

Teraz możemy na nowo rozważyć siodło-węzeł na okręgu. Zero musi się znajdować w każdym podzbiore $A \subset X$ o dodatniej mierze niezmienniczej. Ale wtedy zwrot *prawie każdy punkt* $x_0 \in A$ oznacza, że $x_0 = 0$. Ten punkt nie opuszcza zbioru A .

Przekształcenie piekarza. Omówione na wstępie przykłady ilustrują dość szczególne mechanizmy powracania. Warto uzupełnić tę listę jeszcze jednym przykładem. Rozważmy przekształcenie kwadratu jednostkowego dane wzorem

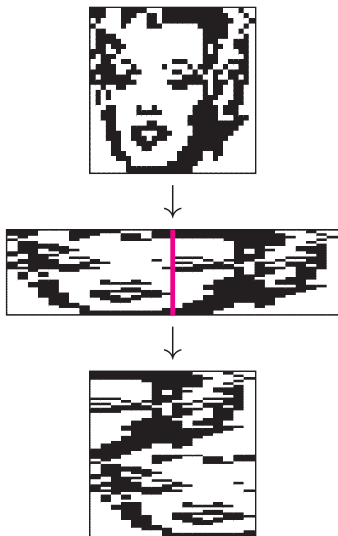
$$T(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{dla } x < \frac{1}{2}, \\ (2x - 1, \frac{y+1}{2}) & \text{dla } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Działanie tego przekształcenia pokazano na rysunku 5: spłaszcza i rozciąga ono wyjściowy kwadrat do prostokąta o podstawie 2 i wysokości $\frac{1}{2}$, następnie rozcina uzyskany prostokąt na dwa prostokąty o podstawie 1, a w końcu układa te prostokąty jeden na drugim, tak że znowu powstaje kwadrat jednostkowy. Z uwagi na to rozciąganie i ściskanie (operacje doskonale znane każdemu, kto kiedykolwiek wyrabiał ciasto drożdżowe) przekształcenie piekarza zachowuje (dwuwymiarową) miarę Lebesgue'a. Okazuje się, że przekształcenie to ma następującą

Własność mieszania: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$, czyli po dużej liczbie iteracji przekształcenia T obraz $T^n(A)$ dowolnego zbioru A rozkłada się prawie równomiernie po całym kwadracie.

Własność mieszania jest silniejsza od własności ergodyczności; ta druga wynika z pierwszej. W szczególności obrót niewymierny na okręgu nie jest mieszający, chociaż jest ergodyczny.

Podsumowanie. Chociaż dowód twierdzenia Poincarégo o powracaniu wydaje się oczywisty i mało subtelny, twierdzenie to wywoływało (i najwidoczniej nadal wywołuje) dyskusje natury filozoficznej. Są one najczęściej związane z próbami zastosowania go do układów złożonych z dużej liczby cząstek – standardowym przykładem jest gaz skupiony w połowie zbiornika, z którego usuwamy przegrodę. Tymi tematami zajmiemy się w drugiej części artykułu.



Rys. 5. Przekształcenie piekarza.

Jakich wielościanów nie ma, a jakie są?

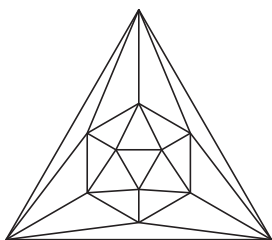
Kubuś Fatalista, bohater książki Denisa Diderota, spotkał pewnego razu rozpaczliwie płaczące dziecko. Na pytanie, co mu się stało, odpowiedziało, że kazano mu powiedzieć **A**. Cóż w tym złego? – dopytywał się Kubuś. – Bo jak powiem **A**, to każą mi powiedzieć **B** – poskarżył się malec.

Ludzie są jednak optymistami i pół wieku temu mówiliby raczej o tym, że gdy wejdzie się na kilka szczebli drabiny, to ma się ogromną ochotę wchodzić dalej. A dziś zapewne byłoby o tym, że gdy zaliczy się pewien poziom gry komputerowej, to przechodzi się do następnego.

Tu będziemy się jednak trzymać wersji Diderota.

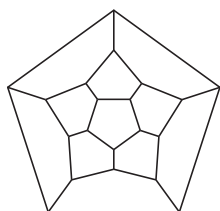
A Wykazać, że nie ma wielościanu o siedmiu krawędziach.

Jeśli wielościan ma choć jedną ścianę czworokątną, to ma co najmniej osiem krawędzi, bo z każdego wierzchołka tego czworokąta wychodzą co najmniej trzy krawędzie, z czego dwie do sąsiednich wierzchołków. Jeszcze więcej „przymusowych” krawędzi będzie, gdy któraś ze ścian będzie miała więcej niż 4 boki. Zostały nam wielościany o wszystkich ścianach trójkątnych. Jeśli tych ścian jest n , to krawędzi jest $3n/2$ (bo każda łączy dwie ściany), a taka liczba nie chce być równa 7.



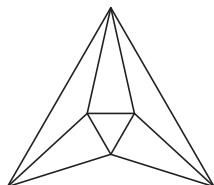
B Istnieje wielościan o k krawędziach dla każdego k większego od 7 i dla k równego 6.

Dla k parzystych taki jest np. ostrosłup o podstawie $(k/2)$ -kątniej. Jeśli natomiast obetniemy troszkę jeden z wierzchołków przy podstawie, to liczba krawędzi zwiększy się o 3, a więc otrzymamy wszystkie liczby nieparzyste, poczynając od 9.



C Jakie są jeszcze ograniczenia na liczbę w – wierzchołków, s – ścian i k – krawędzi?

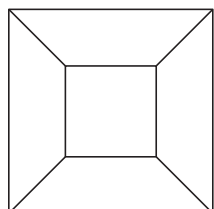
Ponieważ dowolne trzy punkty leżą na jakiejś płaszczyźnie, więc $w \geq 4$. Ale wówczas również $s \geq 4$. O liczbie k już było. Liczby te są związane jeszcze zależnościami $3s \leq 2k$ i $3w \leq 2k$, bo każda krawędź należy do dwóch ścian, a ściany te są co najmniej trójkątne; podobnie każda krawędź łączy dwa wierzchołki, a z każdego z nich wychodzi ich co najmniej trzy.



D Czy istnieje tylko jeden wielościan o danych w , s , k ?

Oczywiście nie. Na przykład sześcian i czworościan z dwoma obciętymi rogami mają te same $w = 8$, $s = 6$, $k = 12$.

E Dalej będziemy zajmowali się wielościanami wypukłymi. Wielościan taki można określić w ten sposób, że gdyby dowolna z jego ścian była przezroczysta, to można byłoby tak zbliżyć do niej oko, że przez nią widziałyby się wszystkie inne ściany. Taki widok nazywa się *diagramem Schlegela*.

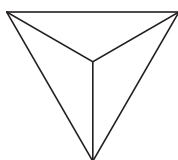


Skoro literą jest **E**, to teraz wzór Eulera: $w + s = k + 2$.

Korzystając z diagramu Schlegela, wzór ten uzasadnić nietrudno. Na początek uznajmy to, co leży dokoła diagramu, też za jego ścianę – trzeba tak zrobić, by diagram miał tyle ścian, co wielościan, z którego powstał. A teraz będziemy usuwali z niego krawędzie i wierzchołki, przestrzegając tego, by nie podzielić diagramu na rozłączne części: stale powinno być możliwe dotarcie po nieusuniętych jeszcze krawędziach do każdego z nieusuniętych dotąd wierzchołków.

A sposoby są dwa:

1. gdy po obu stronach krawędzi są różne ściany (na początku w diagramie każda z krawędzi ma tę własność) – usuwamy ją, zostawiając kończące ją wierzchołki;
2. gdy krawędź kończy się wierzchołkiem, z którego nie wychodzi prócz niej żadna inna krawędź – usuwamy ją wraz z tym wierzchołkiem.

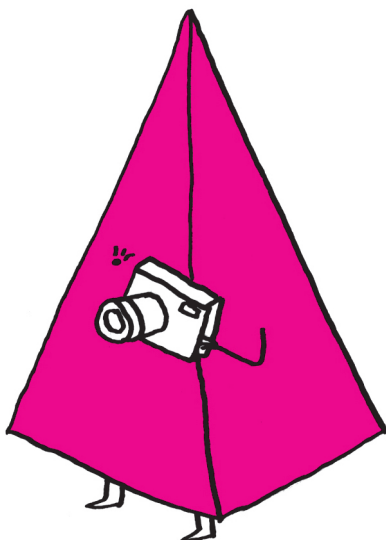
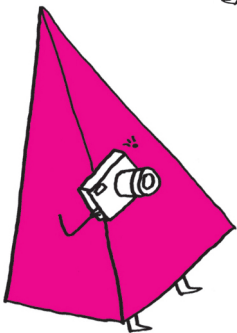
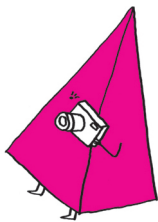


Diagramy Schlegela wielościanów foremnych



Rozwiązanie zadania M 1467.
Odp. Nie!

Załóżmy przeciwnie, że udało się pociąć naszą figurę. Wówczas jedno z cięć musiało przebiegać po poziomej osi symetrii figury, ponieważ każda połowa figury zawiera parzystą liczbę pól. Pokolorujmy pola figury jak standardową szachownicę (każde pole białe sąsiaduje z polami czarnymi, a pole czarne – z białymi). Ponieważ każdy fragment 1×2 zawiera jedno pole białe i jedno czarne, to różnica między liczbą pól białych i czarnych w każdej połowie figury powinna być równa zero, a w naszym przypadku wynosi 4.



Przypadek pierwszy zmniejsza o jeden liczbę krawędzi i liczbę ścian. Przypadek drugi – o jeden liczbę krawędzi i liczbę wierzchołków. Zatem w obu przypadkach odejmujemy po jedynce od obu stron wzoru Eulera.

A ponieważ w ten sposób możemy po kolei usunąć wszystkie krawędzie (sprawdźcie!), więc na końcu zostanie nam jeden wierzchołek i „otaczająca go” ściana. A ponieważ $1 + 1 = 0 + 2$, więc wzór Eulera został udowodniony.

Można za jego pomocą oszacować liczbę ścian i wierzchołków z drugiej strony. W **C** stwierdziliśmy, że $3w \leq 2k$. Wstawiając to do wzoru Eulera, otrzymujemy $\frac{2}{3}k + s \geq k + 2$, czyli $s \geq \frac{1}{3}k + 2$; podobnie $w \geq \frac{1}{3}k + 2$.

F Przy odcinaniu wierzchołków, w których zbiegają się 3 krawędzie (robiliśmy to już parę razy) – nazwijmy to operacją OD – liczba krawędzi rośnie o 3, liczba wierzchołków o 2 (bo 3 przybyły, a jeden ubył) i liczba ścian o 1.

Przeciwna operacja: dobudowywanie na trójkątnej ścianie ostrosłupa (uzasadnij, że można to zrobić, nie psując wypukłości!) – operacja DO – zwiększa liczbę krawędzi o 3, liczbę wierzchołków o 1 i liczbę ścian o 2 (znów $3 - 1$).

Do wielościanu mającego w wierzchołków, s ścian i k krawędzi udało się zastosować m operacji OD i n operacji DO. Ile teraz ma on wierzchołków, ścian i krawędzi?

Prosty rachunek daje $w' = w + 2m + n$, $s' = s + m + 2n$, $k' = k + 3m + 3n$.

G (twierdzenie Steinitza) Jeśli liczby w , s , k spełniają warunki $w + s = k + 2$, $3w \leq 2k$ i $3s \leq 2k$, to istnieje wielościan mający w wierzchołków, s ścian i k krawędzi.

Dla dowodu wygodnie będzie przyjąć, że $k = 3q - r$, gdzie r to 0, 1 lub 2. Z nierówności uzyskanych na koniec **E** mamy $w \geq q + 2 - \frac{1}{3}r$ i $s \geq q + 2 - \frac{1}{3}r$. Zatem (ponieważ $\frac{1}{3}r < 1$) mamy $w \geq q + 2$ i $s \geq q + 2$, z czego wynika, że liczby $m = w - q - 2$ i $n = s - q - 2$ są nieujemne i nadają się na krotności operacji OD i DO.

Inaczej: $w = m + q + 2$ i $s = n + q + 2$. Z wzoru Eulera mamy więc $m + q + 2 + n + q + 2 = 3q - r + 2$, czyli $q = (2 + r) + m + n$. Podstawiając to zamiast q , otrzymujemy

$$w = (4 + r) + 2m + n, \quad s = (4 + r) + m + 2n \quad \text{i} \quad k = (6 + 2r) + 3m + 3n.$$

Stąd twierdzenie będzie dowiedzione, gdy wskażemy wielościan, w którym $w = s = 4 + r$ i $k = 6 + 2r$. Ale taki jest ostrosłup o podstawie trój-, czworo- lub pięciokątnej. Są w każdym z nich ściany trójkątne (to te boczne) i wierzchołki trójścienne (przy podstawie), więc można stosować OD i DO.

H Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by istniał wielościan mający w wierzchołków i s ścian, są nierówności $w \leq 2s - 4$ i $s \leq 2w - 4$.

Oczywiście, należy to twierdzenie sprowadzić do poprzedniego, a w tym celu wystarczy porachować, że – gdy jest spełniony wzór Eulera – nierówności z **C** są równoważne nierównościom w sformułowaniu tego twierdzenia.

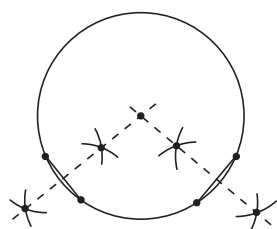
I I co dalej? Dalsze litery alfabetu trzeba już sobie samemu wymyślić. Na przykład może to być próba znalezienia odpowiedzi na pytanie, jak – znając spełniające podane tu nierówności liczby w , s , k – obliczyć, ile jest różnych wielościanów (to znaczy mających różne zestawy ścian) o w wierzchołkach, s ścianach i k krawędziach. Dla 4, 4, 6 jest jeden, dla 8, 6, 12 – jak to już sprawdziliśmy – co najmniej dwa, a jak jest „w ogóle”?

To świetny temat na samodzielną pracę (a gdy ktoś jest uczniem – na nasz Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki).

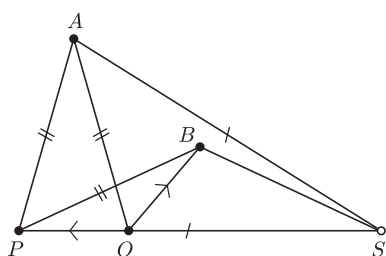
Marek KORDOS

Prosto w środek

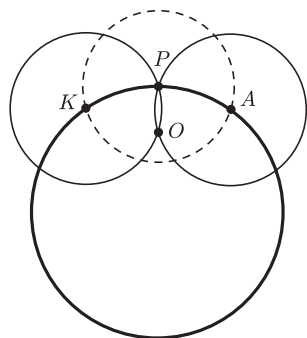
Łukasz RAJKOWSKI



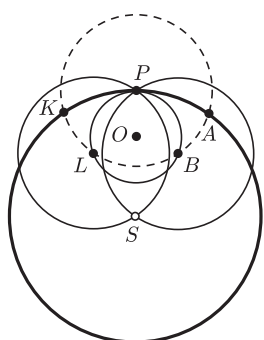
Rys. 1



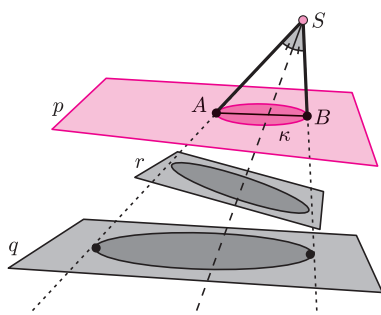
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Przeciętny uczeń rozpoczyna podróż po fascynującym świecie geometrycznych konstrukcji uzbrojony w linijkę i kątomierz. Kiedy już nauczyciel uzna swojego podopiecznego za wystarczająco odpowiedzialnego, by nie rysował szkolnych ławek (jakże często zbyt naiwne założenie), uczeń dostaje do ręki kolejne narzędzie walki z czystą kartką papieru, jakim jest cyrkiel. Wraz z nastaniem ery cyrklowej uczeń jest zdolny rysować w zeszytce całe mnóstwo okręgów o zadanym środku, czasem nawet mając w tym jakiś wyższy konstrukcyjny cel. Przykładem tego ostatniego mogłaby być operacja w pewnym sensie odwrotna – skonstruowanie środka okręgu, gdy mamy zadaną jedynie sam okrąg. Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że gdy jesteśmy wyposażeni w cyrkiel i linijkę, zadanie to nie stanowi większego wyzwania; wystarczy narysować dwie nierównoległe cięciwy okręgu, a następnie ich symetralne, których przecięcie wyznaczy nam, oczywiście, szukany środek (rys. 1). Schody pojawiają się, jeśli zazdrośny o nasze sukcesy kolega z ławki podprowadzi nam linijkę. Skarżenie nauczycielowi jest poniżej naszej godności, podobnie rozwiązanie tej kwestii po lekcjach na szkolnym podwórku, dlatego zaciskamy zęby i próbujemy wyznaczyć środek okręgu przy użyciu samego cyrkla. W rozwiązaniu przydatna okazuje się następująca konfiguracja geometryczna (rys. 2): jeśli $SA = SP$, punkt O leży na odcinku SP i spełnia $AO = AP$, natomiast dla punktu B zachodzą równości $OB = OP$ oraz $PB = PA$, to wówczas $BP = BS$. Istotnie, zauważmy, że przy przedstawionych założeniach trójkąty PSA i PAO są podobne (jako równoramienne trójkąty o tym samym kącie przy podstawie), dlatego korzystając z założonych równości, otrzymujemy

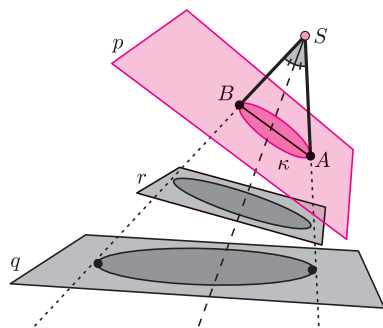
$$\frac{PB}{PS} = \frac{PA}{PS} = \frac{PO}{PA} = \frac{PO}{PB}.$$

Z powyższego i z zasady „bok-kąt-bok” wnioskujemy podobieństwo trójkątów PSB i PBO , a skoro ten ostatni jest równoramienny, to musi zachodzić $BP = BS$. Przedstawioną obserwację można łatwo wykorzystać do dowodu poprawności niniejszej konstrukcji środka zadanego okręgu o przy użyciu samego cyrkla. Dla skrócenia zapisu niech oznaczenie okręgu przez o_X niesie ze sobą informację, że X jest środkiem tego okręgu. Należy narysować kolejno:

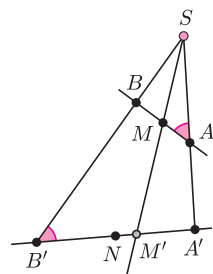
1. wystarczająco duży okrąg o_P (wystarczająco duży, czyli taki, dla którego $\sphericalangle APK < 2 \arccos \frac{1}{4}$; można nietrudno sprawdzić, że w przeciwnym przypadku nie uzyskamy punktów B i L z kroku 3), gdzie P należy do okręgu o ; niech A i K będą punktami przecięcia o z o_P (rys. 3),
2. okręgi o_A i o_K o promieniu $PA = PK$; niech O będzie różnym od P przecięciem tych okręgów (rys. 3),
3. okrąg o_O o promieniu OP i niech B i L będą przecięciami nowego okręgu z o_P (rys. 4),
4. punkt S , będący przecięciem (różnym od P) okręgów o_B i o_L o promieniu $BP = LP$ (rys. 4).

Tak skonstruowany punkt S stanowi szukany środek okręgu o . Istotnie, jeśli nieufnie oznaczymy ów środek przez S' , to w trzecim kroku konstrukcji punkty S', P, A, O, B tworzą konfigurację przedstawioną na rysunku 2 i w tej sytuacji okrąg o_B z punktu 2 przechodzi przez S' . Analogicznie, przez S' przechodzi również o_L i dlatego $S = S'$.

Udało nam się utrzcć nosa niedobremu koledze i zachęceni tym dokonaniem, postanowiliśmy dokonać tej samej sztuki wyłącznie przy użyciu odzyskanej w glorii linijki. Początkowy entuzjazm prędko przeradza się jednak w niepokój, a wkrótce zaczynają się pojawiać oznaki paniki. Pomimo prężenia intelektualnych muskułów i dziesiątek prób dokonanych na kilkunastu wyrzuconych ostatecznie do kosza kartkach środek okręgu o skutecznie unika namierzenia przez nasz nowy oręż. Po kolejnym nieudanym podejściu w naszej głowie pojawia się iskierka nadziei – może wszystkie niepowodzenia nie są kwestią naszej umysłowej niedyspozycji, a tego, że po prostu *się nie da*? Jak jednak mogłoby wyglądać uzasadnienie tego, że czegoś *nie da się* skonstruować przy użyciu samej linijki? Po chwili zastanowienia jedyne, co przychodzi nam do głowy, to pokazanie, że nawet jeśli pewien konstrukcyjny przepis sprawdzi się na jednym okręgu, polegnie na innym. Gdzie jednak należy szukać tego drugiego okręgu? Okazuje się, że na innej kartce!



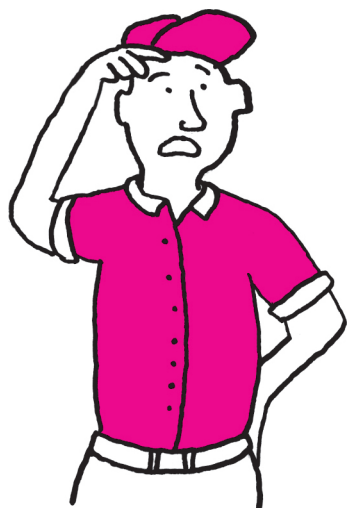
Rys. 6



Rys. 7

Zamalujmy na przezroczystej kartce p koło κ ograniczone okręgiem o . Nad kartką p umieścimy punktowe źródło światła S w taki sposób, by na pewno nie znajdowało się ono bezpośrednio nad środkiem okręgu o . Pod kartkę p podłożymy równoległą do niej kartkę q – nietrudno przekonać się, że koło κ będzie rzucało na q cień w kształcie koła. Wyobraźmy sobie teraz, że ze środka o wystaje maszt i niech A, B będą punktami przecięcia okręgu o z przedłużeniem cienia masztu. Między kartki p i q wstawmy teraz na chwilę kartkę r , prostopadłą do dwusiecznej kąta $\sphericalangle ASB$ – wówczas κ rzuca na r cień w kształcie elipsy, której środek symetrii wyznaczany jest przez przecięcie r ze wspomnianą dwusieczną (rys. 5). W tej sytuacji, jeśli przymocujemy S do punktów A i B kartki p i tak powstałą, sztywną konstrukcję obrócimy o 180° wokół dwusiecznej kąta ASB , to cień κ na r nie ulegnie zmianie (rys. 6). Ponieważ cień κ na q możemy traktować jako cień cienia κ na r , a ten ostatni się nie zmienił, więc koło κ w nowym położeniu również rzuca na q cień w kształcie koła.

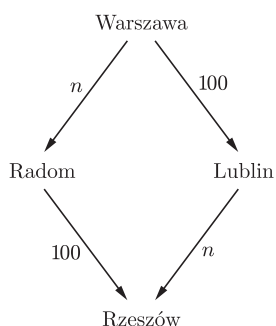
Przypuśćmy teraz, że udało się nam wyznaczyć środek okręgu o przy użyciu samej linijki. Poprośmy kolegę z ławki, by zastosował ten sam przepis dla cienia okręgu o na kartce q . Ze względu na bogate doświadczenie w niesamodzielnej pracy kolega szybko zorientował się, że wystarczy wykonywać „cienie” operacji przeprowadzanych przez nas na okręgu o . W tej sytuacji uzyskany przez niego kandydat na środek cienia okręgu o okaże się cieniem skonstruowanego przez nas środka tego okręgu. Niestety, obaj nie możemy mieć racji, gdyż cień środka odcinka AB z pewnością nie jest środkiem cienia tego odcinka, do czego powinien przekonać nas rysunek 7. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć środka okręgu, posługując się wyłącznie linijką. Nasze wcześniejsze konstrukcyjne niepowodzenia zostały więc usprawiedliwione – *niemożność* ma jednak swoje dobre strony.



Kłopoty z komunikacją

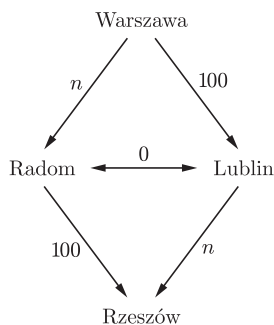
Wojciech CZERWIŃSKI

„W takich Niemczech to mają dobre drogi, a w Polsce... No cóż, średni czas potrzebny na przejazd np. z Warszawy do Rzeszowa jest stanowczo za długi.” Wielu Czytelników zapewne zgodzi się z tym stwierdzeniem lub doda, że jest zbyt eufemistyczne, inni zaś powiedzą, że przecież nie jest znowu aż tak źle. Z kolei ktoś może konstruktywnie zaproponować, żeby zamiast zastanawiać się, jak jest, zastanowić się, co zrobić, by było lepiej. „Jak to co? Nic prostszego – trzeba zacząć budować nowe drogi!” – chciałoby się odpowiedzieć. Wydaje się, że to naturalne rozwiązanie, które powinno poprawić naszą sytuację. Spójrzmy jednak na problem od strony matematycznej, by przekonać się, że nie zawsze musi to być prawda.

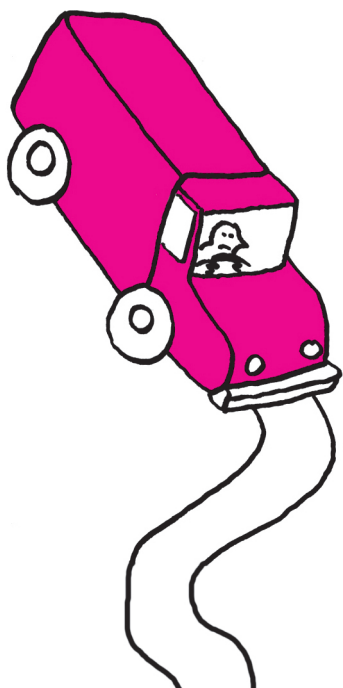


Rozważmy następujący, hipotetyczny Problem Kierowcy Tira. Powiedzmy, że z Warszawy do Rzeszowa może on jechać na dwa sposoby: albo przez Lublin, albo przez Radom. Droga z Warszawy do Lublina jest szeroka, ale długa; jedzie się nią zawsze 100 minut. Natomiast droga z Warszawy do Radomia jest krótka, ale wąska, więc czas przejazdu istotnie zależy od natężenia ruchu na tej drodze. Na nasze potrzeby przypuśćmy (dość nierealistycznie), że jeśli jedzie nią jednocześnie n tirów, to czas przejazdu dla każdego z nich wynosi n minut. Analogiczna sytuacja ma miejsce dla dojazdu do Rzeszowa. Tyle że teraz podróż z Radomia do Rzeszowa zawsze trwa 100 minut, a z Lublina do Rzeszowa n minut, jeśli drogą jedzie n tirów. Przypuśćmy teraz, że codziennie z Warszawy do Rzeszowa jedzie 100 tirów. Jeśli wszystkie jechałyby przez Lublin, to czas przejazdu dla każdego z nich wyniósłby $100 + n$ minut, gdzie $n = 100$, czyli w sumie 200 minut. Analogicznie, gdyby wszystkie tiry pojechały przez Radom. Jednak gdyby połowa tirów pojechała przez Radom, a druga połowa przez Lublin, to czas przejazdu dla każdego z nich zmniejszyłby się do 150 minut, i łatwo wykazać, że byłoby to optymalne rozwiązanie. Powinno więc powstać Stowarzyszenie Kierowców, które dbałoby o to, żeby codziennie dokładnie połowa kierowców jechała przez Radom, a druga połowa przez Lublin.

Jako że przewóz towarów z Warszawy do Rzeszowa okazał się jednym z filarów naszego przemysłu, GDDKiA postanowiła poprawić sytuację kierowców. W tym celu pomiędzy Radomiem a Lublinem zbudowana została droga (niesamowicie) szybkiego ruchu, która, dzięki wykorzystaniu najnowszych technologii, oferuje natychmiastowy przejazd w czasie 0 minut. Niestety, projekt ten nie został skonsultowany z żadnymi ekspertami-matematykami, co okazało się fatalne w skutkach.



Zastanówmy się, jak wybudowanie nowej drogi wpłynęło na sytuację kierowców. Ponieważ przejazd pomiędzy Radomiem a Lublinem jest natychmiastowy, to drogę z Warszawy do Rzeszowa można w praktyce podzielić na dwa odcinki: z Warszawy do Radomia-Lublina oraz z Radomia-Lublina do Rzeszowa. Jasne jest, że na pierwszym odcinku bardziej oplaca się jechać drogą, która zajmuje n minut, niż tą, która zajmuje 100 minut, bo zawsze $n \leq 100$. Na drugim odcinku jest tak samo. A zatem najprawdopodobniej wszyscy kierowcy, nie zwracając uwagi na zalecenia Stowarzyszenia Kierowców, pojadą trasą Warszawa–Radom–Lublin–Rzeszów, co zajmie każdemu z nich $n + 0 + n = 200$ minut! Co więcej, żaden z kierowców nie będzie żałował swojej decyzji, będzie bowiem myślał tak: „gdybym pojechał z Warszawy na Lublin, a nie na Radom, to zamiast $n = 100$ minut wąską drogą jechałbym, tak czy siak, 100 minut, tyle że szeroką drogą”. Co prawda wtedy jego koledzy przejechaliby trasę Warszawa–Radom w 99 minut, więc może jeden z kierowców dałby się przekonać do zmiany trasy, ale kolejni z pewnością nie (gdyż pogarszaliby oni swój czas przejazdu z $n = 99$ minut na 100 minut).



Chodzi o tego samego Johna Nasha, który został przedstawiony w filmie *Piękny umysł*. Za swoje pionierskie badania nad teorią gier został nagrodzony w 1994 roku Nagrodą Nobla z ekonomii.

Więc jak to – wybudowaliśmy nową drogę i w praktyce czas przejazdu wydłużył się? Niestety, tak właśnie jest! A to dlatego, że każdy z kierowców działa na własną korzyść i w ten sposób szkodzi innym kierowcom. Widać, że warto czasami konsultować się z matematykami w sprawach z pozoru z matematyką niezwiązanych. A że zjawisko nie jest czysto wydumane, świadczą rzeczywiste sytuacje. W Stuttgarcie w 1969 roku inwestycje drogowe doprowadziły do istotnego pogorszenia przejeżdżalności centrum, w Nowym Jorku zaś w 1990 roku zaobserwowano efekt odwrotny: zamknięcie 42. ulicy spowodowało zwiększenie płynności ruchu. Oba zdarzenia tłumaczy się *paradoksem Braessa*, bo tak właśnie (od nazwiska niemieckiego matematyka Dietricha Braessa) nazywa się omawiany przez nas efekt.

Paradoks Braessa jest dobrą ilustracją zastosowania teorii gier. Opisana sytuacja jest szczególnego rodzaju grą, w której graczami są kierowcy rywalizujący (a czasem współpracujący), aby uzyskać jak najkrótszy czas przejazdu. Ich strategiami zaś są różne wybory dróg. Sytuacja, w której żadnemu z kierowców nie oplaca się zmienić swojej strategii, nazywa się równowagą Nasha. Okazuje się, że w naszej grze równowaga Nasha nie musi dawać optymalnego rozwiązania. Co więcej, po zbudowaniu dodatkowej drogi nowa równowaga Nasha może dać jeszcze gorsze rozwiązanie. Teoria gier zna dużo więcej przykładów, gdy egoistyczne działanie prowadzi do sytuacji niekorzystnych społecznie, jednym z najbardziej znanych jest dylemat więźnia (pisaliśmy o nim m.in. w *Delcie* 5/2015).

Powyższy przykład rodzi pytanie o to, jak bardzo może nam zaszkodzić nieprzemyślane budownictwo dróg. Czy może się okazać, że na skutek inwestycji GDDKiA czas przejazdu z Warszawy do Rzeszowa wydłuży się np. dwa albo pięć razy? Na szczęście nie! Przy założeniu, że czas przejazdu dla każdego odcinka drogi jest liniową funkcją natężenia ruchu (czyli jest postaci $an + b$, gdzie n to liczba kierowców, a a i b to ustalone liczby rzeczywiste), można wykazać, że sytuacja może zostać pogorszona co najwyżej o jedną trzecią, czyli tak, jak ma to miejsce w naszym przykładzie (ze 150 minut na 200). Jak to wykazano – to już zupełnie inna historia. Co ciekawe, za sformułowanie problemu, rozwiązanie go oraz kilka wyników w pobliżu przyznano w 2012 roku bardzo prestiżową nagrodę Gödla za wybitne osiągnięcia w dziedzinie informatyki teoretycznej.

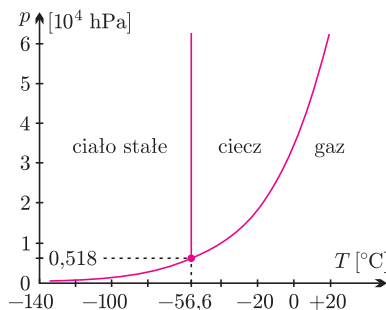
Okazuje się również, że nasze rozważania mają związek z informatyką. Śmiało można sobie wyobrazić, że zamiast miast mamy systemy komputerowe, które przesyłają między sobą nie tiry, a informacje i nie po drogach, ale łączami o pewnych przepustowościach – a efekty jak w paradoksie Braessa mogą być identyczne. Jak widać, matematycy, przynajmniej niektórzy, zajmują się wciąż pytaniami, które każdy z nas może zrozumieć i są istotne w praktyce.



1 m² powierzchni Marsa otrzymuje od Słońca $1,52^2 = 2,31$ razy mniej energii niż w przypadku Ziemi. Ilość energii przypadająca na 1 sekundę to tzw. stała słoneczna. Dla Ziemi wynosi ona 1367 W/m². Dla Marsa będzie zatem równa $1367/2,31 \text{ W/m}^2 = 591,8 \text{ W/m}^2$.

Rok marsjański liczy średnio 668,61 marsjańskich dob średnich słonecznych. Długość marsjańskiej doby jest prawie równa ziemskiej i wynosi 24 h 37 min 22 s.

Korzystając ze wzoru Clapeyrona, obliczmy gęstość ρ marsjańskiej atmosfery, biorąc pod uwagę tylko CO₂. Masa molowa $\mu = 44 \text{ kg/kmol}$. $p = 8 \text{ hPa} = 8 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$. Załóżmy, że $T = 200 \text{ K} = -73^\circ\text{C}$. Stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ J/kmol K}$. $pV = (m/\mu)RT$, z czego wynika $m/V = \rho = \mu p/(RT)$. Zatem $\rho = 0,02 \text{ kg/m}^3 = 20 \text{ g/m}^3$.



Rys. 1. Diagram fazowy CO₂.

Wycieczka na Marsa

Lech FALANDYSZ

Mimo sporadycznych zapewnień przedstawicieli różnych agencji kosmicznych i rządów o planach wysłania załogowej misji na Marsa na międzyplanetarną wyprawę i pierwszą stałą bazę przyjdzie nam chyba trochę poczekać. Jednak już teraz możemy spróbować przenieść się w myślach na powierzchnię tej pustynnej planety, posiłkując się w naszej podróży niczym nieokiełznaną wyobraźnią, prawami fizyki oraz danymi zebranymi przez bezzałogowe sondy i lądowniki.

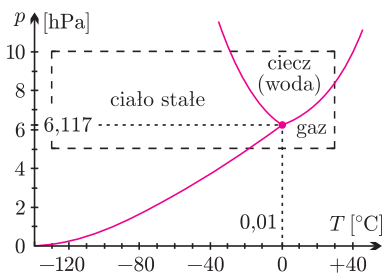
Powierzchnia Marsa jest geologicznym (a w zasadzie *areologicznym*) polem bitwy, jak na boga wojny, Marsa (Aresa) przystało. Na równinach porozrzucane są wśród wydm skały różnych wielkości. Wydmy z piasku, pyłu i popiołu wulkanicznego utworzone są przez wiatry i huragany. W innych miejscach spotkamy rozpadliny, kaniony, kratery, wulkany i twory przypominające koryta wyschniętych rzek, niektóre o wiele większe od ziemskich. Wulkan Olympus Mons jest ponad dwukrotnie wyższy od ziemskiego Mount Everestu. Krater Victoria ma około 800 km średnicy. Kaniony mają łącznie długość kilku tysięcy km, a ich głębokości wynoszą kilka kilometrów. Całe to bogactwo krajobrazowe zwieńczają okazałe i wysokie łańcuchy górskie, nad którymi widać czasem dwa niewielkie księżyce, Fobosa i Deimosa, okrążające planetę w płaszczyźnie równikowej po prawie kołowych orbitach.

Średnia odległość Marsa od Słońca jest 1,52 razy większa od średniej odległości Ziemi od Słońca. W związku z tym (oraz w wyniku braku porządnego efektu cieplarnianego) średnia temperatura na Marsie jest znacznie niższa niż na Ziemi. Na marsjańskich biegunach temperatura często osiąga minus 120°C. W okolicach równika nocą może być około minus 50°C. Jedynie w ciągu letnich dni temperatura osiąga dodatnie wartości – na równiku nawet 30°C. Oś obrotu Marsa jest nachylona do płaszczyzny orbity pod kątem 25°11'. Takie nachylenie przyczynia się do podobnego jak w przypadku Ziemi zróżnicowania długości pór roku.

Atmosfera Marsa złożona jest głównie z dwutlenku węgla CO₂ (około 98%). Znikomą resztę stanowią: tlenek węgla CO, tlen O₂ i para wodna. Przy powierzchni planety ciśnienie atmosfery jest bardzo małe, wynosi około 8 hPa (na Ziemi około 1013 hPa) i wartość ta ulega niewielkim wahaniom. Gdyby nawet skład atmosfery przypominał ziemski, zbyt niskie ciśnienie uniemożliwiałoby oddychanie. Przy powierzchni Marsa gęstość atmosfery wynosi 20 g/m³, a więc 64,5 razy mniej niż ziemskie równe 1,29 kg/m³.

Prędkości cząsteczek gazu atmosferycznego są różne. Dlatego najczęściej oblicza się dla cząsteczek wartość średniej prędkości kwadratowej $v_{sr} = \sqrt{3RT/\mu}$. W najcieplejsze dni na Marsie, gdy temperatura jest w pobliżu 30°C, v_{sr} wynosi około 0,4 km/s, czyli jest porównywalna ze średnią prędkością cząsteczek powietrza ziemskiego, które w warunkach normalnych mają średnią prędkość około 0,5 km/s. Jeżeli cząsteczka gazu osiągnie tzw. prędkość ucieczki z pola grawitacyjnego planety, to oddali się w przestrzeń międzyplanetarną. Porównajmy wartości prędkości cząsteczek z wartością prędkości ucieczki. Prędkość ucieczki ciała z powierzchni Marsa (druga prędkość kosmiczna) obliczona ze wzoru $v_{II} = \sqrt{2GM/R}$, gdzie $M = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ i $R = 3389 \text{ km}$ oznaczają masę i średni promień Marsa, wynosi około 5 km/s. Wynika stąd, że średnie prędkości cząsteczek są kilkanaście razy mniejsze od prędkości ucieczki, dlatego też Mars utrzymuje stabilną atmosferę. Mała średnia prędkość cząsteczek w porównaniu z v_{II} nie oznacza, że nie ma cząsteczek, którym udaje się uciec z Marsa. Na dużej wysokości, na skutek m.in. reakcji egzotermicznych, działania wiatru słonecznego i promieniowania kosmicznego, część gazu atmosferycznego ma wystarczającą energię kinetyczną, by uciec z Marsa. Przed kilkoma miliardami lat, w czasach gdy planety były młode i gorące, wysoka temperatura atmosfery sprzyjała ucieczce lekkich atomów i cząsteczek. Obecnie atmosfera zawiera głównie cięższe cząsteczki CO₂. W przeszłości skład atmosfery zmieniał się również pod wpływem wulkanów, które przyczyniały się do uzupełniania atmosfery gazami wyrzucanymi podczas erupcji.

Rysunek 1 przedstawia diagram fazowy ukazujący, jaki stan skupienia ma CO₂ w zależności od ciśnienia i temperatury. Punkt potrójny dla CO₂ odpowiada



Rys. 2. Diagram fazowy wody.



Skala Francisa Beauforta, służąca do opisu siły wiatrów na Ziemi, jest w przybliżeniu dana wzorem $B \approx 1,13v^{2/3}$, gdzie v jest prędkością wiatru w m/s.

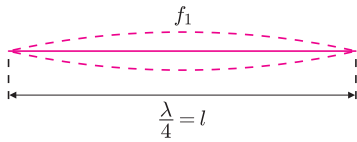


Siła nośna balonu zależy od różnicy gęstości gazów we wnętrzu balonu i wokół niego. Na kulisty balon próżniowy o objętości V w atmosferze ziemskiej działa siła wyporu: $F_Z = \rho_1 V g_Z$. Na Marsie natomiast $F_M = \rho_2 V g_M$, gdzie $\rho_1 = 1,29 \text{ kg/m}^3$, $\rho_2 = 0,02 \text{ kg/m}^3$, co pozwala nam oszacować stosunek sił wyporu $F_Z/F_M = (\rho_1/\rho_2) \cdot (g_Z/g_M) = 64,5 \cdot 2,65 \approx 171$.

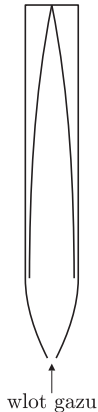
ciśnieniu 5180 hPa i temperaturze $T = -56,6^\circ\text{C}$. Na Marsie ciśnienie oscyluje w pobliżu 8 hPa, jest więc ponad 600 razy mniejsze od ciśnienia w punkcie potrójnym. Jeżeli temperatura zmienia się w granicach od około -130°C do około 30°C , to z wykresu wynika, że CO_2 na Marsie może istnieć jako gaz lub jako ciało stałe (szron), natomiast nie w stanie ciekłym. Przy wzroście temperatury szron sublimuje, stając się gazem. Za obserwowane sezonowe zmiany rozmiarów marsjańskich czap polarnych odpowiada właśnie sublimacja zestalonego CO_2 . Rozważmy jeszcze, w jakich stanach skupienia może istnieć na Marsie woda, która tam jest, lecz jeszcze nie wiemy, w jakiej ilości. Rysunek 2 przedstawia diagram fazowy z punktem potrójnym dla wody. Prostokąt zaznaczony przerywaną linią wskazuje przybliżone granice, w jakich przy powierzchni planety zmienia się ciśnienie atmosferyczne oraz temperatura. Wynika z tego, że H_2O na Marsie może istnieć w każdym z trzech stanów skupienia. Ponieważ temperatura przeważnie jest dużo niższa od 0°C , więc H_2O ma postać lodu. W letniej nocy H_2O jest w postaci lodu, ale gdy nastanie ciepły dzień, lód ten sublimuje do postaci lotnej, albo przy wyższym ciśnieniu zamienia się w ciecierz, która paruje. W atmosferze Marsa wykryto pojawianie się bardzo rozrzedzonych obłoków pary wodnej. W letni dzień wieczorem, gdy temperatura jest już niska, para wodna się skrapla, a przy dalszym ochłodzeniu woda zamara. Przy ciśnieniu poniżej tego, jakie odpowiada punktowi potrójnemu, następuje resublimacja pary i powstaje szron. Możliwe, że w składzie czap polarnych oprócz CO_2 jest pewna ilość wodnego szronu.

Bezpieczne lądowanie na Marsie wymaga wybrania odpowiedniej pory. Czasami na powierzchni planety szaleją huragany. Mimo tego, że gęstość atmosfery jest niewielka, to jednak wichury działają z wyraźnie widocznymi skutkami. Największe huragany powstają, gdy Mars znajdzie się w pobliżu peryhelium. Wówczas burze piaskowe utrzymują się przez kilka tygodni na południowej półkuli, czasem sięgając nawet półkuli północnej. Widoczność jest wówczas bardzo ograniczona. Obliczmy moc wiatru podczas huraganu i porównajmy ją z mocą huraganów ziemskich. Prędkość wiatru w porywach dochodzi na Marsie do $v = 300 \text{ km/h} \approx 80 \text{ m/s}$. Oszacujmy wpływ wiatru marsjańskiego na przykładową powierzchnię S . Moc wiatru przez powierzchnię $P/S = \frac{1}{2}\rho v^3$ to około 5800 W/m^2 , a odpowiadające jej ciśnienie $p = \frac{1}{2}\rho v^2$ wynosi około 70 Pa. Na Ziemi odpowiednikiem marsjańskiego huraganu jest wichur mający ponad 8 stopni w skali Beauforta. Na Marsie ogromną prędkość wiatru rekompensuje mniejsza niż ziemska gęstość atmosfery, ważnym czynnikiem jest jednak niższe ciężenie – przyszli marsjańscy osadnicy będą musieli w czasie wichur odpowiednio zabezpieczać znajdujące się w rejonie złej pogody urządzenia, pojazdy i obiekty mieszkalne.

Przy odpowiednio dobrej pogodzie możemy wybrać się na **zwiedzanie planety**. Jak jednak podróżować? Pieszce wędrowki mają na Marsie jedną zaletę: ważymy tylko 38% tego, co na Ziemi. Poza tym udogodnieniem spotkają nas tylko same utrudnienia. Po wydmach, pagórkach, wśród rozpadlin i skalnych rumowisk, wśród wąwozów i kanionów, na stokach wulkanów i w górach, nasza wędrowka byłaby uciążliwa i powolna. Bardzo rozrzedzona atmosfera nie chroni przed szkodliwym promieniowaniem kosmicznym, musielibyśmy zatem nosić specjalne kombinezony ochronne. Użyteczny byłby wygodny gąsienicowy pojazd przystosowany do ruchu po wydmach i nierównym podłożu. Podróże samolotami takimi, jakich używamy na Ziemi, są niemożliwe. Samoloty turboodrzutowe oraz turbośmigłowe pobierają bezpośrednio z atmosfery ziemskiej tlen, który wykorzystują jako utleniacz paliwa. W atmosferze Marsa jest go o wiele za mało. Ponadto, aby samolot wzniósł się ponad pas startowy w rozrzedzonej marsjańskiej atmosferze, powinien uzyskać szybkość około pięciokrotnie większą niż na ziemskim lotnisku, czyli mniej więcej równą prędkości dźwięku w ziemskich warunkach. Być może na podróże w najbardziej odległe miejsca na planecie nadawałby się samolot raketowy, dysponujący własnym zapasem utleniacza, np. ciekłego tlenu. Na dalsze odległości i do miejsc trudno dostępnych podróże należałoby odbywać w specjalnym module, który wznosiłby się i dalej przemieszczał dzięki kilku silniczkom napędowym i manewrowym. A może opłaca się polecieć balonem? Siła wyporu w atmosferze ziemskiej przy powierzchni jest 171 razy większa od analogicznej siły wyporu



Rys. 3



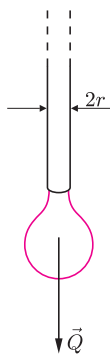
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Załóżmy, że w kropłomierzu znajduje się woda o temperaturze 20°C , a średnica wewnętrzna otworu wylotowego wynosi $d = 1\text{ mm}$. Współczynnik napięcia powierzchniowego dla wody w tej temperaturze wynosi $\sigma = 7,27 \cdot 10^{-2}\text{ N/m}$, a gęstość wody $\rho = 10^3\text{ kg/m}^3$.

w atmosferze Marsa. Nie jest zatem oczywiste, czy siła wyporu pokona ciężar samego balonu i czy on się wzniesie. Aby to rozstrzygnąć, obliczymy ciężar kulistego balonu próżniowego oraz wartość siły wyporu działającej na ten balon w atmosferze Marsa. Aby balon zachował kulisty kształt, powinien być wykonany ze sztywnego materiału. Załóżmy, że nasz „balon próbny” ma promień 1 m i jest wykonany z nowoczesnego włókna węglowego, mającego niewielką gęstość $\rho_b = 600\text{ kg/m}^3$. Załóżmy, że ścianka balonu ma grubość $d = 0,1\text{ mm}$. Ciężar Q pustego balonu na Marsie wynosi: $Q = mg_M = 4\pi r^2 \rho_b d g_M \approx 2,8\text{ N}$. Siła wyporu jest równa $\rho_2 V g_M = \rho_2 (4/3)\pi r^3 g_M = 0,31\text{ N}$, jest zatem mniejsza niż Q . Niewielka gęstość atmosfery jest przyczyną niewystarczającej siły wyporu.

Z tego samego powodu niektóre efekty akustyczne są na Marsie inne niż na Ziemi. Obliczymy prędkość dźwięku przy powierzchni Marsa, przyjmując dane takie, jak przy obliczeniu gęstości marsjańskiej atmosfery. Stosunek ciepła właściwych dla CO_2 wynosi $k = c_p/c_v = 1,3$. Prędkość dźwięku w temperaturze -73°C wynosi $v_{s,M} = \sqrt{kRT/\mu} = 220\text{ m/s}$. Dźwięk w atmosferze marsjańskiej rozchodzi się około 1,5 raza wolniej niż w atmosferze ziemskiej. Czy ma to wpływ na dźwięki muzyki, którą chcielibyśmy zagrać w atmosferze Marsa? Weźmy pod uwagę strunę instrumentu muzycznego (rys. 3). Częstotliwość podstawowa drgań f_1 zależy od wielkości siły F naciągu struny oraz od masy m i długości l struny według wzoru: $f_1 = \sqrt{F/ml}$. Jeżeli parametry te będą takie jak na Ziemi, to i częstotliwość f_1 oraz wyższe harmoniczne również będą takie same. Inaczej natomiast zagrają aerofony. Weźmy pod uwagę zamkniętą piszczałkę (rys. 4). Jeżeli na Ziemi w temperaturze 20°C wydaje

ona ton podstawowy o częstotliwości $f_1 = 440\text{ Hz}$, to ma ona długość $l = v_{s,Z}/(4f_1) = 19,3\text{ cm}$. Na Marsie, przy mniejszej prędkości dźwięku piszczałka ta ma ton podstawowy o częstotliwości $f_1 = 287\text{ Hz}$; na Ziemi ma ton podstawowy a^1 równy 440 Hz , natomiast na Marsie jej ton podstawowy zbliżony jest do tonu d^1 . Aby piszczałka miała na Marsie ton podstawowy a^1 , jej długość powinna wynosić $12,6\text{ cm}$. Piszczałka przeniesiona z atmosfery ziemskiej do atmosfery marsjańskiej ma podstawowy ton niższy, a jego częstotliwość stanowi $0,65$ częstotliwości na Ziemi. Aby na Marsie zagrać

na organach według zapisu nutowego stosowanego na Ziemi, należy skorzystać z piszczałek mających około 65% długości piszczałek użytych na Ziemi. Gdy zagramy piszczałkami takimi samymi jak na Ziemi, tony muzyki będą transponowane. Na rysunku 5 przedstawiony jest zapis nutowy popularnej dziecięcej piosenki „Wlaź kotek na płotek i mruga...”. Tak gramy na Ziemi. Jeżeli na Marsie nie zmienimy piszczałek i zagramy zgodnie z tym zapisem, to usłyszymy muzykę według zapisu przedstawionego na rys. 6. Aby na Marsie muzyka ta brzmiała jak na Ziemi, należy wybrać do każdego tonu piszczałkę o 35% krótszą niż na Ziemi i korzystać z ziemskiego zapisu nutowego (rys. 5). Z kolei, jeżeli krótsze piszczałki przeniesiemy na Ziemię, to dadzą one częstotliwości $1,53$ razy większe niż na Marsie – piszczałka, która na Marsie ma długość $12,6\text{ cm}$ i wydaje tam ton podstawowy a^1 o częstotliwości 440 Hz , na Ziemi daje ton podstawowy $674,6\text{ Hz}$ (dis^2).

Na koniec rozważmy zjawisko tworzenia się kropli cieczy wychodzących z kropłomierza (rys. 7), znajdującego się na Marsie w klimatyzowanym pomieszczeniu. Na wypływającą kroplę działa siła napięcia powierzchniowego. Gdy kropla stanie się odpowiednio duża, jej ciężar przewyżczy siłę napięcia powierzchniowego i kropla oderwie się. Jak duża może być kropla na Marsie? Dla uproszczenia obliczeń załóżmy, że kropla ma kształt kulisty. Gdy kropla odrywa się, jej ciężar Q równy jest sile $F = \pi d \sigma$ napięcia powierzchniowego, proporcjonalnej do obwodu otworu kropłomierza πd i napięcia powierzchniowego σ . Z porównania sił dostajemy promień $R_M = (3d\sigma/(4\rho g_M))^{1/3}$. Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy $R_M = 2,45\text{ mm}$. Dla Ziemi natomiast, gdzie $g_Z = 2,65 g_M$, dostaniemy $R_Z = 2,45/(2,65)^{1/3} = 1,8\text{ mm}$. Wynika stąd, że przeciętna marsjańska kropla jest około 2,5 raza większa od ziemskiej, co może mieć znaczenie podczas odmierzania krolek kropłomierzem, a także podczas kąpieli pod marsjańskim prysznicem.



mała delta

Architekci i algorytmy (2)

W marcowym numerze *Delty* postawiliśmy następujące pytanie: w jaki sposób uszeregować n budynków o wysokościach danych ciągiem b_1, b_2, \dots, b_n , aby suma różnic wysokości sąsiadujących ze sobą budynków $\sum_i |b_i - b_{i+1}|$ była jak największa. Przyjmijmy dla uproszczenia, że liczba budynków n jest parzysta i równa co najmniej 4. Algorytm znajdujący optymalne uszeregowanie można opisać tak:

Krok 0. Uporządkuj budynki od najniższego do najwyższego. Wysokości budynków utworzą niemalejący ciąg b_1, b_2, \dots, b_{2k} , gdzie $n = 2k$.

Krok 1. „Przełam” ciąg (b_i) między wyrazami b_k i b_{k+1} , otrzymując dwa podciągi: $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k$ oraz $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_{2k-1}, b_{2k}$.

Krok 2. „Przełóż” wyrazy podciągów naprzemiennie, tak że otrzymasz ciąg

$$b_{k+1}, b_1, b_{k+2}, b_2, \dots, b_{2k}, b_k.$$

Krok 3. Ustaw w dowolnej kolejności wyrazy stojące na miejscach nieparzystych (z wyjątkiem pierwszego), tj. wyrazy $b_{k+2}, b_{k+3}, \dots, b_{2k}$.

Krok 4. Ustaw w dowolnej kolejności wyrazy stojące na miejscach parzystych (z wyjątkiem ostatniego), tj. wyrazy b_1, b_2, \dots, b_{k-1} .

Wynik działania algorytmu dla przykładowego ciągu zilustrowano na rysunku 1. Dodajmy pewne uwagi.

Po pierwsze: instrukcja „ustaw w dowolnej kolejności” oznacza, że w wyniku wykonania algorytmu możemy uzyskać $(k-1)! \cdot (k-1)!$ optymalnych uszeregowień. Oczywiście wygenerowane uszeregowania będą wszystkie różne tylko wówczas, gdy wszystkie wyrazy podciągów, o których mowa w krokach 3–4 algorytmu, są różne.

Po drugie: rozwiązań jest tak naprawdę dwa razy więcej (chyba że wszystkie wysokości budynków są jednakowe), gdyż po zapisaniu wyrazów ciągu, wygenerowanego przez algorytm, w odwrotnej kolejności, również otrzymamy optymalne uszeregowanie.

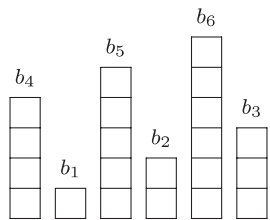
W efekcie zastosowania kroków 0–2 dla ciągu 5, 10, 10, 15, 25, 25, 30 i 45 otrzymamy optymalny ciąg 25, 5, 25, 10, 30, 10, 45, 15. Wszystkich optymalnych rozwiązań, które uzyskujemy wykonując kroki 3–4, jest w sumie 36 (dlaczego?).

Jak uzasadnić, że przedstawiony wyżej algorytm daje optymalne rozwiązanie, czyli takie uszeregowanie budynków, że suma różnic wysokości sąsiednich budynków będzie największa z możliwych?

Zauważmy, że jeśli dwa budynki b_i i b_j sąsiadują (przy czym $b_i \geq b_j$), to ich wkład w sumę różnic wynosi $b_i - b_j$. Zatem dla każdej pary wkład to różnica wysokości wyższego budynku i wysokości niższego budynku. Mamy $n-1$ takich par, a każdy budynek (oprócz skrajnych) należy do dwóch takich par. Zatem sumę różnic można zapisać jako

$$S = \sum_{i=1}^n (b_i \cdot x_i + b_i \cdot y_i),$$

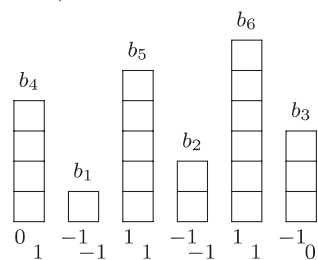
gdzie wśród wartości x_1, \dots, x_n oraz y_1, \dots, y_n dokładnie dwie są równe 0, dokładnie $n-1$ wartości jest równych 1 i dokładnie $n-1$ wartości jest równych -1 . Można zauważyć, że dla $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, suma S przyjmie maksymalną wartość wtedy, gdy $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_n \leq y_n$.



Rys. 1. Uporządkowanie generowane przez algorytm dla $n = 6$ budynków o wysokościach $b_i = i$.



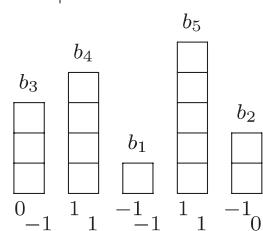
b_i	1	2	3	4	5	6
x_i	-1	-1	-1	0	1	1
y_i	-1	-1	0	1	1	1



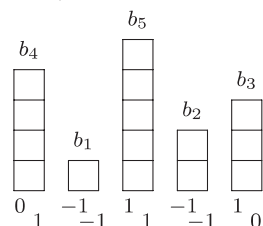
Rys. 2. Pod budynkiem b_i zapisano odpowiadające mu wartości x_i i y_i .



b_i	1	2	3	4	5
x_i	-1	-1	0	1	1
y_i	-1	0	-1	1	1



b_i	1	2	3	4	5
x_i	-1	-1	1	0	1
y_i	-1	-1	0	1	1



Rys. 3. Przykładowe porządkowania dla nieparzystej liczby budynków.

Pozostaje wykazać, że istnieje uszeregowanie, które realizuje tę sumę. Łatwo się przekonać, że jest to, na przykład, uporządkowanie uzyskane w kroku 2 algorytmu. Wówczas wartości x_i i y_i dla $i \leq k-1$ są równe -1 , wartość $x_k = -1$, wartości y_k i x_{k+1} są równe 0 , wartość $y_{k+1} = 1$ oraz wartości x_i i y_i dla $i \geq k+2$ są równe 1 (rys. 2). Tak więc

$$S = (b_{k+1} - b_1) + (b_{k+2} - b_1) + (b_{k+2} - b_2) + \dots + (b_{2k} - b_k).$$

Zauważmy również, że permutacje, które wykonujemy w krokach 3–4 algorytmu, nie zmieniają wartości x_i i y_i dla indeksów $i \leq k-1$ oraz $i \geq k+2$, zatem nie psują optymalności rozwiązania.

Jako zadanie dla Czytelników pozostawiamy uzasadnienie, że algorytm generuje wszystkie możliwe optymalne uszeregowania budynków, czyli że wyrazy podciągów, o których mowa w kroku 1, muszą występować naprzemiennie. (Można tu skorzystać z obserwacji, że permutacje z kroków 3–4 są jedynymi, które nie zmieniają wartości x_i i y_i , i popatrzeć, co się dzieje z sumą S , jeśli któreś z wartości zostaną zmienione.)

Czytelnik Wnikliwy może zapytać: a co w przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą? Czy przedstawiony wyżej algorytm można w prosty sposób zaadaptować dla takiej sytuacji? Okazuje się, że tak! W jaki sposób to zrobić?

Gdy $n = 2k + 1$, dla pewnego naturalnego $k \geq 1$, mamy $2k$ par sąsiadujących budynków, a każdy budynek (oprócz skrajnych) należy do dwóch takich par. Postępując jak poprzednio, sumę różnic można zapisać jako

$$S = \sum_{i=1}^{2k+1} (b_i \cdot x_i + b_i \cdot y_i),$$

gdzie wśród wartości x_1, \dots, x_{2k+1} oraz y_1, \dots, y_{2k+1} dwie są równe 0 , $2k$ wartości jest równych 1 , a $2k$ wartości jest równych -1 . Znowu dla niemalejącego ciągu (b_i) , suma S przyjmie maksymalną wartość wtedy, gdy $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_{2k+1} \leq y_{2k+1}$. Można się jednak przekonać, że dla żadnego k nie istnieje takie uszeregowanie, że wartości x_i i y_i dla $i \leq k$ są równe -1 , wartości x_{k+1} i y_{k+1} są równe 0 , a wartości x_i i y_i dla $i \geq k+2$ są równe 1 , gdyż wartości 0 muszą być przypisane skrajnym, a więc różnym, budynkom (inaczej oznaczałoby to, że budynek o wysokości b_{k+1} jest skrajnym zarówno z lewej, jak i prawej strony). Kiedy zatem suma S będzie największa? Są trzy możliwości.

(1) Jeśli $b_{k+1} - b_k < b_{k+2} - b_{k+1}$, to maksymalna suma będzie odpowiadać zamianie wartości $y_k = 0$ i $y_{k+1} = -1$, a więc np. uszeregowaniu

$$b_{k+1}, b_{k+2}, b_1, b_{k+3}, b_2, \dots, b_{2k+1}, b_k.$$

(2) Jeśli $b_{k+1} - b_k > b_{k+2} - b_{k+1}$, to maksymalna suma będzie odpowiadać zamianie wartości $x_{k+1} = 1$ i $x_{k+2} = 0$, a więc np. uszeregowaniu

$$b_{k+2}, b_1, b_{k+3}, b_2, \dots, b_{2k+1}, b_k, b_{k+1}.$$

(3) Jeśli $b_{k+1} - b_k = b_{k+2} - b_{k+1}$, to oba wyżej wymienione uszeregowania będą związane z maksymalną sumą (rys. 3).

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w przypadku n parzystego, można pokazać, że wykonując pewne permutacje, możemy otrzymać więcej optymalnych uszeregowania budynków. Gdy wszystkie wysokości budynków są różne, to ich liczba jest równa $2 \cdot k! \cdot (k-1)!$ (lub jeszcze dwa razy większa, jeśli mamy do czynienia z trzecią możliwością z powyższej listy).

Przy okazji: „przełamywanie” ciągu i naprzemiennie „przekładanie” wyrazów podciągów może Czytelnikowi przypominać tasowanie kart w grach karcianych. To celne spostrzeżenie! Więcej na temat teorii tasowania kart (i nie tylko) Czytelnik znajdzie w książce Iana Stewarta pt. *Jak pokroić tort i inne zagadki matematyczne*, wydanej w języku polskim w 2012 roku.

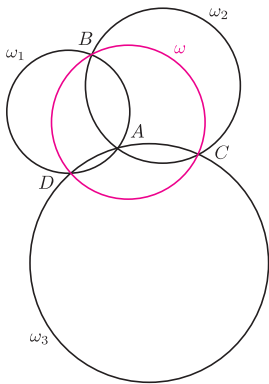
Małą Deltę przygotowali Paweł PEREKIETKA i Tomasz IDZIASZEK



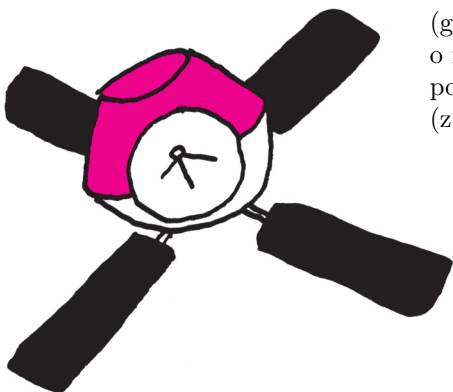
Rozwiązanie zadania M 1466.
Odp. Nie!

Przypuśćmy, że istnieje taki zbiór W . Wówczas istnieją w tym zbiorze okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, które mają punkt wspólny A , oraz okrąg ω , który nie przechodzi przez A . Oznaczmy punkty wspólne, różne od A , okręgów ω_1 i ω_2 , ω_2 i ω_3 , ω_3 i ω_1 , odpowiednio przez B, C oraz D . Wówczas ω przechodzi przez wszystkie te punkty.

Rozważmy piąty okrąg ω' ze zbioru W .



Musi on przechodzić przez A lub B (ponieważ są to jedyne punkty wspólne okręgów ω_1 i ω_2). Podobnie okrąg ω' musi przechodzić przez co najmniej jeden z każdej pary punktów spośród A, B, C i D . Stąd ω' przechodzi przez co najmniej trzy z tych punktów. To jest jednak niemożliwe, bo każda taka trójka wyznacza jednoznacznie jeden z okręgów $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega$.



Na tytuł składają się słowa
śp. Tadeusza Chrostka – kuglarza
z Bytomia – mojego mistrza sztuk
tajemnych.

Poziom morza na Marsie

Lubię sobie wyobrażać, że w przyszłości na skolonizowanym przez Ziemiaków Marsie będzie można wybrać się na wycieczkę, np. trekking na górę Olimp równie łatwo jak obecnie w Tatrach. Olimp (Olympus Mons) jest olbrzymim wygasłym wulkanem tarczowym o wysokości prawie 22 km ponad poziom morza. Jest zatem ponad dwukrotnie wyższy niż Mount Everest, a jego rozmiar u podstawy jest podobny do rozmiaru Polski.

Chwileczkę – mógłby tu zgłosić uwagę Czytelnik Trzeźwo Myślący – o ile mi dobrze wiadomo, na Marsie nie ma morza, więc w jaki sposób wyznacza się jego poziom? To dobre pytanie: poziom, od którego mierzy się na Marsie wysokości, jest w konkretny sposób *zdefiniowany*, a definicji było w historii badań Marsa co najmniej dwie.

W pierwszych latach pionierskich badań Marsa, od czasów sondy Mariner 9 do około 2001 roku, poziom marsjańskiego morza określał punkt potrójny wody. Jest to miejsce na diagramie fazowym, w którym lód, woda w stanie ciekłym i para wodna mogą współistnieć w równowadze termodynamicznej, w temperaturze nieco powyżej $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (dokładnie $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$, czyli $273,16\text{ K}$) i ciśnieniu $611,73\text{ Pa}$. Rozumowanie naukowców było niezwykle proste: dla ciśnień mniejszych od krytycznego $611,73\text{ Pa}$ woda nie może istnieć w stanie ciekłym, zatem o istnieniu morza nie może też być mowy. Ciśnienie punktu potrójnego wody jest w przybliżeniu równe średniemu marsjańskiemu ciśnieniu atmosferycznemu przy powierzchni. Miejsca o ciśnieniu odpowiadającym właśnie ciśnieniu punktu potrójnego wody mogą więc odpowiadać powierzchni hipotetycznego oceanu. Definicja powierzchni określającej punkt zerowy marsjańskiej *areografii* za pomocą *aeroidu* (powierzchni wyznaczonej przez cechy atmosfery) wydaje mi się więc całkiem elegancka.

Druga, nowocześniejsza definicja używana po 2001 r., czyli od czasów misji Mars Orbitera (eksperyment MOLA, Mars Orbiter Laser Altimeter) do zdefiniowania poziomu morza używa nieco bardziej „przyziemnej” konwencji. Skoro wszystkie miejsca na powierzchni oceanu muszą mieć ten sam potencjał grawitacyjny (gdyby tak nie było, woda przepływałaby z miejsc o wyższej energii do miejsc o niższej energii), to za poziom odniesienia na powierzchni Marsa można przyjąć powierzchnię ekwipotencjalną odpowiadającą średniemu promieniowi równika (z uwzględnieniem poprawek związanych z rotacją Marsa).

Michał BEJGER

Logarytm – logika i rytm?

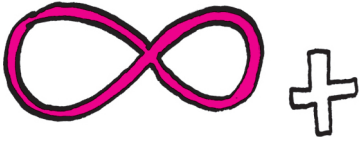
Adam KOLANY*

Dodawanie jest łatwe. Każdy się z tym zgodzi. Ot, zapisujemy dodawane liczby jedna pod drugą, dodajemy kolejne cyfry, bacząc na przeniesienia i to wszystko. Gorzej jest z mnożeniem. Wyznaczenie iloczynu liczby n -cyfrowej przez liczbę m -cyfrową, gdzie $m > n$, wymaga co najmniej dodania n liczb o około $m + n$ cyfrach każda. Zajmuje to dużo miejsca, czasu. Łatwo się pomylić. Zastanówmy się zatem, czy nie dałoby się jakoś tak „zakodować” liczb, aby zamiast mnożyć liczby jako takie, dodawać ich kody, a następnie wynik odkodować, dostając iloczyn. Innymi słowy, pytamy o istnienie funkcji $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia związek:

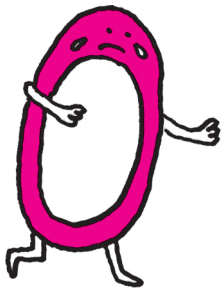
$$(*) \quad \kappa(x \cdot y) = \kappa(x) + \kappa(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

*Pałac Młodzieży w Katowicach

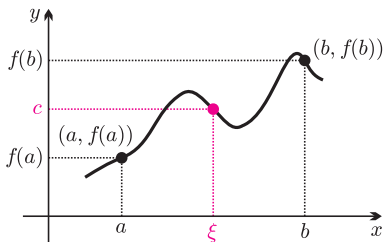
No tak, ale już na pierwszy rzut oka widać, że jedyną taką funkcją jest funkcja stale równa zero. Bo przecież $\kappa(x) + \kappa(0) = \kappa(x \cdot 0) = \kappa(0)$, skąd $\kappa(x) = 0$ dla dowolnego x .



Bez założenia ciągłości równanie (*) nie ma jednoznacznego rozwiązania. Dokładniej rzecz ujmując, istnieje nieprzeliczalnie wiele rozwiązań tego równania, wśród których dokładnie jedno jest ciągłe. Te nieciągłe są jednak bardzo paskudne.



Własność Darboux
 Obraz przedziału jest przedziałem, czyli jeżeli funkcja f określona na przedziale przyjmuje dwie różne wartości $f(a)$ i $f(b)$ w punktach a i b swojej dziedziny, to przyjmuje także każdą wartość znajdującą się pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ w jakimś punkcie między a i b . Własność ta przysługuje funkcjom ciągłym, ale także pochodnym funkcji różniczkowalnych.



„Księgą kodów”, służącą przekodowaniu czynników na składniki, jest tablica logarytmiczna, a „maszyną” do tego służącą – suwak logarytmiczny.

Hmm... To może złagodźmy nieco nasze wymagania? Właściwie po co mamy kodować zero? W końcu wszyscy wiedzą, jak się przez nie mnoży? Więcej – wystarczy takie kodowanie znaleźć tylko dla liczb dodatnich – przecież wiemy, jak znak iloczynu zależy od znaków czynników.

Tak więc szukamy funkcji $\kappa: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia związek (*) i która nie jest stale równa zero. Więcej, szukać będziemy takiego κ , które jest ciągłe, czyli które dla bliskich wartości argumentów przyjmuje bliskie wartości i to w dodatku tak, aby dokładnością tego przybliżenia można było „sterować”.

Z warunku (*) łatwo dostajemy

- (*₁) $\kappa(\frac{1}{x}) = -\kappa(x)$ dla $x > 0$, oraz
- (*₂) $\kappa(x^r) = r \cdot \kappa(x)$ dla $x > 0$ i $r \in \mathbb{N}$.

Wraz z warunkiem (*₁) otrzymujemy, że (*₂) zachodzi dla $x > 0$ oraz r całkowitych. Dalej, jeśli $r \in \mathbb{Q}$, to $r = \frac{k}{l}$ dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, $l \neq 0$ i wówczas $k \cdot \kappa(x) = \kappa(x^k) = \kappa((x^{\frac{k}{l}})^l) = l \cdot \kappa(x^{\frac{k}{l}})$, skąd $\kappa(x^{\frac{k}{l}}) = \frac{k}{l} \cdot \kappa(x)$ dla $x > 0$. Czyli (*₂) zachodzi dla $x > 0$ oraz r wymiernego. Ponieważ każdą liczbę niewymierną można z dowolną dokładnością przybliżyć liczbami wymiernymi, postulowana wcześniej ciągłość funkcji κ pozwala wywnioskować, że równość (*₂) zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej r .

Z założeń, jakie nałożyliśmy na κ , można łatwo wywnioskować, że $\kappa(1) = 0$. Zauważmy, że 1 jest jedyną taką liczbą, dla której κ się zeruje. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnego $a \neq 1$ zachodzi $\kappa(a) = 0$. Niech dalej $x > 0$. Ponieważ funkcja wykładnicza o podstawie $a > 0$, $a \neq 1$ przyjmuje wszystkie dodatnie wartości, więc istnieje takie w , dla którego $a^w = x$. Stąd jednak $\kappa(x) = \kappa(a^w) = w \cdot \kappa(a) = 0$, co przeczy założeniom o κ .

Udowodniona właśnie obserwacja implikuje w prosty sposób różnowartościowość funkcji κ . Załóżmy bowiem, że $\kappa(x) = \kappa(y)$, wówczas $\kappa(\frac{x}{y}) = \kappa(x) - \kappa(y) = 0$, skąd właśnie $\frac{x}{y} = 1$, czyli $x = y$. Co więcej, jedyność miejsca zerowego funkcji κ wraz z ciągłością tej ostatniej (a dokładniej z faktem, że ma ona własność Darboux) implikuje monotoniczność tej funkcji. Niech bowiem $0 < x < y$ i $0 < z < v$. Wówczas dla $c_1 = \frac{y}{x}$, $c_2 = \frac{v}{z} > 1$ wartości $\kappa(c_1)$ i $\kappa(c_2)$ są tego samego znaku (inaczej jakieś c między c_1 i c_2 zerowałoby wartość κ , co nie jest możliwe). To zaś dowodzi, że bądź $\kappa(x) < \kappa(y)$, $\kappa(z) < \kappa(v)$, bądź $\kappa(v) < \kappa(z)$, $\kappa(y) < \kappa(x)$, co wobec dowolności x, y, v i z dowodzi monotoniczności κ .

Założyliśmy, że κ nie jest stale równa zero, co oznacza, że istnieje $c > 0$, dla którego $\kappa(c) \neq 0$. Ponieważ $\kappa(\frac{1}{c}) = -\kappa(c)$, jedna z liczb $\kappa(c)$ i $\kappa(\frac{1}{c})$ jest dodatnia, a druga ujemna. Oczywiście, możemy bez straty ogólności założyć, że to właśnie $\kappa(c) > 0$. Teraz, skoro $\kappa(c) > 0$, istnieją takie wymierne α, β , dla których $\alpha \cdot \kappa(c) < 1$ oraz $\beta \cdot \kappa(c) > 1$, skąd $\kappa(c^\alpha) < 1 < \kappa(c^\beta)$. Ponieważ κ jest ciągła, spełnia ona własność Darboux, a stąd wynika, że istnieje taka wartość δ pomiędzy c^α oraz c^β , dla której $\kappa(\delta) = 1$. Zauważmy przy tym, że jeśli $\delta > 1$, to κ jest funkcją rosnącą, bo wówczas dla $x < y$, mamy $\frac{y}{x} > 1$, skąd wynika, że $\kappa(\frac{y}{x})$ oraz $\kappa(\delta) = 1$ są tego samego znaku, czyli $\kappa(y) - \kappa(x) = \kappa(\frac{y}{x}) > 0$, co oznacza, że $\kappa(x) < \kappa(y)$.

Teraz właściwie wszystko staje się jasne. Niech bowiem $x > 0$, wówczas

$$\kappa(x) = \kappa(\delta) \cdot \kappa(x) = \kappa(\delta^{\kappa(x)}),$$

a stąd z różnowartościowości κ dostajemy $x = \delta^{\kappa(x)}$.

Innymi słowy, $\kappa(x)$ jest tą potęgą liczby δ , której wartością jest x . Taką liczbę nazywamy „logarytmem z x przy podstawie δ ” i oznaczamy symbolem $\log_\delta(x)$. Ale przecież o tym wszyscy wiedzą – w końcu uczy się tego w szkołach...

PS. Serdecznie dziękuję dr. Tomaszowi Bielaczcowskiemu za cenne uwagi, które przyspieszyły ukończenie tego tekstu.



Kwadratura koła – problem polegający na skonstruowaniu kwadratu o polu równym polu danego koła. Algebraicznie reprezentuje to równanie $\pi r^2 = a^2$, gdzie r jest promieniem danego koła, a a długością boku poszukiwanego kwadratu. Dla $r = 1$ bok ten wynosi $\sqrt{\pi}$, a zatem niezbędne jest albo wyznaczenie wartości liczby $\sqrt{\pi}$, albo jej przybliżenie przez odpowiednią konstrukcję geometryczną.

Thomas Carlyle – żyjący w okresie wiktoriańskim szkocki pisarz, historyk oraz filozof historii. Znany szczególnie z takich książek jak „Rewolucja Francuska: historia” oraz „Sartor Resartus”.

Okręgi Carlyle’a

Karol GRYSZKA*

Jednym z najstarszych zagadnień matematyki są równania algebraiczne, wśród nich problem znalezienia pierwiastków trójmianu kwadratowego. Już w starożytności pojawiły się zadania, do rozwiązania których należało wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby (to jest rozwiązać równanie $x^2 = a$ dla $a > 0$) lub odnaleźć miejsce zerowe trójmianu kwadratowego. Pojawił się, między innymi, klasyczny problem wyznaczenia długości przekątnej kwadratu (oraz wykazanie niewspółmierności przekątnej z bokiem). Jedne z pierwszych zapisków zawierających rozwiązania równań kwadratowych oraz sześciennych pochodzą jeszcze z czasów Babilonii, datowane są na 1800–1600 p.n.e. Dopiero prawie 3000 lat później, w XII wieku Aczarja Bhaskara wykazał, że liczba dodatnia ma dwa pierwiastki.

Wiele problemów algebraicznych można rozwiązać w sposób dokładny lub przybliżony, wykorzystując narzędzia geometrii. Historia zna wiele przykładów, począwszy od problemu kwadratury koła, przez rozwiązywanie równań oraz układów równań liniowych. Takie graficzne (i dokładne) rozwiązanie jest również możliwe dla równań kwadratowych. Rozwiązanie graficzne wykorzystuje jedynie klasyczne konstrukcje oparte na cyrku i linijce – oraz tytułowe okręgi Carlyle’a.

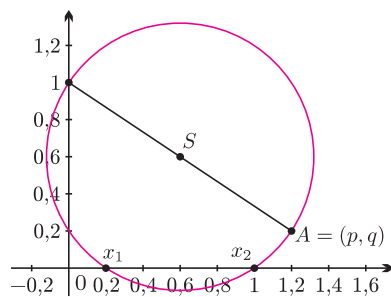
Rozważmy równanie kwadratowe:

$$(1) \quad x^2 - px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Naszym celem jest znalezienie rozwiązań powyższego równania, za pomocą pewnej konstrukcji geometrycznej. Oczywiście, algebraicznie jesteśmy w stanie natychmiast podać pierwiastki równania (1):

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Jedną z metod przybliżonego poszukiwania pierwiastków jest próba narysowania paraboli. Zwykle jednak do tego celu wykorzystujemy właśnie pierwiastki równania. Tego błędnego koła można szczęśliwie uniknąć, wykorzystując wspomniane już okręgi Carlyle’a.



Wprowadźmy formalną definicję. **Okręgiem Carlyle’a** stowarzyszonym z równaniem kwadratowym (1) nazywamy okrąg, którego średnicą jest odcinek o końcach w punktach $(0, 1)$ oraz (p, q) .

Okrąg Carlyle’a jest wyznaczony w sposób jednoznaczny przez równanie (1). Co więcej, łatwo można zaobserwować, że dla każdego okręgu przechodzącego przez punkt $(0, 1)$, istnieją takie wartości współczynników p oraz q , że okrąg ten jest okręgiem Carlyle’a stowarzyszonym z równaniem kwadratowym $x^2 - px + q = 0$.

Najważniejszą cechą okręgu Carlyle’a jest jego związek z pierwiastkami równania, które wyznacza okrąg. Okazuje się bowiem, że liczba ξ jest rozwiązaniem równania (1) wtedy i tylko wtedy, gdy stowarzyszony okrąg Carlyle’a przecina oś odciętych w punkcie $(\xi, 0)$. Istotnie, środek takiego okręgu to punkt o współrzędnych $(\frac{p}{2}, 1 + \frac{q-1}{2})$, a z twierdzenia Pitagorasa jego promień jest równy $r = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + (\frac{q-1}{2})^2}$. Okrąg Carlyle’a opisany jest więc równaniem

$$(2) \quad \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \left(1 + \frac{q-1}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

Ponieważ poszukujemy punktów przecięcia okręgu z osią OX , więc podstawiamy $y = 0$ do równania (2). Upraszcza się ono do postaci

$$(3) \quad \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{q-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

Po redukcji równania (3) otrzymujemy dokładnie równanie (1).

*doktorant, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński



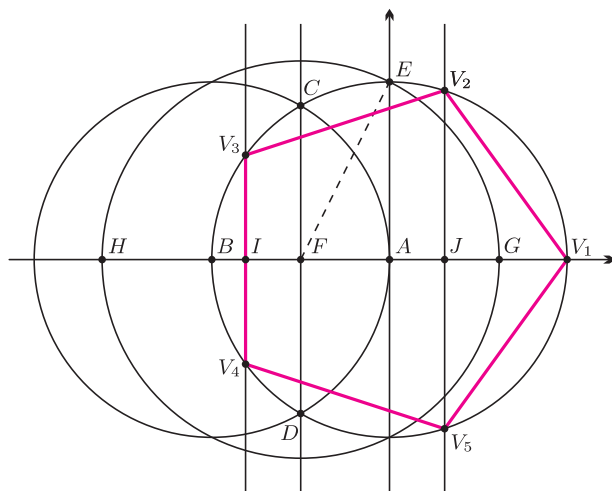
Rozwiązanie zadania M 1465.
Odp. Nie!

Dwudziestościan foremny jest środkowosymetryczny, więc każdy jego przekrój płaszczyzną przechodzącą przez jego środek również. Nie istnieje natomiast środkowosymetryczny jedenastokąt.

Należy ponadto sprawdzić, że okrąg przecina oś OX w co najmniej jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu (1) jest nieujemny. Można to zrobić niezależnie od powyższego rozumowania i to zadanie pozostawiamy Tobie, Drogi Czytelniku.

Dzięki swoim własnościom okręgi Carlyle'a znalazły zastosowanie w konstrukcjach wielokątów foremnych. W szczególności za ich pomocą, wykorzystując wyłącznie cyrkiel i linijkę, można łatwo skonstruować pięciokąt oraz siedemnastokąt foremny.

Opiszemy teraz konstrukcję pięciokąta foremnego z wykorzystaniem okręgów Carlyle'a.



1. Narysuj okrąg (zwany dalej: początkowym) o środku w punkcie $A = (0, 0)$ oraz promieniu 1. Niech ponadto $B = (-1, 0)$, $V_1 = (1, 0)$ oraz $E = (0, 1)$. Punkt V_1 jest jednym z wierzchołków konstruowanego pięciokąta foremnego.
2. Narysuj okrąg o środku w punkcie B przechodzący przez punkt A . Okrąg ten przecina okrąg początkowy w punktach C oraz D .
3. Przez punkty C oraz D poprowadź prostą. Punkt jej przecięcia z osią OX oznacz F .
4. Narysuj okrąg o środku w punkcie F przechodzący przez punkt E . Przecina on oś OX w dwóch punktach G oraz H .
5. Skonstruuj symetralne odcinków HA oraz AG . Oznacz miejsca przecięcia tych symetralnych z osią OX odpowiednio przez I oraz J .
6. Symetralne skonstruowane w punkcie 5. przecinają ponadto okrąg początkowy w czterech punktach V_2, V_3, V_4, V_5 , będących jednocześnie czterema brakującymi wierzchołkami pięciokąta foremnego.

Wyprowadzimy teraz algebraicznie powyższą konstrukcję. Konstrukcja ta wykorzystuje podstawowe wiadomości dotyczące zbioru liczb zespolonych \mathbb{C} .

Liczyby zespolone stanowią rozszerzenie liczb rzeczywistych o „pierwiastek z -1 ”. Formalnie liczby zespolone definiujemy jako zbiór par liczb rzeczywistych (a, b) z działaniami dodawania oraz mnożenia zdefiniowanymi następująco:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Tradycyjnie liczbę $(0, 1)$ oznacza się przez i . Innym sposobem zapisu liczby zespolonej $z = (a, b)$ jest jej postać algebraiczna $z = a + ib$. Definiuje się część rzeczywistą $\text{Re}(z) := a$ oraz urojoną $\text{Im}(z) := b$, ponadto definiuje się moduł liczby zespolonej $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ oraz jej argument ϕ będący wartością kąta nachylenia wektora $[a, b]$ na płaszczyźnie względem osi OX . Argument spełnia zależności $\sin \phi = \frac{b}{|z|}$ oraz $\cos \phi = \frac{a}{|z|}$. Pozwala to na zapisanie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$ oraz wykładniczej $z = |z|e^{i\phi}$, która wynika ze wzoru Eulera $e^{it} = \cos t + i \sin t$ prawdziwego dla dowolnej liczby rzeczywistej t . Charakterystyczną cechą zbioru liczb zespolonych jest to, że wszystkie równania algebraiczne mają w nim pierwiastki. Równanie $x^2 = -3$ nie ma rozwiązań rzeczywistych, natomiast ma dwa rozwiązania zespolone $x_1 = i\sqrt{3}$ oraz $x_2 = -i\sqrt{3}$.

Przejdźmy do wyprowadzenia konstrukcji. Aby zbudować pięciokąt foremny, wystarczy skonstruować pierwiastki piątego stopnia z jedynki, czyli rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równanie

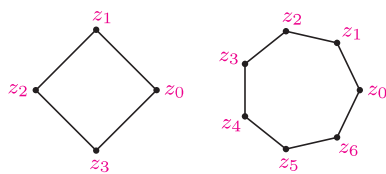
$$(4) \quad z^5 = 1.$$

Jednym z pierwiastków równania (4) jest, oczywiście, $z_0 = 1$, pozostałe natomiast spełniają równanie

$$(5) \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Wzór de Moivre'a

Pierwiastki stopnia n z jedynki zawsze wyznaczają na płaszczyźnie wierzchołki wielokątów foremnych. Wynika to ze wzoru de Moivre'a, który pozwala na wyliczenie pierwiastków dowolnego stopnia z dowolnej liczby, również zespolonej. Jeżeli dane jest równanie $z^n = w$, to jego rozwiązaniami są $z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right)$ dla $k = 0, 1, \dots, n-1$, gdzie ϕ jest argumentem liczby zespolonej w . Dla $w = 1$ rozwiązania te można zapisać krótko w postaci wykładniczej $z_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$.



Przykłady dla $n = 4$ oraz $n = 7$.

Niech teraz $z_k = e^{\frac{2\pi ki}{5}}$ dla $k = 1, 2, 3, 4$ będą pierwiastkami równania (5).
Zdefiniujmy

$$(6) \quad w_1 := z_1 + z_4 = 2\operatorname{Re}(z_1) = 2\cos\frac{2}{5}\pi, \quad w_2 := z_2 + z_3 = 2\operatorname{Re}(z_2) = 2\cos\frac{4}{5}\pi.$$

Ze wzoru Viète'a na sumę pierwiastków wynika, że $w_1 + w_2 = -1$, ponadto $w_1 w_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_4 z_2 + z_4 z_3 = z_3 + z_4 + z_1 + z_2 = -1$. Ponownie korzystając ze wzorów Viète'a, stwierdzamy, że w_1 oraz w_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 + x - 1 = 0$. Konstruujemy zatem okrąg Carlyle'a o średnicy opartej na punktach $(-1, -1)$ i $E = (0, 1)$. Jego środkiem jest punkt $F = (-\frac{1}{2}, 0)$, a punktami przecięcia z osią odciętych, zgodnie ze wzorem (6) są $H = (2\cos\frac{4}{5}\pi, 0)$ oraz $G = (2\cos\frac{2}{5}\pi, 0)$. Symetralne odcinków AG oraz AH przecinają więc oś OX w punktach J oraz I odpowiednio, których odcięte są równe częściom rzeczywistym odpowiednich pierwiastków. Ponieważ symetralne mają stałą odciętą, przecinają one okrąg każda w dwóch punktach, będących jednocześnie poszukiwanymi pierwiastkami równania (5).

Wielokąty foremne mające 257 oraz 65537 boków również dają się skonstruować z wykorzystaniem okręgów Carlyle'a. Fizyczny model wymagałby jednak bardzo dokładnego oraz bardzo dużego cyrkla. O ile konstrukcja pięciokąta wymaga zaledwie jednego okręgu Carlyle'a, a konstrukcja siedemnastokąta czterech, to konstrukcja 257-kąta wymaga 24 okręgów; jeden z nich jest rozwiązaniem równania $x^2 + x - 64 = 0$ (a więc ma promień kilkadziesiąt razy większy niż okrąg jednostkowy, na którym budowany jest wielokąt). W przypadku 65537-kąta jeden z okręgów będzie stowarzyszony z równaniem $x^2 + x - 8192 = 0$. W 1991 roku stwierdzono, że liczba wymaganych w tym celu okręgów nie przekracza 1332 (!). Dokładna i wystarczająca ich liczba nie jest niestety znana autorowi artykułu.

Algebraiczna metoda wyznaczenia wartości kosinusa

Oznaczmy $u = \frac{2}{5}\pi$ oraz $a = \cos u$. Wtedy $\cos 4u = \cos(2\pi - u) = \cos u$. Z drugiej strony, korzystając ze wzorów $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ oraz jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy $\cos 4u = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1$. Aby wyznaczyć wartość $\cos u$, wystarczy teraz rozwiązać równanie $8a^4 - 8a^2 + 1 = a$. Równanie to ma dwa wymierne pierwiastki $a_1 = 1$ oraz $a_2 = -\frac{1}{2}$, pozostałe dwa są pierwiastkami trójmianu $4a^2 + 2a - 1$. Ponieważ $\frac{\pi}{3} < u < \frac{\pi}{2}$, zatem $\frac{1}{2} > a > 0$, czyli a jest pierwiastkiem trójmianu. Ale tylko jeden z nich jest dodatni, jest nim $a = \frac{1}{\sqrt{5} + 1}$. Stąd ostatecznie $\cos \frac{2}{5}\pi = \frac{1}{\sqrt{5} + 1}$.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1465. Czy istnieje przekrój dwudziestościanu foremnego płaszczyzną przechodzącą przez jego środek, będący jedenastokątem?

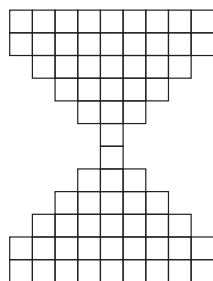
Rozwiązanie na str. 17

M 1466. Czy istnieje co najmniej 5-elementowy zbiór okręgów na płaszczyźnie, taki, że każde trzy okręgi ze zbioru mają punkt wspólny, ale nie istnieje punkt wspólny wszystkich okręgów ze zbioru?

Rozwiązanie na str. 14

M 1467. Czy można pociąć na płytki o wymiarach 1×2 (\square) figurę przedstawioną na rysunku 1?

Rozwiązanie na str. 5



Rys. 1

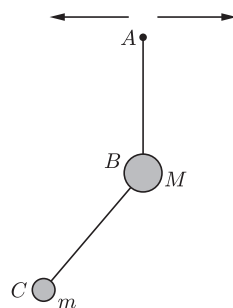
Przygotował Michał NAWROCKI

F 885. Do wahadła AB o długości L z kulką o masie M podwieszono wahadło BC z kulką o masie m (rys. 2). Punkt zawieszenia A wykonuje poziome drgania o okresie T . Znaleźć długość nici BC , jeżeli wiadomo, że nić AB podczas wahań wahadła zachowuje cały czas kierunek pionowy.

Rozwiązanie na str. 24

F 886. Kamerą rejestrującą $f = 24$ obrazy na sekundę sfilmowano drgania wahadła matematycznego. Jeden pełny okres wahań zajmuje $N = 48$ kadrów. Długość obrazu wahadła na kliszy filmowej wynosi $L' = 10$ mm. Ogniskowa obiektywu kamery wynosi $F = 70$ mm. Z jakiej odległości D sfilmowano wahadło?

Rozwiązanie na str. 23



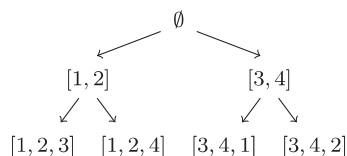
Rys. 2



```

d[0] := 1;
for i := 1 to n do
  for j := m downto b_i do
    if d[j - b_i] = 1 then d[j] := 1;

```



Ilustracja algorytmu generującego strukturę danych opisującą podzbiory o $n - 1$ elementach dla $n = 4$ przedmiotów.

```

d[0] := 1;
for i := 1 to n - 1 do
  for j := m downto -m + b'_i do
    if d[j - b'_i] = 1 then d[j] := 1;
  for j := -m to m - b'_i do
    if d[j + b'_i] = 1 then d[j] := 1;

```

Informatyczny kącik olimpijski (84): Sklep ze słodyczami

Tym razem zadanie *Candies* z Bałtyckiej Olimpiady Informatycznej z 2010 roku. W sklepie znajduje się n paczek z cukierkami, i -ta z nich zawiera b_i cukierków. Sklepiarz może sprzedawać jedynie całe paczki, więc jeśli w sklepie są cztery paczki zawierające 1, 3, 4 i 4 cukierki, to może on obsłużyć następnego klienta tylko wtedy, gdy ten złoży zamówienie jednego z 9 rozmiarów (konkretnie gdy poprosi o 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11 lub 12 cukierków). Sklepiarz zastanawia się, jak bardzo mógłby zwiększyć liczbę możliwości, gdyby zamienił liczbę cukierków w jednej z paczek. Przykładowo, po wyrzuceniu jednej paczki z 4 cukierkami i dodaniu paczki z 9 cukierkami, liczba możliwych do zrealizowania zamówień zwiększy się do 13 (będą to 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 16, 17). Jeśli istnieje więcej niż jedno optymalne rozwiązanie, w którym sklepiarz zamienia paczkę z p cukierkami na paczkę z q cukierkami, należy podać to, w którym para (p, q) jest minimalna leksykograficznie.

Założmy na początek, że wyrzuciliśmy którąś z paczek, a zestaw pozostałych $n - 1$ paczek umożliwia zrealizowanie zamówień o wielkościach x_0, x_1, \dots, x_k (zakładamy przy tym, że zamówienie $x_0 = 0$ również jest poprawne). Jeśli dodamy do tego zestawu paczkę q cukierków, to będziemy mogli dodatkowo zrealizować zamówienia $q, x_1 + q, \dots, x_k + q$, a zatem jeśli q nie jest równe żadnej różnicy $x_i - x_j$, to liczba zamówień wzrośnie dwukrotnie. Możemy to sobie zagwarantować, dodając wystarczająco dużą paczkę, np. rozmiaru $q = b_1 + \dots + b_n + 1$. Rozwiązanie zadania można zatem podzielić na dwie części: znalezienie paczki p , której wyrzucenie jak najmniej zmniejszy liczbę możliwych zamówień, oraz znalezienie jak najmniejszej paczki q , która spowoduje dwukrotne zwiększenie liczby możliwych zamówień.

Zadanie to jest pewną wariacją na temat problemu plecakowego (o którym pisaliśmy m.in. w numerze 6/2013). W szczególności wyznaczenie liczby zamówień możliwych do zrealizowania przez początkowy zestaw paczek to zastosowanie tego algorytmu do n przedmiotów rozmiarów b_1, \dots, b_n i plecaka o udźwigu $m = b_1 + \dots + b_n$. Pseudokod algorytmu znajduje się na marginesie. Przypomnijmy istotne dla nas kwestie: czas działania algorytmu wynosi $O(nm)$, analizuje on przedmioty pojedynczo (w czasie $O(m)$ każdy), aktualizując tablicę $d[0..m]$ (w wynikowej tablicy mamy $d[j] = 1$, jeśli zamówienie rozmiaru j może być zrealizowane), oraz dla ostatecznego wyniku nie ma znaczenia kolejność, w której przedmioty są analizowane. Możemy abstrahować od szczegółów implementacyjnych i zamknąć go w strukturze danych, która w czasie $O(m)$ będzie umożliwiawała wykonywanie trzech operacji: zrobienie kopii struktury, dodanie nowego przedmiotu oraz wyznaczenie liczby zamówień realizowanych przez dodane przedmioty.

Aby znaleźć paczkę p , potrzebujemy rozwiązać problem plecakowy dla każdego podzbioru $n - 1$ przedmiotów. Jeśli rozpatrzemy każdy z tych podzbiorów niezależnie, dostaniemy algorytm o złożoności czasowej $O(n^2m)$.

Możemy postąpić nieco sprytniej. Będziemy utrzymywać listę struktur danych (na początek zaczynamy z jedną pustą strukturą danych). Teraz, dopóki struktury na liście zawierają mniej niż $n - 1$ przedmiotów, to dla każdej struktury B dzielimy zbiór przedmiotów S *niewystępujących* w tej strukturze na dwa w miarę równe podzbiory S_1 i S_2 , a strukturę B zastępujemy jej kopiami B_1 i B_2 , do których dodajemy przedmioty odpowiednio z podzbiorów S_1 i S_2 (patrz rysunek). Jeśli dla uproszczenia założymy, że n jest potęgą dwójki, to w i -tej fazie tego algorytmu wygenerujemy 2^i struktur, do każdej z nich dodając $n/2^i$ przedmiotów. Zatem złożoność czasowa każdej z $\log_2 n$ faz wyniesie $O(nm)$, czyli rozwiązanie problemu plecakowego dla wszystkich podzbiorów $n - 1$ przedmiotów zajmie czas $O(nm \log n)$.

Pozostaje teraz znalezienie minimalnej liczby q , która nie będzie równa żadnej różnicy $x_i - x_j$. Ponieważ x_i są zamówieniami generowanymi przez wybrany podzbiór b'_1, \dots, b'_{n-1} paczek, to wszystkie różnice będą generowane przez zbiór $b'_1, -b'_1, \dots, b'_{n-1}, -b'_{n-1}$. Wystarczy zatem rozwiązać problem plecakowy dla takich przedmiotów (w naszej wersji tego problemu przedmioty o ujemnym rozmiarze nie stanowią problemu, należy jednak zwrócić uwagę na rozmiar tablicy i poprawną kolejność pętli) i zwrócić jako q minimalną dodatnią liczbę, dla której $d[j] = 0$. Czas działania tej części rozwiązania to $O(nm)$.

Tomasz IDZIASZEK



Chińczycy nadchodzą

Wiadomości, które przysły z Chin, są bulwersujące. Mimo iż Profesor Bralczyk w tegorocznym tekście analizowanym przez maturzystów przestrzega przed nadmiarem egzaltacji w słowie pisanym, tym razem „bulwersujące” jest jak najbardziej na miejscu. Zetknęłam się z początkiem tych wiadomości, oglądając film *DNA dreams* pokazywany na festiwalu dokumentów w 2012 roku. W filmie poznajemy ogromny Instytut Genetyki z Szanghaju, w którym dokonuje się bardzo wielu ważnych manipulacji genetycznych (staram się nie nadużywać przymiotników) skoncentrowanych pozornie na zwierzętach. Więc klonuje się świnki, w najbliższym czasie (2012) są takie same zamiary w stosunku chyba do krów, a może owiec – pewno do wszystkiego tego dobra. Te prace są w naukowym sensie wtórne – dość dawno urodziła się owca Dolly – ale robione są z przemysłowym rozmachem i z uwzględnieniem najnowszych osiągnięć nauki i techniki. Instytut wyposażony jest w najnowocześniejszy sprzęt, pracuje tu kilka tysięcy ludzi, w większości bardzo młodych, tacy przed trzydziestką kierują dużymi zespołami. Do domu daleko, a mieszkanka takie małe, że gotowanie i mycie robi się na balkonach, więc część z tych ludzi po prostu przynosi kaptcie i poduszki i przespia na swoich biurkach.

Chińczycy nam i światowemu genetycznemu Kongresowi opowiedzieli o projekcie poszukiwania genu inteligencji ludzkiej. Nie, nie myślcie, że oni nie wiedzą, że na inteligencję składa się wiele genów i także sposób życia po urodzeniu. Ale można zawsze poszukać różnic między DNA ludzi przeciętnych i ludzi wybitnie zdolnych. Nie, nie myślcie, że oni nie wiedzą o niedoskonałości kryterium „współczynnika inteligencji” (IQ), ale lepszej szybkiej diagnozy jeszcze nikt nie wymyślił i można zawsze poszukać różnic między DNA ludzi przeciętnych i ludzi z wysokim (ponad 150) IQ. I to właśnie robią: pobierają patyczkiem z watą śluz z wnętrza policzków kilkuletnich dzieci i sekwencjonują DNA. Mają kilkaset najnowocześniejszych maszyn-sekwencjatorów i zasuwiają po jednym genomie w parę godzin (pierwsza analiza całego genomu ludzkiego zajęła około 3-4 lata w końcu XX wieku).

Gdybyście takie informacje uzyskali – jednocześnie te świnki i te geny – to co byście sobie pomyśleli? Na jaką drogę weszła genetyka chińska? To proste: ulepszanie człowieka i łatwe tych ulepszonych pomnażanie. Od trzech lat w bakteriologii znana jest metoda wprowadzania korekt genetycznych w pojedynczych komórkach z dobrze zdefiniowaną wydajnością i precyzją. Tylko że w przypadku bakterii wykonuje się procedury na milionach komórek, odrzuca i nie dba o komórki niemodyfikowane. Ta sama metoda zastosowana w doświadczeniu chińskim w stosunku do 86 zarodków ludzkich w zasadzie zawiodła – nie we wszystkich doszło do korekty i nie była ona precyzyjna. Do prób użyto ludzkie wadliwe zarodki (były wynikiem polispermii, i jako takie nie miały szans na przetrwanie). Na doświadczenia uzyskano akceptację komitetów etycznych, przeprowadzono je zgodnie z Deklaracją Helsińską.

Problemem jest także publikowanie takich osiągnięć, ponieważ w „naszej” części świata (gdzie leży ta „nasza”? na zachodzie, na północy?) manipulacje genomem ludzkim nie są dozwolone, a prace takie nie są (gdyby powstały) ogłaszane. W tym roku w czasopismach *Nature* i *Science* opublikowano także dwa różne apele, różnych grup ekspertów z tej dziedziny i z „naszej” części świata o wstrzymanie się od modyfikacji ludzkich zarodków i przystąpienie do dyskusji na ten temat. Tak jak informacje płynące z filmu *DNA dreams* są już w dużej mierze nieaktualne, tak samo procedura modyfikowania ludzkich embrionów jest już bez wątpliwości ulepszana. Chyba nie mamy wyboru: jeżeli ludzie coś umieją zrobić, to robią. Gorzej – jeżeli wiedzą, że czegoś zrobić nie można, to prędzej czy później znajdzie się ktoś, kto tego nie wie i to robi (chyba Einstein). No, to czas posłuchać ekspertów z *Nature* i *Science* i zacząć dyskusję.

Magdalena FIKUS

Krytyczny umysł

Przywykliśmy do przenikania się jak największego, czyli wszechświata, z jak najmniejszym, czyli mikroświatem (front badań doświadczalnych jest na poziomie, który – w systemie metrycznym – należałoby nazywać attoświatem), często zapominając o czymś najbardziej złożonym, czyli naszym umyśle, bez którego pozostałych dwóch ekstremów nie miałby kto rozważać.

Jednym z kluczowych problemów interdyscyplinarnej neurobiologii (określanej w literaturze angielskojęzycznej jako *neuroscience*) jest pytanie o to, jak w sieci prostych elementów (neuronów) pojawia się myślenie.

Trzeba uczciwie przyznać, że choć niemal z każdym dniem wiemy coraz więcej, to w sumie nadal jest to tyle co nic. Dlatego naukowcy zajmują się odpowiadaniem na prostsze pytania. Od około dekady umacnia się przekonanie, że sieć neuronów pracuje najefektywniej w warunkach krytycznych, które osiąga poprzez samoorganizujący się proces nierównowagowy. Pojedynczy neuron ma szereg wejść (dendrytów) oraz (na ogół) jedno, rozgałęzione na końcu, wyjście (akson). Jeżeli chwilowa suma sygnałów wejściowych przekroczy pewien poziom, to jest wysyłany sygnał. Po jego wysłaniu komórka potrzebuje czasu do uzyskania gotowości do wysłania następnego. To ten prosty mechanizm ma stać za ustalaniem się warunków krytycznych, czyli sytuacji, w której nie można stwierdzić, czy sieć jest podkrytyczna – mało neuronów bliskich wysłania sygnału, czy nadkrytyczna – dużo takich neuronów.

Odpowiednikiem termodynamicznym takiej sytuacji jest punkt krytyczny np. wody, czyli taka wartość temperatury i ciśnienia, w której nie można odróżnić cieczy od gazu. Dla ciśnienia i temperatury zbliżonych do wartości krytycznych rozkład fluktuacji gęstości staje się potęgowy, czyli trójwymiarowa mapa gęstości jest samopodobna – wygląda tak samo niezależnie od skali.

Sieć neuronów generuje kaskady sygnałów. Mechanizm jest podobny do powstawania lawinek piasku w klepsydrze. W warunkach krytycznych rozkłady, tak wielkości kaskad, jak i czasu ich trwania, są potęgowe. Taka niezależność od skali została wielokrotnie stwierdzona dla fragmentów tkanki nerwowej badanych *in vitro*. Autorzy pracy [1] postanowili natomiast zbadać, jak tkanka nerwowa zachowuje się wtedy, gdy ma co robić.

W tym celu poświęcili dziewięć mózgów żółwi dla dobra nauki. Chodziło o sprawdzenie zachowania kory wzrokowej pod wpływem optycznej stymulacji siatkówki. Oczywiście, wszystko odbyło się w zgodzie ze stosownymi przepisami o traktowaniu zwierząt, ale dla nieprzygotowanego obserwatora procedura może wyglądać dość makabrycznie. Żółwie były najpierw usypiane, a następnie dekapitowane. Z ich głów wydobywano mózgi wraz z gałkami ocznymi, z których jedną odcinano, a drugą przepoławiano, odsłaniając siatkówkę. Tak spreparowany organ umieszczano w sztucznym płynie rdzeniowo-mózgowym.

Do odpowiedniej części kory mózgowej podłączano zestaw elektrod i czekano, aż skończy się działanie znieczulenia. Sytuacja została w artykule określona jako *ex vivo*, ale laik może mieć wątpliwości, czy to na pewno nie było *in vivo* w potocznym rozumieniu tych słów.

Na tak spreparowaną siatkówkę kierowano serię obrazów i zliczano pojawianie się kaskad aktywności neuronowej kory wzrokowej, jednocześnie mierząc ich wielkość oraz czas trwania.

We wszystkich przypadkach, których w sumie zbadano trzystaście (niektóre mózgi były poddane więcej niż jednej serii stymulacji), stwierdzono, co następuje. Początkowo, zaraz po włączeniu stymulacji, działanie badanego fragmentu mózgu było nadkrytyczne, ale dość szybko przechodziło w stan, w którym nie tylko zależność częstości występowania kaskad, tak od ich wielkości, jak i od długości trwania, były potęgowe, ale również zależność wartości wykładników odpowiadała przewidywaniom dotyczącym występowania warunków krytycznych.

Drugą częścią eksperymentu było zbudowanie modelu sieci neuronowej wykazującego takie samo zachowanie. Zaprojektowany i przebadany został model zbudowany z 1 000 sztucznych neuronów połączonych każdy z każdym. Jedna piąta neuronów została zaprogramowana jako takie, których synapsy dendrytowe są hamujące zamiast pobudzających. Dochodzenie do możliwości wysłania kolejnego sygnału zostało zaprogramowane jako wykładnicze. Wszystkie neurony były poddane zewnętrznej stymulacji odpowiadającej zestawowi obrazów wyświetlanych w rzeczywistym eksperymencie.

Po dopasowaniu parametrów symulacji udało się odtworzyć wyniki eksperymentu *ex vivo*.

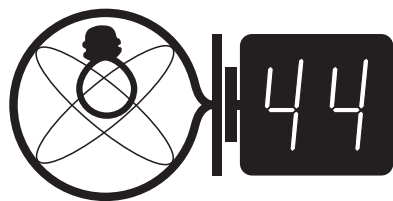
W opinii autorów doświadczenie dowodzi automatycznego dochodzenia sieci neuronowej do warunków krytycznych nawet podczas intensywnej zewnętrznej stymulacji.

To prawdopodobnie dzięki temu jesteśmy w stanie nie tylko widzieć, ale również rozumieć, co widzimy. Albo przynajmniej mieć wrażenie, że rozumiemy.

Piotr ZALEWSKI

[1] W.L. Shew, W.P. Clawson, J. Pobst, Y. Karimipannah, N.C. Wright oraz R. Wessel, *Adaptation to sensory input tunes visual cortex to criticality*, *Nature Physics* (2015) doi:10.1038/nphys3370.

Klub 44

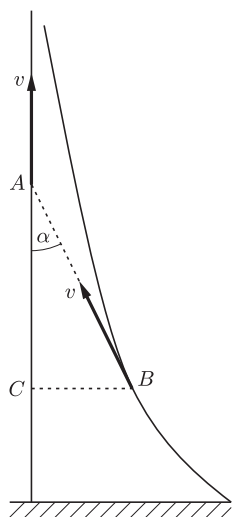


Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 590 ($WT = 1,97$), 591 ($WT = 2,12$), 592 ($WT = 1,60$) i 593 ($WT = 3,40$) z numerów 1/2015 i 2/2015

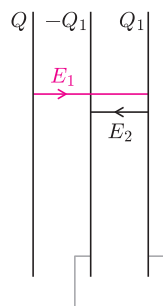
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Marian Łupieżowicz	Gliwice	1 – 26,26
Michał Koźlik	Gliwice	3 – 24,44
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielwicz	Brodnica	1 – 22,22
Tomasz Wietecha	Tarnów	10 – 17,69
Krzysztof Magiera	Łosiów	3 – 14,40
Karol Łukanowski	Niemcz	11,97
Jacek Piotrowski	Rzeszów	2 – 10,49



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2015

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

Przypominamy treść zadań:

596. Od prostoliniowego fragmentu brzegu odpłynęły jednocześnie dwa statki A i B , które w chwili początkowej znajdowały się w odległości a . Statek A poruszał się po prostej prostopadłej do brzegu. Statek B przez cały czas trzymał kurs na statek A . Wartości prędkości obu statków były stałe i jednakowe. Jaka była odległość między statkami, gdy można było już uznać, że statek B zaczął płynąć za statkiem A ?

597. Trzy płytki metalowe o powierzchniach S ustawiono równolegle. Pierwsza naładowana jest ładunkiem Q , druga i trzecia połączone są drutem przewodzącym (rys. 1). Rozmiary liniowe płytek są dużo większe od odległości między nimi. Jaka siła działa na środkową płytkę?

596. Rozważmy sytuację przedstawioną na rysunku 2, gdy prędkość statku B tworzy z prostopadłą do brzegu kąt α . Statek B zbliża się do statku A z prędkością o wartości

$$v_{B/A} = v - v \cos \alpha.$$

Statek A oddala się od punktu C (rzut statku B na tor statku A) z prędkością o tej samej wartości. Zatem suma długości odcinków $|AB| + |AC|$ jest stała. W chwili początkowej punkt A pokrywa się z punktem C , zatem suma ta wynosi a . W chwili, którą uznajemy za końcową, punkt B pokrywa się z punktem C z dowolnie ustaloną dokładnością (tzn. odległość między punktami B i C dąży do zera w miarę upływu czasu), czyli

$$|AB| = |AC|, \quad 2|AB| = a,$$

szukana odległość między statkami wynosi $\frac{a}{2}$.

597. Natężenie pola elektrycznego między płytkami 2 i 3 wynosi zero, bo są one połączone przewodnikiem i ich potencjały są jednakowe. Ze względu na duże rozmiary płytek w porównaniu z odległościami między nimi możemy przyjąć, że pole elektryczne wytwarzane przez płytkę jest takie, jak od nieskończonej powierzchni. Z prawa Gaussa natężenie pola od pierwszej płytki wynosi

$$E_1 = \frac{Q}{2\epsilon_0 S},$$

natężenie od drugiej i trzeciej płytki w obszarze między nimi

$$E_2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S},$$

gdzie Q_1 oznacza ładunek na trzeciej płytce równy co do wartości i o przeciwnym znaku niż ładunek na płytce drugiej. Wektory E_1 i E_2 w obszarze między płytkami mają przeciwne zwroty i jednakowe wartości. Stąd

$$Q_1 = \frac{Q}{2}.$$

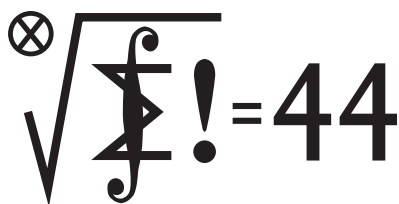
Płytkę środkową jest przyciągana przez płytki zewnętrznymi siłami

$$F_1 = Q_1 E_1 = \frac{Q^2}{4\epsilon_0 S}, \quad F_2 = \frac{Q_1 E_2}{2} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S}.$$

Wypadkowa siła skierowana jest do pierwszej płytki i ma wartość

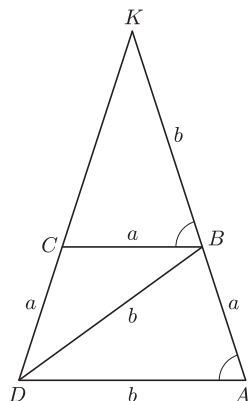
$$F = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S}.$$

Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 693 ($WT = 1,72$) i 694 ($WT = 2,95$) z numeru 1/2015

Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszka	42,44
Janusz Olszewski	Warszawa	40,50
Łukasz Garncarek	Opole	37,98
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Paweł Najman	Kraków	33,64
Jędrzej Garnek	Poznań	33,12



Rozwiązanie zadania F 886.

Okres wahadła $T = N/f$, a stąd jego długość $L = gN^2/4\pi^2 f^2 \approx 1$ m. Długość obrazu wahadła jest więc znacznie mniejsza od jego długości rzeczywistej ($L' \ll L$). Oznacza to, że poszukiwana odległość D od kamery do wahadła wielokrotnie przewyższa ogniskową obiektywu ($D \gg F$). Stąd z kolei wynika, że obraz wahadła znajduje się bardzo blisko ogniska obiektywu, a więc odległość od obiektywu do kliszy, na której powstaje obraz, jest w przybliżeniu równa F . Stąd wynika, że $L/D \approx L'/F$, czyli

$$D \approx FL/L' = FgN^2/4\pi^2 f^2 L' \approx 7 \text{ m.}$$

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2015

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

699. Cztery różne punkty na płaszczyźnie wyznaczają sześć odcinków. Załóżmy, że trzy spośród tych odcinków mają jednakową długość a , zaś pozostałe trzy mają jednakową długość b , przy czym $a < b$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości stosunku b/a .

700. Czy dla każdej funkcji $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniającej warunek $g(1) = 1$, istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, spełniająca warunki $f(n) \geq g(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $f(mn) = f(m)f(n)$ dla każdej pary liczb względnie pierwszych $m, n \in \mathbb{N}$? (\mathbb{N} to zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich).

699. Jeżeli trzy odcinki jednakowej długości tworzą trójkąt, to pozostałe trzy odcinki (też jednakowej długości) spotykają się w pozostałym z czterech danych punktów, który wobec tego musi być środkiem owego trójkąta równobocznego. W tym przypadku $b/a = \sqrt{3}$, i jest to jedna z możliwych wartości rozpatrywanego stosunku. Dalej przyjmijmy, że nie pojawia się trójkąt równoboczny. Trzy odcinki długości a tworzą wówczas łamaną (nie zamkniętą), i tak samo trzy odcinki długości b . Można tak ustalić oznaczenia A, B, C, D danych punktów, by

$$|AB| = |BC| = |CD| = a, \quad |BD| = |DA| = |AC| = b.$$

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AC jest dłuższa niż ramiona. W trójkącie równoramiennym ABD podstawa AB jest krótsza niż ramiona. Zatem $|\sphericalangle BAC| < 60^\circ < |\sphericalangle BAD|$.

Odcinek AD jest wspólnym bokiem przystających trójkątów równoramiennych ABD oraz ACD (o podstawach AB, CD). Te trójkąty muszą być położone symetrycznie – albo względem środka odcinka AD , albo względem symetralnej tego odcinka. W pierwszym z tych przypadków powstałby równoległobok $ABDC$; to jednak nie jest możliwe, skoro kąt BAC jest mniejszy od kąta BAD .

W drugim przypadku tworzy się trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AD (dłuższej) i BC (krótszej). Półproste AB^{\rightarrow} i DC^{\rightarrow} przecinają się w punkcie, który nazwiemy K . Trójkąty równoramienne ADB i BKC mają równe podstawy ($|AB| = |BC| = a$) i równe kąty przy podstawie ($|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBK|$) – są więc przystające. Stąd $|BK| = |AD| = b$. Trójkąt BKC jest ponadto podobny do AKD . Otrzymujemy proporcję

$$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|BK|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}.$$

Stosunek $\lambda = b/a$ spełnia zatem równanie $\lambda = \lambda^{-1} + 1$, którego jedynym dodatnim pierwiastkiem jest $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$. Realizację tej wartości uzyskujemy, biorąc jako A, B, C, D cztery wierzchołki pięciokąta foremnego.

Stąd odpowiedź: możliwymi wartościami stosunku b/a są liczby $\sqrt{3}$ oraz $(1 + \sqrt{5})/2$.

700. Tak, dla każdej funkcji g łatwo wskazać funkcję f o wymaganych własnościach. Niech (a_k) będzie rosnącym ciągiem wszystkich potęg liczb pierwszych:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) = (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 16, \dots) = (2, 3, 2^2, 5, \dots).$$

Funkcja f (o własności $f(mn) = f(m)f(n)$ gdy $\text{nwd}(m, n) = 1$) jest wyznaczona przez ciąg wartości $f(a_k)$; zaś podany warunek mnożliwości nie stawia na owe wartości żadnych ograniczeń. Wobec tego konstruujemy taki ciąg indukcyjnie. Niech $f(a_1)$ będzie dowolną liczbą naturalną większą od $g(a_1)$.

Założmy, że liczby $f(a_1), \dots, f(a_{k-1})$ zostały już określone. Patrzymy na zbiór wszystkich liczb postaci $g(s)$, gdzie s jest iloczynem różnych liczb ze zbioru $\{a_1, \dots, a_k\}$. Określamy $f(a_k)$ jako dowolną liczbę naturalną większą od wszystkich takich liczb $g(s)$.

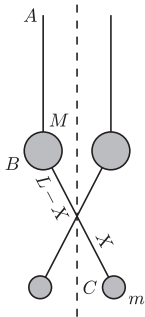
Wybrany ciąg wartości $f(a_k)$, wraz z warunkiem mnożliwości, jednoznacznie generuje funkcję $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Spełnia ona także pozostałe z zadanych warunków; jeśli bowiem liczba $n \in \mathbb{N}$ zostanie zapisana jako iloczyn $n = a_{i_1} \dots a_{i_r}$, gdzie $i_1 < \dots < i_r$, wówczas

$$f(n) = f(a_{i_1}) \dots f(a_{i_r}) \geq f(a_{i_r}) > g(a_{i_1} \dots a_{i_r}) = g(n).$$



Rozwiązanie zadania F 885.

To, że nić AB pozostaje cały czas pionowa, oznacza, że na masę M podczas ruchu układu nie działa siła pozioma. To z kolei oznacza, że siły poziome nie działają także na układ, składający się z dwóch mas M i m , a kulki muszą poruszać się tak, aby ich środek masy nie poruszał się w poziomie (rysunek).



Warunek ten będzie spełniony, gdy masa m będzie się poruszała tak, jakby była zawieszona w środku masy układu na nici o długości X , gdzie X jest odległością środka kulki od środka masy układu. Okres takiego wahadła wynosi $T = 2\pi\sqrt{X/g}$. Okres ten jest równy okresowi drgań punktu A . Korzystając z wyrażenia na położenie środka masy $Xm = (L - X)M$ znajdujemy $X = LM/(m + M)$. Podstawiając to wyrażenie do wzoru na okres dostajemy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{LM}{g(m + M)}},$$

a stąd

$$L = \frac{T^2 g(m + M)}{4\pi^2 M}.$$

Prosto z nieba: Galaktyczne dinozaury

Historia wczesnego Wszechświata w telegraficznym skrócie przedstawia się następująco: Wielki Wybuch, inflacja i stworzenie barionów, pierwotna nukleosynteza i w końcu epoka rekombinacji, czyli oddzielenie się światła od materii (wtedy pojawiły się też atomy wodoru i helu). Pierwsze swobodnie podróżujące fotony obserwujemy dziś w postaci mikrofalowego promieniowania tła. Okres pomiędzy momentem ostatniego rozproszenia a czasem, w którym zapłonęły pierwsze gwiazdy, nazywa się Ciemnymi Wiekami. Jedną z wielu tajemnic ewolucji Wszechświata w tamtych czasach (do około 800 mln lat po Wielkim Wybuchu) jest wyjaśnienie powstania wielkoskalowej struktury, w tym, między innymi, pochodzenia masywnych, zwartych i sferycznych w kształcie galaktyk – tytułowych dinozaurów.

Najbardziej popularna hipoteza głosi, że proces zderzeń galaktyk stopniowo transformował obiekty sferyczne w dużo masywniejsze galaktyki o eliptycznym kształcie, które obecnie obserwujemy. Na pierwszy rzut oka jest to prawdopodobne, jednak problemem jest pogodzenie przewidywań teoretycznych z obserwacjami. Obserwacje dalekich sferycznych galaktyk porównuje się z tymi w lokalnym otoczeniu; okazuje się, że w pobliżu Drogi Mlecznej jest ich niewiele. Z drugiej strony, z oszacowań ewolucyjnych wynika, że galaktycznych zderzeń w historii Wszechświata było niewystarczająco wiele, by wyjaśnić niewielką liczbę obserwowanych galaktyk sferoidalnych w naszym sąsiedztwie. Gdzie zatem zniknęły galaktyczne dinozaury?

Rozwiązanie zagadki okazuje się, jak to czasem bywa, trywialne – dokładna analiza danych przeprowadzona przez astronomów z Uniwersytetu Technicznego w Swinburne prowadzi do wniosku, że duża część populacji galaktyk sferoidalnych jest po prostu słabo widoczna i dlatego została wcześniej przegapiona. Obiekty sferoidalne są bardzo często przesłonięte przez gwiazdowy dysk, który powstał podczas późniejszej ewolucji poprzez gromadzenie się gazu i akrecję mniejszych galaktyk. Liczba „ukrytych” galaktyk sferoidalnych odpowiada w przybliżeniu liczbie obserwowanych podobnych obiektów we wczesnym Wszechświecie.

Wspominamy wynik australijskich astronomów, ponieważ jest on jednym z nielicznych przykładów porządnie przeprowadzonej analizy danych, a nie popularnym ostatnio tłumaczeniem wyników obserwacji (bądź ich braku) za pomocą egzotycznej niestandardowej fizyki.

Michał BEJGER

Niebo w sierpniu

Sierpień jest tradycyjnie miesiącem obserwacji meteorów. Perseidy, pochodzące z resztek pyłu pozostawionego przez komety Swifta–Tuttle’a, będą widoczne najlepiej w pierwszej połowie sierpnia (maksimum 12, 13 VIII, liczba zdarzeń 60 w ciągu godziny). Przewidujemy, że niektóre z bolidów będą bardzo jasne. Rój obserwować można przez cały miesiąc – radiant roju w gwiazdozbiore Perseusza pojawia się nad północno-wschodnim horyzontem w pierwszej połowie nocy. Obserwacjom maksimum sprzyja dodatkowo faza Księżyca – nów wypada 14 VIII. W okolicy pierwszej kwadry (8 VIII) Księżyc zakryje Aldebarana (α Tauri, $-0,85^m$); niestety, zjawisko zajdzie podczas dnia dla obserwatorów w Europie (dobra widoczność w Azji). Sierpniowa pełnia (29 VIII), nazwana super-Księżycem, będzie wyjątkowa, ponieważ Księżyc znajdzie się wtedy nieco bliżej Ziemi niż zwykle, w związku z czym będzie wydawał się większy i jaśniejszy niż podczas „zwykłej” pełni.

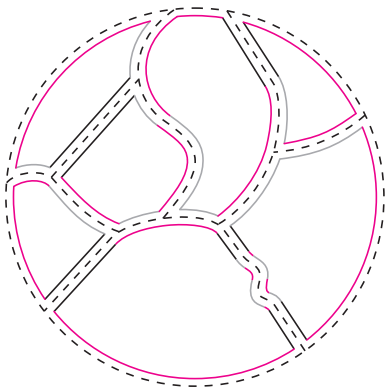
Obserwatorów planet czeka w sierpniu parę potencjalnie ciekawych wydarzeń. Tuż przed zachodem Słońca 7 VIII w gwiazdozbiore Lwa nastąpi spotkanie Merkurego ($-0,5^m$) i Jowisza ($1,25^m$) z Regulesem (α Leonis, $1,35^m$), natomiast 19 VIII Mars ($1,9^m$) znajdzie się na tle gromady otwartej M44 (Żłóbek, gwiazdozbiór Raka), niezbyt, niestety, korzystnie dla obserwatorów europejskich, bo będzie widoczny rano, nisko nad wschodnim horyzontem, przyćmiewany przez wschodzące Słońce. Podobny los spotka w sierpniu Wenus – mimo że dość jasna ($-3,4^m$), będzie ukryta w świetle Słońca, na granicy gwiazdozbiorów Sekstantu, Hydry, Lwa i Raka.

Amatorom astronomii wyposażonym w teleskop lub silną lornetkę polecamy obserwacje niewidocznego gołym okiem Neptuna ($7,6^m$), który będzie w sierpniu w opozycji. Można go odnaleźć w gwiazdozbiore Wodnika, pomiędzy dość jasnymi gwiazdami λ ($3,7^m$) i σ ($4,8^m$) Aquarii.

M. B.



Gdyby taki podział był możliwy i wymagał np. 100 lub 1000 kawałków, to tego rodzaju układanki znalazłbyśmy zapewne z półek sklepowych.



Rys. 1

Nożyczki matematyczne Joanna JASZUŃSKA

Jedną z najsłynniejszych niemożliwych rzeczy w matematyce jest konstrukcja samym cyrkiem i linijką kwadratu o polu równym polu danego koła. Problem ten, zwany *kwadraturą koła*, rozważano już w starożytnej Grecji, ale rozwiązano go, czyli udowodniono niekonstruowalność, dopiero w XIX wieku.

Twierdzenie Wallace’a–Bolyaia–Gerwienna orzeka, że *dowolny wielokąt można pociąć nożyczkami na skończenie wiele kawałków, a następnie ułożyć z nich dowolny inny wielokąt o tym samym polu*. Może da się wykonać tego rodzaju „kwadraturę koła”?

Czy można tak pociąć koło nożyczkami na skończenie wiele części, by następnie ułożyć z nich kwadrat?

Pokażemy, że nie jest to możliwe. Rozetniemy koło nożyczkami na skończenie wiele części. Można przyjąć, że każdy fragment brzegu każdego z obszarów jest „porządkny”: wypukły, wklęsły lub prosty i że ma określoną długość. Niech w każdej części tak podzielonego koła mieszka krasnoludek. Każdy z krasnoludków maluje od swojej strony płot otaczający jego teren: na kolorowo fragmenty wypukłe, na szaro – wklęsłe, na czarno – proste (rys. 1).

Zauważmy, że jeśli fragment płotu jest z jednej strony czarny, to jest czarny również z drugiej strony. Z kolei jeśli krasnoludek pomalował część płotu na szaro, to jego sąsiad pomalował tę część od swojej strony na kolorowo. I na odwrót, za wyjątkiem fragmentów płotu ograniczających całe koło, które są pomalowane tylko z jednej strony, na kolorowo. Stąd łączna długość wszystkich kolorowych części płotu jest większa od łącznej długości szarych części właśnie o obwód koła.

Przypuśćmy, że można z rozważanych kawałków koła ułożyć kwadrat. Jego brzeg jest prosty, więc aby części wewnątrz do siebie pasowały, musiałyby być taka sama łączna długość kolorowych i szarych fragmentów ich brzegów, sprzecznie z powyższą obserwacją. Wobec tego nie da się wykonać takiej „kwadratury koła”. □

W obliczu poniesionej porażki, sięgnijmy po silniejsze narzędzie – „nożyczki matematyczne”. Różnią się one od zwykłych tym, że pozwalają dzielić figurę na dowolne podzbiory, również te niemożliwe do wycięcia zwykłymi nożyczkami, jak pojedyncze punkty, odcinki etc. Uwzględniamy przy tych podziałach przynależność wszystkich punktów figury, również tych z ewentualnych linii podziału.

Czy można tak podzielić koło na skończenie wiele części, by następnie ułożyć z nich kwadrat?

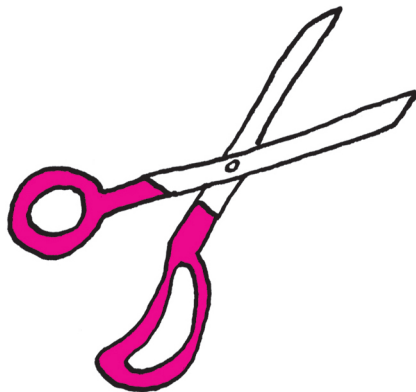
Pytanie to postawił w 1925 roku Alfred Tarski, a odpowiedzi udzielił Miklós Laczkovich w roku 1990. Udowodnił on, że taka „kwadratura koła” jest możliwa przez podział koła na... mniej więcej 10^{50} części!

W starożytnej Grecji rozważano również inny słynny problem – **podwojenie sześciannu**, czyli konstrukcję sześciannu o objętości dwukrotnie większej od danego sześciannu. Ona również okazała się niemożliwa do wykonania cyrkiem i linijką.

Czy można podzielić sześciannu na skończenie wiele części i zbudować z nich sześciannu o dwukrotnie większej objętości?

Na podziały zwykłymi nożyczkami (lub nożem) nie ma co liczyć, bowiem zachowują one objętość figur, a my objętość chcemy podwoić. Wydawać by się mogło, że z tego właśnie powodu żądany podział sześciannu w ogóle nie jest możliwy.

Jedna z wersji słynnego **paradoksu Banacha–Tarskiego** mówi, że dla *dowolnych dwóch ograniczonych podzbiorów \mathbb{R}^3 o niepustym wnętrzu, jeden można tak podzielić na skończenie wiele części, by złożyć z nich drugi*. Można zatem podzielić sześciannu na skończenie wiele fragmentów, a następnie zbudować z nich sześciannu o objętości dwukrotnie większej. Wszystko dzięki temu, że „nożyczkami matematycznymi” (tym razem w wersji trójwymiarowej) da się wycinać przedziwne zbiory, także np. *niemierzalne*. Z takimi nożyczkami niemożliwe staje się możliwe!



Gdyby możliwe było „podwojenie sześciannu” zwykłymi nożyczkami, można by pokroić sztabkę złota tak, by z otrzymanych części złożyć sztabkę dwukrotnie większą.

Lepiej znana wersja paradoksu Banacha–Tarskiego orzeka, że można rozłożyć kulę na pięć części i złożyć z nich dwie kule takie same, jak wyjściowa.