

deltad

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s $\pi=3,141592\dots$

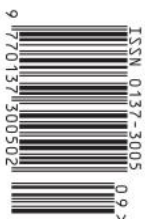
NR 9 (592) 2023

CENA 8 ZŁ VAT 8%

MIESIĘCZNIK

PL ISSN 0137-3005 / NR IND 35-550 X
www.deltami.edu.pl

Uran, Neptun
i Wulkan - trzy planety,
z których jedna nigdy
nie istniała
str. 12



Nakład: 2800 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 9 (592)

Po co teoria węzłów biologowi?

Izabela Mandla

str. 1

The Outer Galaxy High Resolution Survey – przegląd rubieży Galaktyki

Miguel Figueira

str. 4

Alea iacta est – Kości zostały rzucone


Piotr Flaga

str. 6

Mały krok dla człowieka, wielki skok dla indukcji

Michał Miśkiewicz

str. 8

 Nasz, ludzki, metabolizm

Magdalena Fikus

str. 11

Uran, Neptun i Wulkan – trzy planety, z których jedna nigdy nie istniała, cz. I

Mateusz Dembny, Grzegorz Łukaszewicz, Igor Palusiński

str. 12

Porzućcie wszelką klasyczną intuicję, wy, którzy tu wchodzicie!

Rafał Demkowicz-Dobrzański

str. 15

 Zadania

str. 19

Klub 44

str. 20

Prosto z nieba: Dostawa z kosmosu

str. 22

Niebo we wrześniu

str. 22

Aktualności

Okresowe życie

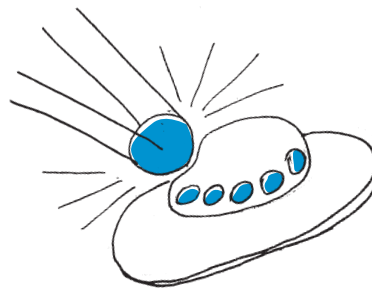
str. 24

 Wektory – część 1

Bartłomiej Bzdęga

str. 25

W następnym numerze:
Kontrolowane zderzenia w kosmosie.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:

Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.

Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.

Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)

RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

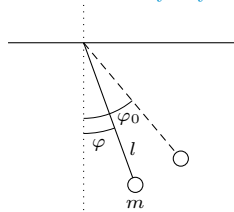
Po co teoria węzłów biologowi?

Izabela MANDLA*

*Studentka, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński



Rozwiązanie zadania F 1079. Dzwon jest wahadłem fizycznym.



W rozwiązaniu przyjmujemy, że ruch wahadłowy dzwonu przebiega jak ruch wahadła matematycznego o masie m i długości l . Niech φ oznacza chwilowy kąt odchylenia wahadła od pionu. Na wahadło działa siła ciężkości $m\vec{g}$ (ciężar dzwonu; \vec{g} to przyspieszenie ziemskie) i siła \vec{R} , z jaką oś zawieszenia działa na dzwon. Podczas ruchu przyspieszenie \vec{a} masy m spełnia równanie:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R},$$

a więc $\vec{R} = m\vec{a} - m\vec{g}$. Wahania dzwonu odpowiadają ruchowi masy m po okręgu o promieniu l . Przyspieszenie \vec{a} ma dwie składowe: styczną do okręgu $a_s = -g \sin \varphi$ (skierowaną w kierunku malenia φ) i „dośrodkową” $a_d = v^2/l$ w kierunku osi – v oznacza chwilową prędkość masy m . Zasada zachowania energii pozwala wyznaczyć v :

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

a więc $v^2/l = 2g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$. Możemy teraz wyznaczyć składowe siły \vec{R} (siły, z jaką oś zawieszenia działa na masę m): pionową R_y (oś y jest skierowana w górę) i poziomą R_x . Otrzymujemy:

$$R_x = -mg \sin \varphi \cos \varphi - 2mg \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

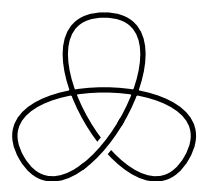
$$R_y = -mg \sin^2 \varphi + 2mg \cos \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_0) + mg.$$

Dla położenia pionowego wahadła ($\sin \varphi = 0$) składowa R_y osiąga maksimum. Jeśli wynosi ono $3mg$, to znaczy, że $\varphi_0 = \pi/2$. Składowa pozioma wynosi wówczas

$$R_x = -3mg \sin \varphi \cos \varphi = -3mg \sin(2\varphi)/2$$

i dla $\varphi = \pm \pi/4$ osiąga największą wartość bezwzględną równą $3mg/2$.

Z naszych obliczeń wynika, że podczas dzwonienia „Zygmunta” o masie $m \approx 12\,000$ kg na oś zawieszenia dzwonu działa pozioma siła oscylująca między wartościami około $\pm 180\,000$ N. Nic dziwnego, że już po 37 latach od zawieszenia dzwonu konieczny był remont wieży, w której jest zawieszony.



Rys. 1. Diagram trójlistnika

Mimo że matematyka i biologia są często „wrzucane do tego samego worka” jako nauki matematyczno-przyrodnicze, to nie zawsze jest nam łatwo znaleźć powiązania między nimi. Oczywiście można dojść do wniosku, że łączą się one pośrednio poprzez fizykę i chemię, ale czy są jakieś bardziej rzucające się w oczy związki?

Okazuje się, że jak najbardziej. Pewnym nieoczywistym przykładem jest teoria węzłów. W XIX wieku dziedzina ta była niezwykle popularna nie tylko wśród matematyków. Wtedy bowiem powstała hipoteza, wedle której atomy są pewnego rodzaju węzłami na tkaninie eteru. Teoria ta okazała się później fałszywa, jednak w owym czasie zachęciła wielu chemików do prowadzenia badań nad węzłami. I zanim temat został przez nich porzucony, powstało wiele „tablic węzłów”, a sama teoria zyskała jeszcze większe zainteresowanie matematyków. Zapewne nikt nie przypuszczał, że prawie sto lat później biochemicy wrócą do badania węzłów po tym, gdy zostaną one odkryte w strukturach DNA.

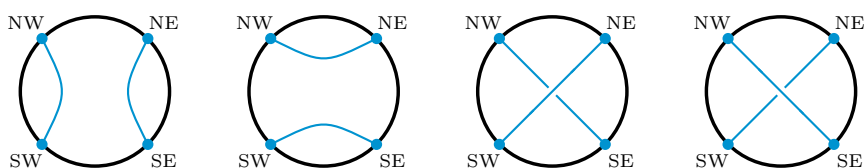
Kwas deoksyrybonukleinowy, w skrócie DNA, składa się z nukleotydów zbudowanych z deoksyrybozy, grupy fosforanowej i jednej z czterech zasad azotowych – adeniny, guaniny, tyminy albo cytozyny. Nukleotydy te są ze sobą powiązane za pomocą wiązań wodorowych, tak aby cząsteczka cukru jednego z nich połączyła się z grupą fosforanową drugiego. Nie jest to jednak jedyna reguła dotycząca tworzenia DNA. Zasady bowiem łączą się wzajemnie w taki sposób, że cytozyna łączy się zawsze w parę z adeniną, a guanina z tyminą. Ułożone w ten sposób nici przypominają szczebelki w drabinie. Wspólnie tworzą kształt podwójnej helisy.

Gdyby komórka miała wielkość piłki do koszykówki, to długość znajdującego się w niej DNA powinna być równa około 200 kilometrów. Przekazuje ono całą informację potrzebną do życia i zapewnia różnorodność biologiczną. Aby to zrobić, jedna nić musi zawierać miliony nukleotydów. Co więcej, okazuje się, że materiał ten bardzo łatwo się płącze, co utrudnia jego replikację i modyfikację. Na szczęście w komórkach występują specjalne enzymy zwane topoizomerazami, których zadaniem jest odpowiednia zmiana nici. Muszą one przeciąć jedną lub obie nici DNA, a następnie je rozplątać. W ten sposób możliwe jest naprawienie występujących nieprawidłowości bez konieczności obracania całej cząsteczki. Proces ten można porównać do rozplątywania węzła.

Tutaj właśnie pojawia się teoria węzłów. Jej podstawowymi pojęciami są węzły (czyli krzywe zamknięte) oraz sploty (czyli zbiory kilku takich krzywych). Najprostszym przykładem węzła będzie okrąg. Zarówno węzły, jak i sploty rozpatrujemy w trójwymiarowej przestrzeni.

Jeśli węzeł wyobrazimy sobie jako nitkę, to jego diagram powstaje przez rozpląszczenie nitki na kartce papieru, z zaznaczeniem, która jej część znajduje się „nad”, a która „pod” (rys. 1).

Wyobraźmy sobie teraz okrągłą obręcz oraz dwie elastyczne nici o końcach przymocowanych do obręczy w pewnych czterech jej wyróżnionych punktach. Punkty te oznaczymy przez NW, NE, SW i SE, tak jak w kompasie. Taką konfigurację nazwiemy *suplem*. Rysunek 2 przedstawia najprostsze przykłady.



Rys. 2. Najprostsze rodzaje supliów



Rozwiązanie zadania M 1756.

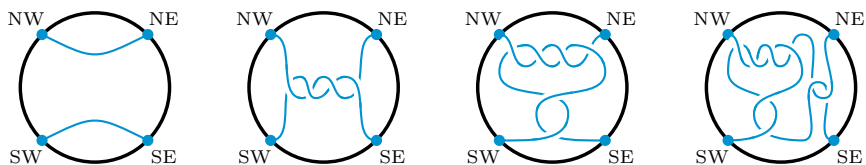
Dodając wszystkie równości stronami oraz wykonując żmudne przekształcenia algebraiczne, dochodzimy do równości:

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_5)^2 + (x_5 - x_1)^2 = 0,$$

z której wynika, że

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Łatwo sprawdzić, że każda piątka postaci (t, t, t, t, t) , gdzie $t \in \mathbb{R}$, spełnia warunki zadania.

Pierwsze dwa supły na rysunku 2 oznaczamy kolejno jako ∞ i (0) (w dalszej części tekstu ta konwencja stanie się zrozumiała). Teraz pomyślmy, że owa obręcz jest okręgiem wielkim pewnej przezroczystej sfery. Możemy zamienić miejscami punkty SW i SE (i tym samym końce przyczepionych w tych punktach nici) poprzez obrót „dolnej” półsfery („górną” pozostawiając nieruchomo, trochę jak w kostce Rubika). Podobnie możemy zamienić miejscami końce NE i SE. Każdy supel, który powstanie z supłów ∞ i (0) przez wykonanie sekwencji tych operacji nazwiemy *supłem wymiernym*. Przykłady przedstawia rysunek poniżej.

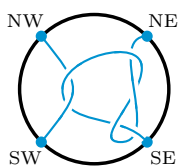


Rys. 3. Przykład supłów wymiernych powstałych przez przekształcenie supła (0)

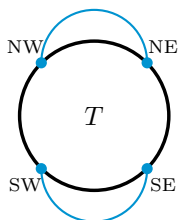
Dostajemy również od razu naturalny sposób oznaczania supłów wymiernych – są one zdefiniowane przez skończony ciąg liczb całkowitych, określających liczbę wykonywanych obrotów półsfery. Przyjmujemy następującą konwencję: jeśli obrót powoduje, że nitka „nad” na nowo utworzonych skrzyżowaniach ma „dodatnie nachylenie”, to zapisujemy go jako liczbę dodatnią, a jeśli „ujemne nachylenie”, to ujemną. Ponadto gdy liczba wyrazów w ciągu jest nieparzysta, zaczynamy od przekształcania supła (0) , natomiast w przeciwnym wypadku rozpoczynamy od supła oznaczonego ∞ . Dzięki temu ostatnia liczba w ciągu zawsze opisuje obroty wokół osi poziomej.

Zobaczmy, jak zastosować tę notację do sytuacji z rysunku 3. Zaczynamy od supła (0) . Obracając czterokrotnie półsferę z punktami NE i SE w lewo, otrzymamy supel (-4) . Następnie obróćmy półsferę z punktami SW i SE dwa razy w lewo. Otrzymany supel możemy zapisać jako $(-4, 2, 0)$. Na koniec wracamy do pierwszej półsfery, obracając ją dwukrotnie w prawo, otrzymując $(-4, 2, 2)$.

Warto zwrócić uwagę, że nie wszystkie supły są wymierne. Na przykład supel z rysunku 4 nie może zostać uzyskany z opisanych przekształceń supła (0) czy ∞ . Nie pozwala na to utworzona na prawej stronie pętla.



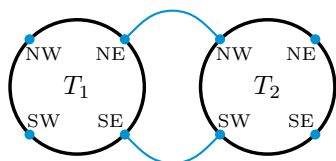
Rys. 4. Przykład supła niewymiernego



Rys. 5. Węzeł $N(T)$

Aby z supła zrobić węzeł, można na przykład połączyć sznurkiem końce NW i NE oraz SW i SE. Wynik zastosowania tej operacji na suple T będziemy oznaczali $N(T)$ (rys. 5).

Dodawaniem dwóch supłów będziemy natomiast nazywali łączenie ich poprzez złączenie końca NE jednego supła z końcem NW drugiego i analogicznie SE z SW (rys. 6). Oczywiście, aby uzyskać supel w przedstawionym wcześniej rozumieniu, należałoby jeszcze „przepiąć” wolne końce na nową obręcz – nie będziemy jednak dalej zwracać uwagi na ten drobiazg.



Rys. 6. Supel $T_1 + T_2$

Można zauważyć, że dodanie supła (0) niczego nie zmienia. Jest to tak naprawdę bowiem przedłużenie fragmentów węzła stykających się z okręgiem. Niezależnie, czy dodamy (0) z prawej, czy z lewej strony, efekt jest ten sam. Nasuwa się więc pytanie, czy dodawanie supłów jest przemienne. Okazuje się, że ta własność nie zawsze zachodzi. Prawdą jest również to, że suma dwóch wymiernych supłów wcale nie musi być wymierna. Polecamy Czytelnikowi znaleźć dwa wymierne supły, których suma daje niewymierny supel z rysunku 4 (odpowiedź na końcu artykułu).

Z takiego spojrzenia na węzły skorzystano w artykule [3]. Analizuje się tam DNA koliste, czyli takie, w którym końce nici podwójnej helisy są ze sobą połączone. Występuje ono w wielu wirusach i bakteriach, a także w ludzkich mitochondriach.

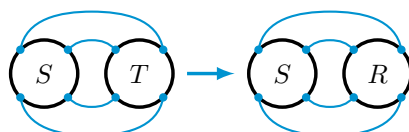
Przyjrzyjmy się procesowi działania enzymu. Weźmy koliste DNA, które posiada dwa węzły. Supel, na który będzie działał enzym, nazwiemy T , natomiast fragment oznaczany literą S pozostanie niezmienny. Enzym będzie zastępował

fragment T innym supłem oznaczonym przez R . W badaniu wiemy, od jakiej substancji zaczynaliśmy i jaką uzyskamy. Nie wiemy jednak, jakiego typu węzły były na naszym DNA.

Wtedy możemy zapisać powyższe rozumowanie jako układ równań supłowych:

$$\begin{cases} N(S + T) = \text{substrat} \\ N(S + R) = \text{produkt}. \end{cases}$$

Zakładamy, że supły T i R są niezależne względem supła S , co znajduje potwierdzenie w obserwacjach procesów biologicznych.



Rys. 7. Schemat działania enzymu. Supel T zostaje zastąpiony supłem R

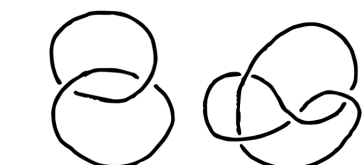
Przyjrzyjmy się działaniu enzymu Tn3 rezolwazy. Enzym ten działa zwykle w ten sposób, że zastępuje supel T supłem R i zostawia fragment DNA. Zdarza się jednak, że powtórzy on swoje działanie i przekształci supel T na dwa supły R , a czasem nawet na trzy lub więcej. Po przeprowadzeniu serii eksperymentów zaobserwowano, jakie węzły możemy uzyskać w zależności od ilości powtórzeń działań enzymu. Można zapisać te wyniki w następujący sposób:

$$\begin{cases} N(S + T) = N(1), \\ N(S + R) = N(2), \\ N(S + R + R) = N(2, 2), \\ N(S + R + R + R) = N(1111), \end{cases}$$

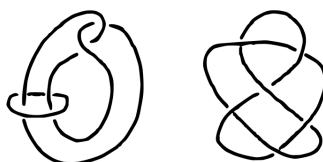
przy czym $N(1)$ odpowiada okręgowi, $N(2)$ splotowi Hopfa, $N(2, 2)$ węzłowi ósemkowemu (rys. 8), a $N(1111)$ splotowi Whiteheada (rys. 9). Okazuje się, że jedynym rozwiązaniem jest

$$\begin{cases} S = (3, 0) \\ R = (-1). \end{cases}$$

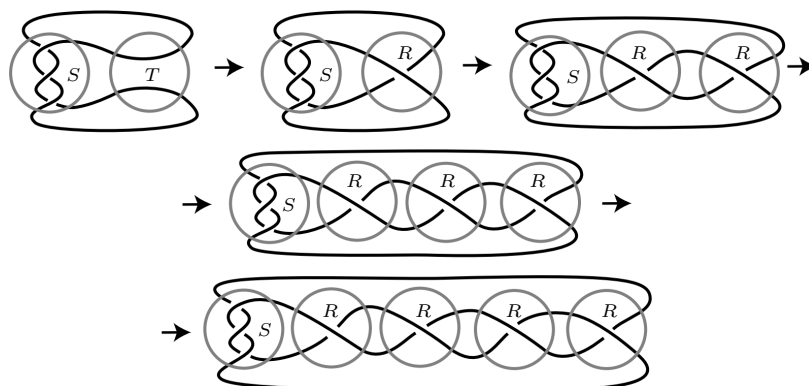
Co więcej, wówczas $N(S + R + R + R + R) = N(12111)$, i węzeł ten rzeczywiście został zaobserwowany podczas dalszych eksperymentów, co może utwierdzać w przekonaniu, że uzyskany wniosek dotyczący działania enzymu jest słuszny. Cały proces działania enzymu został przedstawiony na rysunku 10.



Rys. 8. Splot Hopfa oraz węzeł ósemkowy



Rys. 9. Splot Whiteheada oraz węzeł $N(12111)$



Rys. 10. Węzły dla enzymu Tn3 rezolwazy

Obserwując, jak zmieniają się substancje (traktowane jako węzły) podczas eksperymentów, i rozwiązując równania supłowe, biolodzy mogą badać działanie enzymów. Nie jest to jednak jedyne zastosowanie teorii węzłów. Korzysta się z niej bowiem także podczas badania białek czy chociażby w mechanice statystycznej i wielu innych dziedzinach. Kto by przypuszczał, że ten teoretyczny obszar badań znajdzie tak wiele zastosowań?

Literatura

- [1] C.C. Adams, *The Knot Book*, Freeman, New York 1994.
- [2] A. Janiak-Osajca, Z. Pogoda, *Węzły, supły i ulamki*, *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* 33(2004), 31–35.
- [3] Ernst, C., Sumners, D.W.: A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 108 (1990), 489–515.

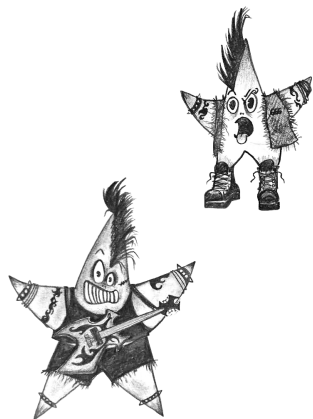
Odpowiedź na zadane w tekście pytanie: supel z rysunku 4 można otrzymać, dodając supły $(2, 0)$ i $(-2, -2, 0)$.

The Outer Galaxy High Resolution Survey – przegląd rubieży Galaktyki

Miguel FIGUEIRA*

* Zakład Astrofizyki Narodowego Centrum Badań Jądrowych

Rdzeń obszaru gwiazdotwórczego to ogromna przestrzeń o promieniu 0,1 pc (ok. 3×10^{12} km) i wypełniona materią o gęstości liczbowej około 10^5 cm^{-3} .



Autorka rysunku: Manuela Figueira

Masa krytyczna, zwana również masą Jeansa, jest proporcjonalna do $\sqrt{T^3/n^2}$, gdzie T to temperatura, a n to gęstość gazu.



Metaliczność danego ośrodka w astronomii określa obfitość pierwiastków chemicznych cięższych niż wodor i hel.

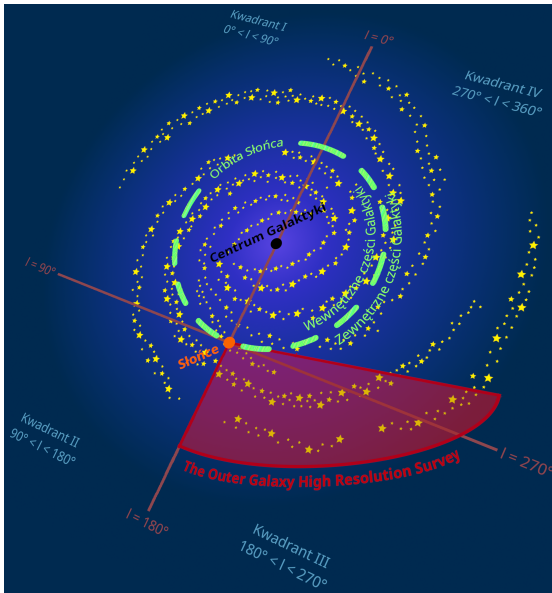
Gwiazdy rodzą się w największych obszarach ogromnych obłoków molekularnych – chmurach pyłu i gazu, zbudowanych głównie z wodoru (H_2) i tlenku węgla (CO). W tych obszarach pod wpływem grawitacji lokalne zagęszczenia materii zapadają się do mniejszych struktur zwanych rdzeniami (*core*). To tam tworzą się nowe pokolenia gwiazd. Początkowo przyszłe gwiazdy są zlepkami materii, nazywamy je protogwiazdami. Protogwiazdy jednak nieustannie rosną (pobierając materiał z otoczenia), i po osiągnięciu wystarczająco dużej masy temperatura i gęstość gazu w ich wnętrzu stają się tak duże, że zapoczątkowane zostają procesy fuzji termojądrowej – wówczas protogwiazdy stają się gwiazdami. W czasie swojego życia będą przetwarzały wodor w hel, a pod koniec wytworzą inne cięższe pierwiastki.

Najważniejszą cechą nowo powstającej gwiazdy jest jej masa, ponieważ decyduje ona o przyszłości gwiazdy (o tym, jak długo będzie „żyła” oraz jaka czeka ją „śmierć”). Przez długi czas sądzono, że masa młodej gwiazdy jest związana głównie z właściwościami rdzenia, w którym się narodziła: im gęstszy rdzeń, tym większe prawdopodobieństwo, że gwiazda będzie masywna. Jednak najnowsze badania wskazują, że ta zależność wcale nie jest tak bezpośrednia. Kluczową rolę w procesie tworzenia się nowych gwiazd pełni również ich najbliższe otoczenie. Poniżej przedstawię kilka najważniejszych cech tego otoczenia.

Ważnym elementem jest bliska obecność masywnych młodych gwiazd, które emitują promieniowanie ultrafioletowe. To promieniowanie zwiększa temperaturę materii w rdzeniu, a co za tym idzie, zwiększa masę krytyczną materii – masę, po przekroczeniu której gaz ulega zapadaniu. Ma to wpływ na zwiększenie początkowej masy protogwiazd. Ponadto badania wskazują, że na masę krytyczną mają również wpływ turbulencje i pole magnetyczne. O mechanizmach, które znacznie zmieniają właściwości kolejnych generacji gwiazd, można też przeczytać w moich wcześniejszych artykułach zamieszczonych w *Delcie* (Δ_{20}^{12} i Δ_{21}^2).

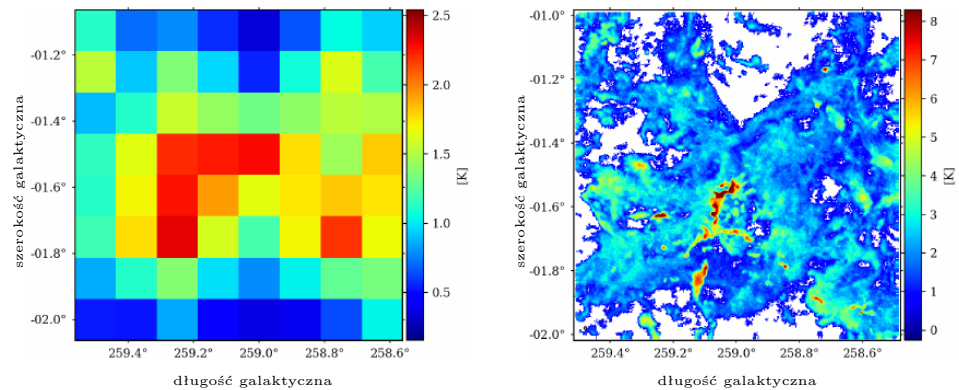
Innym czynnikiem mającym wpływ na powstawanie nowych gwiazd jest promieniowanie kosmiczne. Składa się ono z wysokoenergetycznych cząstek, przyspieszanych przez pozostałości po supernowych i wiatry gwiazdowe. Naukowcy sądzą, że promieniowanie kosmiczne reguluje procesy tworzenia się gwiazd w galaktykach. W przeciwieństwie do promieniowania gwiazdowego (takiego, jak opisane w poprzednim paragrafie), które jest blokowane przez chmury molekularne (ma ograniczony zasięg), promieniowanie kosmiczne może wnikać w te obłoki i uwalniać energię poprzez oddziaływanie z polem magnetycznym, zderzenia z cząstkami materii obłoku i jonizację. Promieniowanie kosmiczne generuje w ten sposób znaczne ciśnienie w ośrodku międzygwiazdowym, a jonizacja wywoływana przez promieniowanie kosmiczne prowadzi do powstania sprężenia między gazem a polem magnetycznym. Oba te procesy mogą hamować powstawanie obłoków molekularnych, w których tworzą się nowe gwiazdy.

Kolejnym czynnikiem, który ma wpływ na właściwości protogwiazd, jest metaliczność gazu. Wpływa ona na procesy chłodzenia obłoku molekularnego. Jeśli metaliczność jest niska, procesy chłodzenia molekularnego są mniej wydajne, co prowadzi do powstania gwiazd o dużej masie gwiazdowej. Jest to powód, dla którego pierwsze gwiazdy powstałe z pierwotnych obłoków wodoru i helu we wczesnym Wszechświecie były tak masywne (o pierwszych gwiazdach pisaliśmy w Δ_{22}^4). Większą masę gwiazd obserwuje się również w Wielkim i Małym Obłoku Magellana, które mają mniejszą metaliczność (odpowiednio, od 0,2 do 0,5) niż Droga Mleczna. Generalna zasada jest więc taka, że im większa metaliczność obłoku, tym mniej masywne gwiazdy w nim powstają.



Rys. 1. Droga Mleczna we współrzędnych galaktycznych. Centrum układu współrzędnych stanowi Słońce, zaś początkowym punktem odniesienia jest centrum Galaktyki, gdzie promień galaktyczny równa się zeru. Przestrzeń w środku orbity Słońca nazywamy wewnętrzną częścią Galaktyki, a przestrzeń poza tą orbitą – zewnętrzną częścią Galaktyki. Czerwony obszar obejmuje część Drogi Mlecznej obserwowanej przez OGHReS

Najbardziej bezpośrednią metodą badania wpływu środowiska na tworzenie się gwiazd byłoby przeprowadzenie obserwacji rdzeni obszarów gwiazdotwórczych w galaktykach o różnych właściwościach. Jednak ze względu na ograniczenia technologiczne jest to obecnie niemożliwe. Pozostaje nam nasza Galaktyka, w której musimy znaleźć obszary o różnych właściwościach. Okazuje się, że zadanie to wcale nie jest takie trudne. Właściwości naszej Galaktyki drastycznie się zmieniają w zależności od odległości od jej centrum (nazywanej promieniem galaktycznym). I tak w zewnętrznych obszarach Galaktyki ilość pyłu i metaliczność są mniejsze niż w jej wnętrzu, co zmienia sposób, w jaki promieniowanie kosmiczne reguluje powstawanie gwiazd i efektywność chłodzenia obłoków molekularnych (a więc jak masywne gwiazdy mogą tam powstawać). Do tej pory z powodu niskiej czułości i rozdzielczości kątowej teleskopów większość badań regionów gwiazdotwórczych była ograniczona do wewnętrznej Galaktyki (obszarów wewnątrz orbity Słońca wokół centrum Drogi Mlecznej). Jednak dzięki najnowszej generacji potężnych teleskopów możemy teraz badać peryferie Drogi Mlecznej i dowiedzieć się więcej o wpływie środowiska na tworzenie się gwiazd. Taki jest cel projektu Outer Galaxy High Resolution Survey (OGHReS, rys. 1).



Rys. 2. Obserwacja linii emisyjnej $^{12}\text{CO}(1-0)$ tego samego obszaru w przeglądzie Dame'a (z rozdzielczością 480") i w nowym przeglądzie OGHReS (z udoskonaloną rozdzielczością 27")

OGHReS jest spektroskopowym przeglądem nieba wykonanym za pomocą teleskopu APEX (Atacama Pathfinder EXperiment telescope) w Chile. Obszar obserwacji obejmuje 100 stopni kwadratowych nieba ($180^\circ < l < 280^\circ$). Bezprecedensowa rozdzielczość kątowa tego przeglądu (27") pozwala na obserwację struktur o rozmiarze 2 pc ($\sim 6 \cdot 10^{13}$ km) znajdujących się w odległości aż 15 kpc ($\sim 4,6 \cdot 10^{17}$ km) od Ziemi (dla porównania Słońce znajduje się w odległości 8 kpc od centrum Galaktyki). OGHReS będzie więc najbardziej precyzyjnym przeglądem zewnętrznych obszarów Galaktyki (porównanie obserwacji OGHReS z wcześniejszymi przeglądami przedstawiamy na rysunku 2). Obserwacje niektórych molekuł, ^{12}CO , ^{13}CO , ^{18}CO , SiO, DCO^+ , CH_2O i CH_3OH , pozwolą naukowcom na precyzyjne odszyfrowanie roli środowiska w procesie tworzenia się gwiazd. Innymi celami przeglądu OGHReS są studia nad oddziaływaniami pomiędzy pyłem a gazem oraz strukturą włókien i ramion Drogi Mlecznej.

Połączenie obserwacji zewnętrznych i wewnętrznych części Galaktyki (takich jak np. Structure, Excitation, and Dynamics of the Inner Galactic Interstellar Medium, SEDIGISM) udoskonali naszą wiedzę o całej Galaktyce. Ale nie tylko. Dostępność szczegółowych obserwacji obłoków gwiazdotwórczych może nam pomóc w zrozumieniu procesów tworzenia się gwiazd w innych galaktykach o niskiej metaliczności, dla których nie jest możliwe uzyskanie tak szczegółowych obserwacji.



Rozwiązanie zadania M 1757.

Gdy $a = b$, to oczywiście teza zadania zachodzi. Załóżmy bez straty ogólności, że $a > b$. Wtedy dla pewnych liczb całkowitych dodatnich k, l, m zachodzą równości:

$$\text{NWW}(a, b) = ka,$$

$$\text{NWW}(a + 1, b + 1) = l(a + 1),$$

$$\text{NWW}(a + 2, b + 2) = m(a + 2).$$

Wobec tego $ka + m(a + 2) = 2l(a + 1)$, z czego wynika, że

$$(m - k) + (a + 1)(k + m) = 2l(a + 1),$$

skąd $a + 1 \mid m - k$. Jednakże $m, k \leq b + 2 \leq a + 1$, zatem wobec uzyskanej podzielności dostajemy równość $k = m$. A więc $(a + 1)(k + m) = 2l(a + 1)$, czyli $k = l = m$. Ponieważ oczywiście $k \mid b$ oraz $l \mid b + 1$ i $\text{NWD}(b, b + 1) = 1$, to $k = l = 1$, czyli $\text{NWW}(a, b) = a$, co oznacza, że $b \mid a$.

Alea iacta est – Kości zostały rzucone

Piotr FLAGA*

*Uczeń, VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach

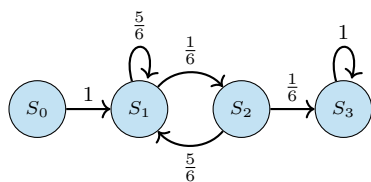
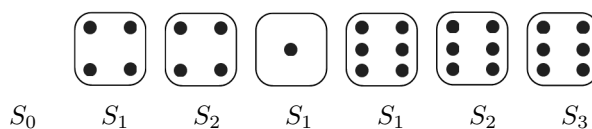
Czy kiedykolwiek zastanawiałeś się, Czytelniku, jaka jest szansa, żeby w 100 rzutach monetą otrzymać serię 5 takich samych wyników pod rząd? Jestem przekonany, że większość z nas odpowiedziałaby, że niewielka. Również należałem do tych osób, jednak pewnego dnia przeczytałem bardzo interesujący artykuł, w którym autor opowiedział anegdotę o pewnym profesorze. Ów nauczyciel zadał swoim uczniom następującą pracę domową. *Rzuc 100 razy monetą, a wyniki zapisz na kartce w postaci OROORR...*

Następnego dnia profesor sprawdził, czy studenci wykonali zadanie. Ku ich zdziwieniu, potrafił bezbłędnie określić, kto faktycznie rzucił monetą 100 razy, a kto zapisał na kartce 100 pseudolosowych wyników. W jaki sposób wykrył oszustwa? Odpowiedź na to pytanie jest bardzo prosta: patrzył, czy pojawiła się seria pięciu takich samych wyników! Ten temat bardzo mnie zainteresował, dlatego postanowiłem zapytać mojego nauczyciela matematyki, dr. Piotra Kalembę, w jaki sposób możemy obliczyć szansę na takie zdarzenie.

Następnego dnia otrzymałem odpowiedź, którą chciałbym się podzielić z Czytelnikami.

Ze względu na przejrzystość tekstu postanowiłem trochę zmodyfikować postawione pytanie. Monetę zamienimy na sześcienną kostkę do gry oraz zredukujemy oczekiwaną liczbę takich samych wyników z 5 do 3. Teraz możemy sformułować ostateczne pytanie, które będzie towarzyszyć nam do końca tego artykułu: Jakie jest prawdopodobieństwo, że w 100 rzutach sześcienną kostką do gry uzyskamy serię 3 takich samych wyników pod rząd? Na przykład: 333 lub 222 lub 555.

W celu zilustrowania problemu przygotowałem przykładowe wyniki, jakie moglibyśmy ujrzeć po rzuceniu kostką 6 razy.



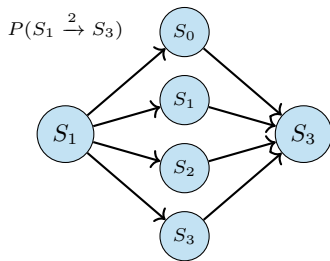
W jaki sposób możemy kontrolować, jak blisko osiągnięcia trzech powtórzeń jesteśmy? Możemy do tego użyć stanów, jak w Kąciku Początkującego Olimpijczyka z Δ_{23}^8 . S_0 to stan początkowy, kiedy jeszcze nie rzuciliśmy kostką. S_1 oznacza, że ostatnia wylosowana wartość wypadła 1 raz pod rząd, S_2 – 2 razy pod rząd. Z kolei S_3 to nasz pożądany stan końcowy, który oznacza, że już pojawiła się seria 3 takich samych liczb (to, co się dzieje po osiągnięciu S_3 , nas nie interesuje, ponieważ dotarliśmy do oczekiwanej wartości). Na przykładzie powyżej podpisałiliśmy stany uzyskane przy kolejnych rzutach kostką. Do pełnego opisu naszej sytuacji brakuje nam jeszcze opisu przejść pomiędzy stanami.

Posłużymy się grafem znajdującym się na marginesie. Jest to nieskomplikowany łańcuch Markowa. Widzimy na nim wcześniej wspomniane stany oraz strzałki, które określają prawdopodobieństwa przejścia z konkretnego stanu do innego w jednym kroku. Ten graf będzie towarzyszył nam do końca, dlatego istotne jest zrozumienie, czym tak naprawdę jest i w jaki sposób go stworzyliśmy. Zaczniemy od S_0 . Nie rzuciliśmy jeszcze kostką, nie mamy żadnej wartości. Rzucamy pierwszy raz i otrzymujemy jakąś wartość, nieważne jaką, ale jedną z sześciu. W tym momencie zaczynamy serię, dlatego prawdopodobieństwo przejścia z S_0 do S_1 jest równe 1. Przechodząc dalej, znajdujemy się w stanie S_1 , rzucamy kostką i jeśli wyrzucimy tę z sześciu wartości, która jest kontynuacją serii, to przechodzimy do następnego stanu. Jeśli jednak nam się nie uda, to wracamy z powrotem do S_1 i ponownie zaczynamy serię. Co się dzieje, gdy już przeszliśmy do stanu S_2 i rzucamy po raz kolejny? Sytuacja wygląda bardzo podobnie. Jeśli trafimy kontynuację naszej serii, to przejdziemy do S_3 , w przeciwnym wypadku powrócimy do S_1 . Gdy znajdziemy się w stanie końcowym, czyli S_3 , to nie ma już możliwości, że go opuścimy. Przedstawmy teraz ten graf jako następującą macierz M .

$$M = \begin{bmatrix} P(S_0 \rightarrow S_0) & P(S_0 \rightarrow S_1) & P(S_0 \rightarrow S_2) & P(S_0 \rightarrow S_3) \\ P(S_1 \rightarrow S_0) & P(S_1 \rightarrow S_1) & P(S_1 \rightarrow S_2) & P(S_1 \rightarrow S_3) \\ P(S_2 \rightarrow S_0) & P(S_2 \rightarrow S_1) & P(S_2 \rightarrow S_2) & P(S_2 \rightarrow S_3) \\ P(S_3 \rightarrow S_0) & P(S_3 \rightarrow S_1) & P(S_3 \rightarrow S_2) & P(S_3 \rightarrow S_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}$$

Artykuł napisany na podstawie prezentacji wygłoszonej podczas „Spotkań z matematyką” organizowanych przez VIII LO w Katowicach.

M jest kwadratową macierzą z czterema wierszami i czterema kolumnami odpowiadającymi stanom: S_0, S_1, S_2, S_3 . Znajdują się w niej prawdopodobieństwa bezpośredniego przejścia między poszczególnymi



stanami, na przykład wiersz S_1 , kolumna S_2 , w polu przecięcia się wiersza S_1 z kolumną S_2 będzie zapisane prawdopodobieństwo, że z S_1 przejdziemy do S_2 w jednym kroku, oznaczane jako $P(S_1 \rightarrow S_2)$.

Gdy wiemy już wszystko o naszych oznaczeniach, przejdźmy dalej. Popatrzmy na graf znajdujący się na marginesie. Jest to zilustrowane przejście z S_1 do S_3 w dwóch krokach, które będziemy oznaczać $P(S_1 \xrightarrow{2} S_3)$. Na tym przykładzie postaramy się „manualnie” obliczyć prawdopodobieństwo przejścia z S_1 do S_3 w dwóch rzutach. Widzimy stan, od którego zaczynamy (S_1), i stan, do którego chcielibyśmy się dostać (S_3). Między nimi znajdują się stany, przez które możemy przejść. Graf ten możemy również interpretować jako cztery różne ścieżki, jakie prowadzą do tego samego miejsca. Warto zaznaczyć, że te „ścieżki” są zdarzeniami wzajemnie wykluczającymi się, jako że jednocześnie nie możemy wyrzucić 1 i 3 w tym samym rzucie. Z tego właśnie powodu prawdopodobieństwo całego zdarzenia, jakim jest przejście z S_1 do S_3 w 2 krokach, możemy obliczyć w następujący sposób: Odczytujemy z M prawdopodobieństwo przejścia z S_1 do wybranego stanu, a następnie mnożymy przez prawdopodobieństwo przejścia z tego właśnie stanu do stanu S_3 . Tą metodą rozpatrujemy każdą „ścieżkę”. Końcowy rezultat prezentuje się jak poniżej:

$$P(S_1 \xrightarrow{2} S_3) = P(S_1 \rightarrow S_0) \cdot P(S_0 \rightarrow S_3) + P(S_1 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_3) + P(S_1 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_3) + P(S_1 \rightarrow S_3) \cdot P(S_3 \rightarrow S_3).$$

To, co teraz widać, przyda nam się w kolejnym etapie. Okazuje się, że ten sam wynik otrzymamy, mnożąc wiersz S_1 przez kolumnę S_3 . Aby przemnożyć przez siebie wiersz i kolumnę tej samej długości, mnożymy przez siebie ich kolejne elementy, pierwszy element wiersza przez pierwszy element kolumny, drugi przez drugi itd. i dodajemy je do siebie.

$$\left[P(S_1 \rightarrow S_0), P(S_1 \rightarrow S_1), P(S_1 \rightarrow S_2), P(S_1 \rightarrow S_3) \right] \begin{bmatrix} P(S_0 \rightarrow S_3) \\ P(S_1 \rightarrow S_3) \\ P(S_2 \rightarrow S_3) \\ P(S_3 \rightarrow S_3) \end{bmatrix} = P(S_1 \xrightarrow{2} S_3)$$

Wynik to dokładnie to samo, co uzyskaliśmy przy naszym poprzednim grafie z przejściem z S_1 do S_3 w dwóch krokach. Jeżeli przemnożymy teraz macierz M przez samą siebie, to wynik ten uzyskamy na przecięciu wiersza S_1 z kolumną S_3 .

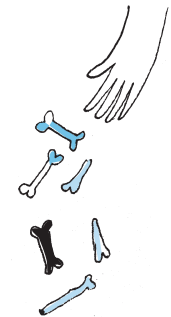
Ta prosta formuła umożliwi nam wyprowadzenie następującej zależności: macierz M^n (wynik wymnożenia n kopii macierzy M) jako wyrazu ma prawdopodobieństwa $P(S_i \xrightarrow{n} S_j)$ ($i, j = 0, 1, 2, 3$) przejść po n rzutach. W tym momencie mamy już wszystkie narzędzia potrzebne, by udzielić odpowiedzi na nurtujące nas pytanie: odpowiedź będzie znajdowała się w zaciemnionym polu macierzy M^{100} :

$$M^{100} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} P(S_0 \xrightarrow{100} S_0) & P(S_0 \xrightarrow{100} S_1) & P(S_0 \xrightarrow{100} S_2) & P(S_0 \xrightarrow{100} S_3) \\ P(S_1 \xrightarrow{100} S_0) & P(S_1 \xrightarrow{100} S_1) & P(S_1 \xrightarrow{100} S_2) & P(S_1 \xrightarrow{100} S_3) \\ P(S_2 \xrightarrow{100} S_0) & P(S_2 \xrightarrow{100} S_1) & P(S_2 \xrightarrow{100} S_2) & P(S_2 \xrightarrow{100} S_3) \\ P(S_3 \xrightarrow{100} S_0) & P(S_3 \xrightarrow{100} S_1) & P(S_3 \xrightarrow{100} S_2) & P(S_3 \xrightarrow{100} S_3) \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}$$

Jest tak, ponieważ w tym miejscu przecina się wiersz S_0 z kolumną S_3 , czyli nasz stan początkowy z naszym stanem końcowym. Teraz przy użyciu kalkulatora macierzy obliczamy M^{100} i otrzymujemy:

$$P(S_0 \xrightarrow{100} S_3) = \frac{99160929411015739985678571632699585804757886320697414951141890717802339334771}{108886437250011817682781711193009636756190618412159145257178661061582856912896} \approx 91,07\%.$$

Tak prezentuje się wartość, którą zastaniemy w wyżej wspomnianym polu. Tym sposobem obliczyliśmy, że szansa na takie zdarzenie to aż 91%!



Jeżeli A jest macierzą $n \times m$, a B macierzą $m \times k$, to ich iloczyn jest macierzą o wymiarach $n \times k$, w której na pozycji (i, j) znajduje się iloczyn i -tego wiersza macierzy A i j -tej kolumny macierzy B . Przykładowo, dla macierzy A postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

macierz $A \cdot A$ wygląda następująco:

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}.$$

Kalkulator macierzy znajduje się np. tu: <https://matrixcalc.org/pl>

Wariant z monetą opisany jest w artykule: Steven Tijms, *The Mathematical Anatomy of the Gambler's Fallacy* <https://chance.amstat.org/2022/02/gamblers-fallacy/>.

Powyżej przeanalizowaliśmy przykład z kostką, ale gdy powrócimy do pierwotnego problemu z monetą, to szansa na takie zdarzenie wzrasta do 97%! Nareszcie dowiedzieliśmy się więc, dlaczego aby sprawdzić, kto wykonał zadanie, nauczyciel patrzył, czy na kartce danego ucznia występuje seria pięciu, sześciu lub siedmiu takich samych wyników pod rząd. Jeśli takowej nie było, statystycznie oznaczało to oszustwo.

Mały krok dla człowieka, wielki skok dla indukcji

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Michał MIŚKIEWICZ*

W niektórych kręgach popularny jest dowcip o nieskończonej pojemności tramwaju. Opiera się on na dwóch empirycznych przesłankach: (1) w tramwaju na pewno mieści się jedna osoba, (2) nieważne, ile osób już jest w tramwaju, zawsze zmieści się jeszcze jedna. To, że w tramwaju mieści się dowolnie dużo osób, gwarantuje wówczas *zasada indukcji matematycznej*. Dowcip ten może śmieszyć lub nie, ale dobrze oddaje ideę indukcji – w matematyce pozwala ona uściślić rozumowanie oparte na użyciu wielokropka czy też sformułowania *i tak dalej*. Na przykład takie:

Zadanie 1. Dowieść, że dla każdego $n = 1, 2, \dots$ liczba 2^n ma n -cyfrową wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 1 i 2.

Rozwiązanie. Dla $n = 1$ szukaną wielokrotnością liczby 2 jest choćby ona sama. Dla $n = 2$ wystarczy dostawić jedynekę z przodu (12 jest wielokrotnością 4), podobnie dla $n = 3$ ($8 \mid 112$). Dla $n = 4$ nie możemy dostawić jedynek, ale dwójkę już tak: $16 \mid 2112$. I tak dalej – jeśli a_n jest szukaną wielokrotnością 2^n , to w następnym kroku możemy wziąć $10^n + a_n$ (gdy $2^{n+1} \nmid a_n$) lub $2 \cdot 10^n + a_n$ (gdy $2^{n+1} \mid a_n$). \square

Rygorystyczny dowód musiałby oprzeć się na zasadzie indukcji, którą sformułujemy następująco:

Twierdzenie 1: zasada indukcji matematycznej. Dany jest ciąg warunków $T(1), T(2), \dots$ odpowiadających kolejnym liczbom naturalnym. Załóżmy, że:

- (I1) zachodzi warunek $T(1)$,
- (I2) z warunku $T(n)$ wynika warunek $T(n + 1)$.

Wtedy zachodzą warunki $T(n)$ dla wszystkich liczb naturalnych.

W zadaniu 1 warunek $T(n)$ brzmiałby następująco: istnieje n -cyfrowa wielokrotność 2^n złożona z cyfr 1 i 2. Więcej przykładów można znaleźć w znakomitych *Opowieściach o indukcji* Jarosława Wróblewskiego oraz w *Kąciku* Bartłomieja Bzdęgi (zob. margines). Tymczasem pójdźmy dalej i zadajmy pytanie:

Czy podobne rozumowanie oparte na *małych krokach* można stosować w innych przypadkach? W szczególności, czy da się w ten sposób dowodzić własności liczb rzeczywistych?

I od razu odpowiedzmy: tak! Matematycy bardzo lubią sprowadzać duże problemy do małych, i twierdzenia podobne do zasady indukcji można odnaleźć w różnych działach matematyki. W niniejszym artykule dokonamy pobieżnego przeglądu takich twierdzeń.

Indukcja pozaskończona

Zasadę indukcji można wyprowadzić z następującej własności liczb naturalnych: każdy podzbiór liczb naturalnych posiada element najmniejszy. Rzeczywiście, jeśli $T(n)$ nie zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n , to możemy wybrać najmniejsze takie n , a to prowadzi do sprzeczności z (I1) (gdy $n = 1$) lub (I2) (gdy $n > 1$, bo wtedy $T(n - 1) \Rightarrow T(n)$).

Jarosław Wróblewski, *Opowieści o indukcji*, Materiały Ligi Zadaniowej OMG 2012/13 omj.edu.pl/uploads/attachments/indukcja.pdf.

Bartłomiej Bzdęga, *Trzy rodzaje indukcji matematycznej*, Kącik Początkującego Olimpijczyka nr 7, Δ_{19}^7 .

Można to przekuć w coś ogólniejszego. Porządek zadany relacją $<$ na zbiorze X nazywamy *dobrym*, jeśli każdy podzbiór $S \subseteq X$ ma element najmniejszy, czyli element $x \in S$ spełniający $x < y$ dla wszystkich innych $y \in S$. Powyższe rozumowanie daje wtedy:

Twierdzenie 2: zasada indukcji pozaskończonej. *Dany jest zbiór X z dobrym porządkiem $<$ oraz rodzina warunków $T(x)$ odpowiadających elementom X . Załóżmy, że:*

- (IP1) *zachodzi warunek $T(x_0)$ odpowiadający najmniejszemu elementowi X ;*
- (IP2) *jeśli $T(y)$ zachodzi dla wszystkich $y < x$, to zachodzi również $T(x)$.*

Wtedy zachodzą warunki $T(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Na zbiorze par liczb naturalnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ można określić *porządek leksykograficzny*: umawiamy się, że $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$, gdy $a_1 < b_1$ lub też gdy $a_1 = b_1$ i $a_2 < b_2$. Polecam samodzielnie sprawdzić, że każdy podzbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ posiada element najmniejszy w sensie tego porządku.

Na marginesie można prześledzić przykład zbioru dobrze uporządkowanego. Niestety przykładem takim nie jest \mathbb{R} ze standardową relacją porządku $<$, gdyż elementu najmniejszego nie ma choćby zbiór $(0, \infty)$. W pierwszej chwili można pomyśleć, że kandydatem na element najmniejszy jest tu zero, ale ono w ogóle nie jest elementem $(0, \infty)$.

Częściowym rozwiązaniem tego problemu jest twierdzenie Zermelo, według którego na \mathbb{R} (jak i na każdym innym zbiorze) można wybrać *inny* porządek, który jest już dobry. Pozwala to stosować indukcję pozaskończoną na liczbach rzeczywistych, o czym można przeczytać w artykule Piotra Zakrzewskiego w Δ_{17}^4 . A jeśli upieramy się przy standardowym porządku na \mathbb{R} ? Okazuje się, że nawet wtedy sprawa nie jest całkowicie stracona.

Spójność jako zasada indukcji

Choć spójność jest własnością oznaczającą intuicyjnie „bycie w jednym kawałku”, to można ją przeformułować w sposób analogiczny do zasady indukcji. Pomysł ten nie jest nowy – wraz z zarysem historii i wieloma szczegółami można o nim przeczytać w *The Instructor's Guide to Real Induction* Pete'a Clarka (arxiv.org/abs/1208.0973).

Twierdzenie 3: spójność odcinka. *Dana jest rodzina warunków $T(x)$ odpowiadających $x \in [0, 1]$. Załóżmy, że:*

- (S1) *zachodzi $T(0)$;*
- (S2) *jeśli zachodzi $T(x)$, to zachodzi również $T(y)$ dla wszystkich $y \in [0, 1]$ z pewnego przedziału $(x - r, x + r)$ (r może zależeć od x);*
- (S3) *jeśli $x_n \rightarrow x$ i zachodzą $T(x_n)$ dla wszystkich n , to zachodzi też $T(x)$.*

Wtedy zachodzą warunki $T(x)$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$.

Warto odnotować, że same „kroki do przodu” wyrażone przez (S2) nie wystarczą, potrzebny jest jeszcze domykający krok (S3). Otóż – jak łatwo się przekonać – rodzina warunków $T(x)$: $x < 1/2$ spełnia (S1) i (S2), a mimo to $T(1)$ nie zachodzi.

Mam nadzieję, że w powyższym twierdzeniu Czytelnik odnajduje ducha małych kroczków, który stanowi esencję indukcji matematycznej. Dobrze zilustruje to następujące zastosowanie:

Zadanie 2. (twierdzenie o wartości średniej). Jeśli $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, a ponadto $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$, to dla pewnego $x \in [0, 1]$ zachodzi $f(x) = 0$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy przeciwnie, że takie x nie istnieje; za warunek $T(x)$ przyjmijmy wtedy nierówność $f(x) < 0$. Prawdziwość (S1) wynika wprost z założeń zadania. Z kolei (S2) wynika z ciągłości: jeśli $f(x) < 0$, to istnieje takie $r > 0$, że również $f(y) < 0$ dla $y \in (x - r, x + r)$. W przypadku (S3) zauważamy, że jeśli $f(x_n) < 0$ oraz $x_n \rightarrow x$, to $f(x) \leq 0$. Skoro jednak $f(x) = 0$ wykluczaliśmy, to $f(x) < 0$.

Ze spójności odcinka wynika teraz, że $f(x) < 0$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$, co jednak stoi w sprzeczności z założeniem $f(1) > 0$. □

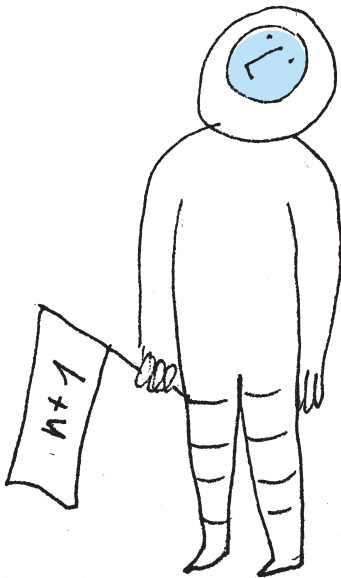
Podobnie jak zasadę indukcji, tak i spójność odcinka można wyprowadzić z pewnej podstawowej własności liczb. W tym przypadku – z pewnika Dedekinda, który mówi o istnieniu kresów dowolnych zbiorów ograniczonych. Otóż jeśli $T(x)$ nie zachodzi dla pewnego $x \in [0, 1]$, to możemy rozpatrzeć kres dolny x_* wszystkich takich x . To jednak prowadzi do sprzeczności z (S2)

(gdy zachodzi $T(x_*)$), (S1) (gdy $T(x_*)$ nie zachodzi i $x_* = 0$) lub (S3) (w pozostałych przypadkach).

Czytelnik znający pojęcie przestrzeni topologicznej (np. z artykułu w Δ_{22}^{10}) może użyć następującej ogólnej definicji:

- Definicja.** Przestrzeń topologiczną X nazywamy spójną, jeśli własności (S1)–(S3) poniżej implikują $T(x)$ dla wszystkich $x \in X$.
- (S1) zachodzi $T(x_0)$ dla pewnego ustalonego $x_0 \in X$;
 - (S2) jeśli zachodzi $T(x)$, to również $T(y)$ dla wszystkich y z pewnego otwartego otoczenia x ;
 - (S3) jeśli x znajduje się w domknięciu punktów spełniających T , to warunek $T(x)$ również zachodzi.

Oznaczając przez S zbiór punktów spełniających T , otrzymujemy inną, równoważną wersję: X jest spójna, jeśli jedynym niepustym zbiorem $S \subseteq X$ jednocześnie otwartym i domkniętym jest sam zbiór X .



Czytelnik-Topolog być może doceni ogólną definicję zwartości.

- Definicja.** Przestrzeń topologiczną X nazywamy zwartą, jeśli własności (Z1) i (Z2) poniżej implikują $P(X)$:
- (Z1) każdy punkt $x \in X$ posiada otoczenie otwarte $U \ni x$, dla którego zachodzi $P(U)$;
 - (Z2) jeśli zachodzą warunki $P(U_1), P(U_2)$, to również $P(U_1 \cup U_2)$.

Większość źródeł wymaga od przestrzeni X również warunku Hausdorffa; jest on automatycznie spełniony w przypadku podzbiorów \mathbb{R} , jak też wszystkich przestrzeni metryzowalnych.

Wypada też wyjaśnić samo użycie słowa *spójność*. Zbiór liczb rzeczywistych S nazywamy spójnym, jeśli prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia 3, w którym odcinek $[0, 1]$ zastąpimy zbiorem S , a 0 dowolnie wybranym „punktem startowym” $x_0 \in S$ (jak się okazuje, prawdziwość ta nie zależy od wyboru x_0). Podobną definicję można też sformułować w większej ogólności (zob. margines). Żeby zobaczyć, że to nazewnictwo jest trafne, warto prześledzić poniższe trzy przykłady.

Zadanie 3. Sprawdzić, że w myśl powyższej definicji:

- Spójny jest odcinek $(0, 1)$ (można przyjąć np. $x_0 = 1/2$).
- Spójny jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
- Nie jest spójny zbiór $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Zwartość jako zasada indukcji

Zwartość to jeszcze jedna własność topologiczna. Trudno w dwóch słowach określić, co intuicyjnie oznacza – okazuje się, że zwarte podzbiory \mathbb{R} to dokładnie zbiory domknięte i ograniczone, co nie brzmi porywająco. Tym bardziej skupmy się więc na indukcyjnym sformułowaniu zwartości, zaczerpniętym z tekstu Davida R. MacIvera *Topological compactness is an induction principle* (drmaciver.com/2015/03/topological-compactness-is-an-induction-principle/).

Twierdzenie 4: zwartość odcinka. Dana jest rodzina warunków $P(U)$ odpowiadających podzbiorem $U \subseteq [0, 1]$. Załóżmy, że:

- (Z1) każdy punkt $x \in [0, 1]$ posiada otoczenie $U = (x - r, x + r) \cap [0, 1]$, dla którego zachodzi $P(U)$;
- (Z2) jeśli zachodzą warunki $P(U_1), P(U_2)$ dla dwóch zbiorów $U_1, U_2 \subseteq [0, 1]$, to również $P(U_1 \cup U_2)$.

Wtedy zachodzi warunek $P([0, 1])$.

Zwróćmy uwagę na nowość: własność P przysługuje nie punktom odcinka, ale jego podzbiorem. Inna jest też tu logika „małych kroków”. Pożądaną przez nas własność sprawdzamy dla wybranych przez siebie małych zbiorów wokół punktów $x \in [0, 1]$ (ich wielkość może zależeć od x), a twierdzenie 4 składa nam tę wiedzę o *lokalnym* zachowaniu w *globalną* konkluzję.

Na zakończenie proponuję kilka zadań. Zachęcam Czytelnika do pochylenia się nad nimi i samodzielnego przekonania się, jak ta ostatnia zasada indukcji działa w praktyce.

Zadanie 4. (tw. Weierstrassa). Każda funkcja ciągła $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, to znaczy istnieje $M > 0$ spełniające $|f(x)| \leq M$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$.

Wskazówka. Przyjąć $P(U)$: funkcja f jest ograniczona w obciążeniu do U .

Zadanie 5. (tw. Bolzano–Weierstrassa). Każdy ciąg (a_n) o wartościach w $[0, 1]$ posiada podciąg zbieżny.

Wskazówka. Przypuścić przeciwnie, że (a_n) nie ma podciągu zbieżnego. Rozważyć własność $P(U)$: $a_n \in U$ dla skończenie wielu n .

Zadanie 6. Zbiór liczb rzeczywistych S nazywamy zwartym, jeśli prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia 4 z S w miejsce $[0, 1]$. Sprawdzić, że zbiory $(0, 1)$ i \mathbb{R} nie są zwarte, ale zbiór $[0, 1] \cup [2, 3]$ już owszem.

Wskazówka. Dla $(0, 1)$ i \mathbb{R} : sprawdzić, że odpowiednik twierdzenia Weierstrassa nie jest prawdziwy. Dla $[0, 1] \cup [2, 3]$: skorzystać ze zwartości $[0, 1]$ i $[2, 3]$.

Zadanie 7. Udowodnić twierdzenie 4.

Wskazówka. Mając zadaną rodzinę $P(U)$ spełniającą (Z1) i (Z2), określić rodzinę $T(x)$: dla pewnego zbioru $U \supseteq [0, x]$ zachodzi warunek $P(U)$. Następnie sprawdzić (S1)–(S3) i skorzystać z twierdzenia 3.

Dużymi krokami zbliża się do nas kolejna edycja Ogólnopolskiej Matematycznej Konferencji Studentów OMatKo!!!. Po raz dziesiąty przepełniona będzie fascynującymi, naukowymi zagadnieniami. Liczne prelekcje, wykłady, konkursy oraz integracja, a wszystko to w towarzystwie innych pasjonatów Królowej Nauk na Politechnice Wrocławskiej w dniach 1–3 grudnia 2023.

OMatKo!!! jest największą konferencją matematyczną w Polsce skierowaną do studentów i doktorantów, zapewniającą rozwój naukowy i możliwość przedstawienia własnych badań. Każdy ochotnik będzie mógł wygłosić referat bądź też przedstawić wybrane zagadnienie w formie plakatu. Do prezentacji mogą zgłaszać się również koła naukowe, aby przybliżyć swoje zainteresowania innym uczestnikom. Oprócz tego będzie to wspaniała okazja do poznania potencjalnych pracodawców oraz porozmawiania z osobami o podobnych zainteresowaniach. OMatKo!!! to przede wszystkim uczestnicy, którzy zarówno w roli słuchacza, jak i prelegenta tworzą wyjątkową atmosferę.

Więcej szczegółów pojawiać się będzie od października w mediach społecznościowych konferencji. Aby niczego nie przegapić, zachęcamy do śledzenia:

strony internetowej:

<http://prac.im.pwr.edu.pl/~omatko/>

Facebooka:

<https://web.facebook.com/omatkopwr/>

Instagrama:

<https://www.instagram.com/omatko.pwr/>

W razie pytań zapraszamy do kontaktu. Do zobaczenia na **OMatKo!!!**

Dopiero po 60. roku życia przemiana materii zwalnia, średnio o 7% na dekadę. U osób 90-letnich dobowe wydatki energetyczne, po uwzględnieniu poprawek wynikających z budowy ciała, są średnio o 20–25% niższe niż u 60-latków...

Zgodnie z przewidywaniami okazało się, że wartość przemiany materii wzrasta wraz z wielkością osobnika. Okazało się także, że w pierwszym roku życia dzieci wydatkują o 50% więcej energii, niż to wynika z przeliczenia na ich masę. Wysoki poziom metabolizmu kończy się dopiero około 20. roku życia, u chłopców nieznacznie później. Za nieoczekiwane odkrycie uznać należy, że dobowy bilans energii nie ulega zmianie między 20. a 60. rokiem życia tak samo u mężczyzn, jak i kobiet.

Nasz, ludzki, metabolizm

Naukowcy z Polskiej Akademii Nauk ogłosili niedawno, że kobiety „objadają się” chętniej (o 50%) niż mężczyźni. Ci sami naukowcy twierdzą, że zjawisko to nie przybrało jeszcze charakteru uzależniającego. Mam jednak co do tego wątpliwości.

Odwołując się do wiedzy genetyków i antropologów, sądzimy, że ostatni wspólny przodek współczesnych ludzi i współczesnych szympanсів żył około 6,5 miliona lat temu. Trudno tę datę określić dokładnie (to nas nie dziwi), ale ważną okolicznością jest wniosek, że dawno temu uformował się nasz genom i zmieniał się potem wolno i nieznacznie. Także sposób życia i typ zdobywanego pokarmu, jak wynika z kolejnych badań, przez następne 4 miliony lat nie różniły ludzi od zwierzęcych przodków: były to owoce, liście, owady, drobne zwierzęta. Zbierano tego jadła tyle, ile na bieżąco było potrzeba dla określonej liczby osobników. Dziś także mały czelakozształtne muszą żerować 7 godzin, by zaspokoić własne potrzeby energetyczne.

Aż około 2,5 mln lat temu doszło do wielkich, rewolucyjnych zmian w tym zakresie: rozdzielenia funkcji zdobywania pokarmu w tych samych zbiorowiskach ludzi: część zajęła się polowaniem, część zbieraniem owoców, bulw czy grzybów, a zebrane plony łączono, aby podzielić między wszystkich członków całej grupy. Standardowo sądzi się, że polowali mężczyźni, a zbierały kobiety.

Sytość doprowadziła do szybkiego powiększania mózgu, intensyfikacji myślenia! Szczegółowymi i odróżniającymi nas od bliskich przodków cechami stały się duże i długo wymagające opieki dorosłych noworodki i dzieci oraz długowieczność. Niezależnie od miejsca wstawania (nawet obecnie) dziecko ludzkie przez długi czas potrzebuje pomocy w zdobywaniu pożywienia. Mogliśmy sobie pozwolić na takie wydatkowanie energii. Te bardzo podstawowe różnice wymusiły wytworzenie się szczególnego bilansu energetycznego u ludzi – od ośmiiodniowych niemowląt aż po mężczyzn i kobiety powyżej czterdziestki. Od tych zmian społecznych datujemy pierwsze wynalazki narzędzi, pojawiła się termiczna obróbka żywności, budowano pierwotne domostwa i osady. Te kluczowe zmiany doprowadziły do początków osiadłego trybu życia.

Co dziś wiemy o osobliwościach (jeżeli są) metabolizmu ludzkiego? W 2014 roku powołano międzynarodowy zespół badawczy pracujący w amerykańskim Utah, szkockim Aberdeen oraz chińskim Shenzhen. Rozpoczęto badania metodą pomiarów wody znakowanej izotopami tlenu i wodoru wiodące do ilościowej oceny wytwarzanego przez organizm dwutlenku węgla, co ilościowo odpowiada spalaniem kalorii. Metoda jest dokładna, kosztowna i wymaga specjalistycznego laboratorium. W tym samym zespole zebrano także dane dostępne w literaturze z wcześniejszych pojedynczych pomiarów, co dało zbiór wyników dla 6400 osób w wieku od kilku dni do pokolenia powyżej 90. roku życia. Stwierdzono, że uprzednio znajdowane różnice między mężczyznami i kobietami wynikają z tego, że kobiety średnio są od mężczyzn mniejsze i mają stosunkowo więcej tkanki tłuszczowej. Po zastosowaniu normalizacji różnice między płciami zniknęły.

Z publikowanych obszernych protokołów powyższych badań wyłoniły się przyczyny sukcesu naszej populacji, których początki przypisujemy wydajności polowań i zbieractwa, dzielenia się uzyskanymi zbiorami i opieką nad szybko rosnącymi, ale fizycznie niesprawnymi dziećmi.

A przyglądając się dokładnie stanowi Ziemi w ostatnim stuleciu, widzimy jednak, do czego doprowadził rozwój naszych mózgów – poprzez postęp cywilizacji i technologii oraz maksymalizację eksploatacji planety – do katastrofy ekologicznej, wyczerpywania się zasobów gruntu, wody, czystego powietrza, wzrostu zanieczyszczenia środowiska... Szklanka zaczyna być w połowie (a może i więcej) – pusta.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

Więcej informacji w *Świecie Nauki* Nr 2, luty 2023.

Uran, Neptun i Wulkan – trzy planety, z których jedna nigdy nie istniała, cz. I

Mateusz DEMBNY*, Grzegorz ŁUKASZEWICZ*,
Igor PALUSIŃSKI**

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki UW
** Wydział MIM UW



William Herschel (1738–1822)



2,1-metrowy (7-stopowy) reflektor Herschela.

Źródło: Science Museum Group



Rozwiązanie zadania M 1758.

Niech O będzie środkiem obrotu o kąt 90° , względem którego \mathcal{F} się nie zmienia. Oznaczmy przez R największą z odległości punktu O do wierzchołków wielokąta \mathcal{F} i niech A_1 będzie jednym z wierzchołków takich, że $OA_1 = R$. Po obrocie o kąt 90° wokół punktu O punkt A_1 przechodzi w punkt A_2 , punkt A_2 w A_3 , natomiast punkt A_3 w A_4 . Oczywiście $A_1A_2A_3A_4$ jest kwadratem o środku w punkcie O , który w całości leży w \mathcal{F} .

Zauważmy teraz, że stosunek promieni kół wpisanego i opisanego na $A_1A_2A_3A_4$ wynosi $\sqrt{2}$, przy czym pierwsze leży w \mathcal{F} , a drugie zawiera \mathcal{F} na podstawie definicji R .

Zwornikiem tego trzyczęściowego artykułu jest odkrycie Neptuna przez Urbaina Le Verriera. Pisząc o Neptunie, nie sposób jednak pominąć problemów z Uranem. Z kolei pisząc o Le Verrierze, nie można pominąć problemów z Merkurem oraz związanego z tym epizodu z Wulkanem. Cała historia jest nie tylko bardzo ciekawa, ale też niezwykle pouczająca. Zaczniemy więc od początku.

Odkrycie Urana. William Herschel odkrył nową planetę 13 marca 1781 roku w trakcie swojego szeroko zakrojonego, wieloletniego projektu przeczesania całego nieba. W jego ramach badacz zebrał i sklasyfikował setki gwiazd podwójnych i tysiące mgławic. O odkryciu Urana wspominał później, że gdyby nie dostrzegł go 13 marca, to z pewnością zrobiłby to podczas jednej z następnych planowych obserwacji nieba [Hoskin]. Znaleziony nowy obiekt zachowywał się inaczej niż gwiazdy stałe przy zmianach „mocy” (tzn. powiększenia) teleskopu oraz poruszał się na ich tle. Odkrytą planetę Herschel początkowo uważał za kometę lub mglistą gwiazdę (ang. *nebulous star*). Prawdopodobnie obiekt ten obserwował już Galileusz, a jego położenia były notowane od roku 1690, poczynając od Johna Flamsteeda, pierwszego Astronoma Królewskiego i założyciela obserwatorium astronomicznego w Greenwich. Pomimo siedmiokrotnych obserwacji i pomiarów, w latach 1690, 1712, 1714 i 1715, Flamsteed nie zauważył, że obiekt ten jest planetą, i uznał go za gwiazdę (34 Tauri w konstelacji Taurus). Swoim prostym teleskopem (z soczewką o średnicy dwóch cali) raczej nie mógł rozpoznać bardzo wolno poruszającej się planety [Blitzstein].

Co ciekawe, w 1781 roku William Herschel zarabiał na życie jako nauczyciel i wykonawca muzyki, a astronomię z wielką pasją uprawiał jako amator. Budował też własne znakomite przyrządy astronomiczne. Dość powiedzieć, że teleskop, którym posłużył się przy odkryciu Urana, był zdecydowanie lepszy – zarówno co do mocy powiększenia, jak i do rozdzielczości obrazu – od tych, którymi dysponowano w Obserwatorium Królewskim czy gdziekolwiek indziej. Rzeczywiście, uzyskiwane wtedy około 200-krotne powiększenia uważano za bardzo dobre, a Herschel utrzymywał, że jego reflektor (o ogniskowej 2,1 metra i sześciocalowym lustrze) pozwala na uzyskanie powiększeń 270-, 460-, 932-, 1563-, 2010-krotnych, a nawet jeszcze większych.

Na wiadomość o odkryciu nowego obiektu na niebie astronomiczny świat wycelował teleskopy w jego stronę. Jednocześnie w Londynie znaleźli się sceptycy i niedowiarkowie niemogący pogodzić się z tym, że jakiś samouk z Bath miałby zobaczyć to, czego nie dostrzegli znakomici astronomowie, ani też z tym, co opowiadał o mocy swoich teleskopów (jeden z astronomów zasugerował nawet, że Herschel musi być kompletnym wariatem, i ofiarował się odstawić go do domu dla obłąkanych). Z drugiej strony chodziło też o pośpiech i nadanie obiektowi nazwy, aby na przykład rywale z Paryża nie przywłaszczyli sobie tego odkrycia. Na szczęście piąty Astronom Królewski Nevil Maskelyne i prezes Towarzystwa Królewskiego James Banks stanęli na wysokości zadania. Herschel został wezwany do Londynu i przyjęty tam z honorami, a chętni mogli spojrzeć przez jego teleskop. Wskazany przez Herschela obiekt został powszechnie uznany za planetę w ciągu około pół roku, a w listopadzie 1781 roku Herschel otrzymał za jej odkrycie Złoty Medal Copleya, nagrodę przyznawaną przez Towarzystwo Królewskie (ówczesny odpowiednik Nagrody Nobla), a także został przedstawiony królowi Jerzemu III i królowej. Było jasne, że w tej sytuacji należało zatrudnić Herschela na jakimś godnym stanowisku jako astronoma i uwolnić go od muzykowania. Pewna chwilowa trudność wynikała z tego, że Herschel jako muzyk zarabiał około 400 funtów rocznie, czyli więcej

niż sam Astronom Królewski z zaledwie 300 funtami. Po pertraktacjach Jerzy III mianował Herschela nadwornym astronomem królewskim w Windsorze, zatrudniając go na specjalnie utworzonym dla niego stanowisku.

Nasz amator stał się w jednej chwili sławny w całym naukowym świecie i w 1782 roku miał swoje ostatnie wystąpienie muzyczne. A muzykiem był znakomitym. Jego symfonie i koncerty są również dziś wykonywane i nagrywane (nie trudno je odszukać w serwisie YouTube). Fascynującą historię muzycznej i astronomicznej rodziny Williama Herschela, w tym jego siostry, Karoliny Herschel – pierwszej kobiety na królewskiej posadzie astronoma (z pensją 50 funtów rocznie), oraz syna, Johna Herschela – wybitnego uczonego i kontynuatora astronomicznego dzieła ojca, można znaleźć w [Holmes] (patrz też [Lemonick], [Hoskin], [Lubbock]).



Anders Johan Lexell (1740–1784)

1 AU (astronomical unit, w języku polskim czasem stosowany jest skrót j.a. – jednostka astronomiczna) jest to jednostka używana w astronomii. Odpowiada średniej odległości Ziemi od Słońca równej 149 597 870 700 m.

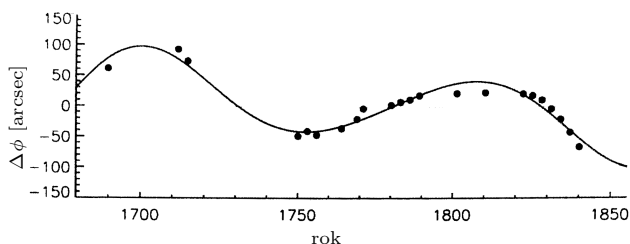
Problemy z trajektorią Urana i postulowanie istnienia nieznanej planety.

W 1781 roku do Londynu przybył wybitny matematyk Anders Johan Lexell (1740–1784), przyjaciel Leonharda Eulera z czasów pobytu w Petersburgu. Na podstawie dostępnych mu danych z obserwacji Urana obliczył, że orbita kołowa dobrze do nich pasuje, jakoby matematycznie potwierdzając przyjętą powszechnie tezę o odkryciu nowej planety. Jednak istniała też inna, przemilczana wtedy możliwość, że orbita nowego obiektu jest parabolą. Lexell ją odrzucił dopiero w 1783 roku, dysponując kolejnymi danymi z dawniejszego katalogu gwiazd i z przekazów obserwacyjnych. W artykule z tego roku Lexell definitywnie udowodnił, że nowy obiekt porusza się po orbicie eliptycznej i jest planetą, jak też ustalił jej odległość od Słońca na około 19 AU. Zauważył również, jako pierwszy, że orbita Urana jest zaburzona i że inne, jeszcze nieznanne planety mogą zakłócać jego orbitę [Stén].

W początku drugiej dekady XIX wieku, korzystając z nowych obserwacji, ustalono, że orbita Urana wymyka się rachunkom sformułowanym przez Laplace'a, a którym podlegały inne znane wówczas planety (problemy z orbitą Merkurego zostały zauważone dopiero w 1859 roku, o czym opowiemy w trzeciej części artykułu). Przypomnijmy, że planety naszego Układu Słonecznego poruszają się po keplerowskich elipsach tylko w przybliżeniu, gdyż ich orbity podlegają zaburzeniom spowodowanym obecnością pozostałych planet układu. Laplace w swoim wielkim dziele *Traité de mécanique céleste*, opublikowanym w latach 1798–1825, podał matematyczne wzory na wzajemne zaburzenia wywoływane przez planety w wyniku ich przyciągania grawitacyjnego. Wzory te służyły do tablicowania położenia planet w czasie. Laplace był dyrektorem Bureau des Longitudes (Biura długości geograficznych) i zlecał obliczenia podległym mu pracownikom. Wśród nich był Alexis Bouvard, któremu przypadły trzy wielkie planety: Jowisz, Saturn i Uran; zaczął badać ich orbity w 1821 roku. Z pierwszymi dwiema planetami nie miał problemów, gdyż ich obserwowane trajektorie dobrze zgadzały się z obliczeniami. Jednakże obserwowane od 1690 roku położenia Urana nie dawały się dopasować do teorii Newtona. Bouvard stwierdził, że obliczenia oparte na danych sprzed odkrycia Urana, z okresu 1690–1781, nie pasują do tych z okresu po jego odkryciu, 1781–1821. Próbował złożyć to na karb niedokładności wcześniejszych obserwacji, ale musiałyby one być bardzo duże, aby to wyjaśniało sprawę.

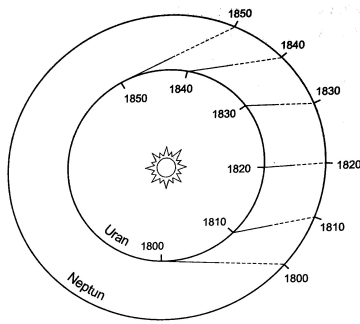


Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



Obserwowana długość heliocentryczna Urana (w punktach) i dopasowany do niej model (linią ciągłą). Ruch bez zaburzeń (czyli ruch jednostajny po okręgu) odpowiadałby linii prostej na poziomie 0.

Zresztą same obserwacje z okresu po odkryciu Urana także wskazywały na niewytłumaczalne zaburzenia jego orbity. Inne pomysły na wyjaśnienie zakładały domniemane uderzenie komety w Urana, istnienie jakiegoś ośrodka w przestrzeni spowalniającego ruch Urana czy też istnienie jego masywnego księżycy. Zaproponowano jeszcze dwa bardzo śmiało wyjaśnienia. Pierwsze dotyczyło wątpliwości co do wzoru Newtona na grawitację w przypadku dużych odległości (w czym można dostrzec analogię z dzisiejszą sytuacją związaną z ruchem galaktyk niezgodnym z teorią Einsteina i postulatem istnienia ciemnej materii).



Położenia Urana i Neptuna w latach 1781–1843



Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811–1877)

Wyjaśnienie to byłoby jednak uderzeniem w sam fundament obrazu świata i ta hipoteza po rozważaniach została w końcu zarzucona. Łatwiejszym do przyjęcia było ostatecznie logiczne wyjaśnienie: istnienie nieznanej dotąd planety zaburzającej ruch Urana.

Odkrycie Neptuna wisiało już w tym czasie w powietrzu. Astronomowie i inni uczeni pisali o tym w listach, rozmawiali na spotkaniach, a znakomity matematyk Friedrich Wilhelm Bessel, który od 1830 roku podejrzewał istnienie nieznanej planety, dał nawet na ten temat publiczny wykład.

François Arago, dyrektor Obserwatorium Paryskiego zaproponował dokładne zbadanie problemu Urana i ewentualnej nowej planety młodemu, błyskotliwemu astronomowi z École Polytechnique, Urbainowi Le Verrierowi, który wcześniej zajmował się problemem stabilności układu słonecznego oraz orbitami komet. W samym Obserwatorium Paryskim Arago w tak ważnej sprawie nie miał zaufania do nikogo. Le Verrier podjął rękawicę – w listopadzie 1845 roku opublikował artykuł, w którym przeanalizował dotychczasowe dane dotyczące orbity Urana i odrzucił zarzuty Bouvarda, że pomiary położenia Urana sprzed jego odkrycia były niewystarczająco precyzyjne, oraz pokazał, że znaczne różnice pomiędzy obserwowaną i przewidywaną orbitą Urana występują również po uwzględnieniu wpływu Jowisza i Saturna. Wskazywało to na fakt, że ewentualne niedoskonałości pomiarów w obrębie znanych danych nie są wystarczające dla wyjaśnienia tak znacznych anomalii orbity Urana.

W czerwcu 1846 roku Le Verrier opublikował następny artykuł, w którym odrzucił wszystkie dotychczasowe próby wyjaśnienia anomalii ruchu Urana, i pokazał, że wprowadzając do rozważań nową planetę, można rozwiązać problem na gruncie mechaniki newtonowskiej. Wykazał, że nowa planeta nie może być planetą wewnętrzną względem orbity Urana; przyjął, że leży ona w płaszczyźnie ekliptyki oraz że zgodnie z prawem Titiusa–Bodego jej odległość od Słońca wynosi 38 AU.

Przy tych założeniach podał położenie nowej planety na dzień 1 stycznia 1847 roku z dokładnością do 10 minut kątowych. Później, w sierpniu 1846 roku, podał położenie nowej planety z błędem zaledwie jednego stopnia kąтового na dzień odkrycia [Krajnović], [Lequeux].

Astronomiczny świat był pod dużym wrażeniem czerwcowego artykułu. Astronom Królewski George Biddle Airy napisał: *Myślę, że niemożliwe jest przeczytanie tego listu [zawierającego wyniki Le Verriera, przesłane do Greenwich w czerwcu 1846 roku] bez porażenia jego jasnością wyjaśnienia, niezwykłą znajomością autora nie tylko fizycznych teorii perturbacji, ale także geometrycznych teorii dedukcji orbit z obserwacji, jak również jego przekonaniem, że jego teoria powinna wyjaśniać wszystkie zjawiska związane z miejscem planety.*

Rzeczą bardziej niewytłumaczalną niż anomalie orbity Urana jest fakt, że przy tym wszystkim nikt nie kwapił się spojrzeć w niebo, w szczególności nie podjęły się tego natychmiast najznakomitsze obserwatoria astronomiczne. Chodziło przecież o odkrycie na miarę stulecia. Inna rzecz, że wtedy obserwatoria były w pierwszym rzędzie centrami obliczeniowymi użyteczności publicznej, a nie centrami naukowymi.

W drugiej części artykułu opowiemy dokładniej o odkryciu Neptuna i związanych z tym odkryciem kontrowersjach obecnych na międzynarodowym forum przez następne ponad 150 lat.

Bibliografia

[Holmes] Richard Holmes, *Wiek Cudów*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2010.

[Blitzstein] William Blitzstein, *The seven identified observations of Uranus made by John Flamsteed using his mural arc*, The Observatory, 219–222, Vol. 118, 1998.

[Hoskin] Michael Hoskin, *Discoverers of the Universe. William and Caroline Herschel*, Princeton University Press, 2011.

[Krajnović] Davor Krajnović, *The contrivance of Neptune*, arxiv.org/abs/1610.06424, 2016.

[Lequeux] James Lequeux, *Le Verrier – Magnificent and Detestable Astronomer*, Springer, 2013.

[Lemonick] M.D. Lemonick, *The Georgian Star. How William Herschel and Caroline Herschel Revolutionized Our Understanding of the Cosmos*, W. W. Norton and Company, New York London 2009.

[Lubbock] *The Herschel Chronicle: The Life-Story of William Herschel and his Sister Caroline Herschel*, Ed. by his Granddaughter Constance A. Lubbock, Cambridge University Press (first published 1933), 2013.

[Stén] Johan C.-E. Stén, *A Comet of the Enlightenment, Anders Johan Lexell's Life and Discoveries*, Birkhäuser, 2014.

Porzućcie wszelką klasyczną intuicję, wy, którzy tu wchodzić!

Rafał DEMKOWICZ-DOBRZAŃSKI*

* Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Nagrodę Nobla z Fizyki w roku 2022 otrzymało trzech fizyków: Alain Aspect, John F. Clauser i Anton Zeilinger za „eksperymenty ze splątanymi fotonami, wykazanie łamania nierówności Bella i pionierskie badania w dziedzinie informacji kwantowej”. Z pozoru jest to kolejna z wielu Nagród Nobla z dziedziny fizyki kwantowej, ale nic bardziej mylnego – jest wyjątkowa! W rzeczywistości dotyczy samych fundamentów naszego poznania i można by z powodzeniem określić ją jako pierwszą Nagrodę Nobla z filozofii eksperymentalnej! Wykazanie łamania nierówności Bella, o których mowa w ogłoszeniu komitetu noblowskiego, oznacza, że musimy porzucić nasze głęboko zakorzenione klasyczne intuicje dotyczące poznania świata i pogodzić się z jego kwantowym opisem jako swego rodzaju nieuchronną koniecznością.

O nierównościach Bella pisał również Adam Bednorz w Δ_{21}^2 .

O tzw. *Demonie Laplace’a* pisał Szymon Charzyński w Δ_{15}^7 .

Zacznijmy od wyjaśnienia, co rozumiemy przez klasyczny opis świata. Lapidarnie ujął to na początku XIX wieku Pierre Simon de Laplace, mówiąc: „Dajcie mi położenia i prędkości wszystkich cząstek we Wszechświecie, a przewidzę przyszłość”. W tym cytacie na pierwszy plan wybija się przede wszystkim stwierdzenie dotyczące determinizmu Wszechświata, gdzie nie ma miejsca na żadną losowość ani wolną wolę. Cytat ten zawiera jednak znacznie więcej treści niż powyższe stwierdzenie. Zawiera on również z pozoru oczywiste założenie, że Wszechświat złożony jest z obiektów (cząstek traktowanych jako byty obiektywne) mających jednocześnie dobrze określone wszystkie wielkości fizyczne, o które moglibyśmy „je zapytać” (położenie, prędkość, masę, ładunek elektryczny itp.). Nie ma w tym opisie ani słowa o obserwatorze, który ten Wszechświat opisuje, ani o pomiarze, który pozwala obserwatorowi poznać własności tych obiektów. W klasycznym opisie pomiar jest jedynie „sprawdzeniem z góry dobrze określonych własności fizycznych obiektów” – coś w stylu dyskretnego podniesienia pokrywy garnka i zajrzenia do wnętrza, żeby sprawdzić, co będzie na obiad. Nie ma więc w nim nic fundamentalnego, o czym warto by wspominać, formułując teorię Wszechświata.



Rozwiązanie zadania F 1080.

Podstawowa częstość drgań struny o długości l i liniowej gęstości (stosunku masy do długości) $\mu = m/l$, napiętej siłą F_0 wynosi:

$$f_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F_0}{\mu}}.$$

Jeśli długość i masa struny pozostają niezmiennicze, to do wyznaczenia częstości w niższej temperaturze musimy znaleźć siłę naciągu F utrzymującą stałą długość. Niech l_0 oznacza długość nierozciągniętej struny w temperaturze T_0 , a S pole jej przekroju poprzecznego. Prawo Hooke’a pozwala obliczyć długość po naciągnięciu siłą F_0 :

$$l = l_0 \left(1 + \frac{F_0}{YS} \right).$$

W temperaturze T długość struny wyniesie l , ale teraz będzie to wynik dwóch efektów: rozszerzalności cieplnej i naciągnięcia siłą F :

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta T) \left(1 + \frac{F}{YS} \right) = l_0 \left(1 + \frac{F_0}{YS} \right).$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{F_0}{YS} &= \alpha\Delta T + \frac{F}{YS} + \alpha\Delta T \frac{F}{YS} \approx \\ &\approx \alpha\Delta T + \frac{F}{YS}. \end{aligned}$$

Przybliżenie wynika z faktu, że oba czynniki, $\alpha\Delta T$ i $F/(YS)$, są znacznie mniejsze od jedności. W tym przybliżeniu

$$F = F_0 - \alpha Y S \Delta T.$$

Ponieważ $\Delta T = -20^\circ\text{C}$ jest ujemna, to $F > F_0$. Ostatecznie:

$$f = \sqrt{f_0^2 - \frac{\alpha Y S \Delta T}{4\mu l^2}} = \sqrt{f_0^2 - \frac{\alpha Y \Delta T}{4\rho l^2}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $f \approx 404,4$ Hz.

Taki obraz Wszechświata, rysowany przez fizykę klasyczną, stał się pod koniec XIX wieku dominującym poglądem filozoficznym, przynajmniej w kręgach naukowych. Byłby nim pewnie do dzisiaj, gdyby nie niespodziewane kłopoty związane z jego wykorzystaniem do opisu własności mikroświata. Próby wyjaśnienia struktury atomowej i własności promieniowania rozgrzanych ciał doprowadziły do powstania mechaniki kwantowej, która oferowała zupełnie nowe narzędzia matematyczne pozwalające na uzyskanie doskonałej zgodności wyników eksperymentalnych z przewidywaniami teoretycznymi.

Mimo doskonałych przewidywań mechaniki kwantowej wiązało się z nią wiele koncepcyjnych kłopotów. Przykładowo, zgodnie ze słynną zasadą nieoznaczoności Heisenberga cząstka nie może mieć jednocześnie dobrze określonego położenia i prędkości. Pojawiło się więc naturalne pytanie, czy zasada nieoznaczoności ma charakter fundamentalny, czy też jest związana z niedoskonałością naszego opisu.

Część fizyków, w tym sam Einstein, stała na stanowisku, że opis kwantowy jest niekompletny i obiekty fizyczne mają nieobserwowane przez nas na tym etapie rozwoju nauki tzw. parametry ukryte, których znajomość pozwoliłaby na powrót do w pełni klasycznego opisu. Z tej perspektywy wszelkie „kwantowe nieoznaczoności” byłyby jedynie efektem naszej niepełnej wiedzy.

Aby wykazać niekompletność opisu kwantowego, Einstein, wspólnie z Podolskim i Rosenem, zaproponował w 1935 roku następujący eksperyment myślowy, nazywany argumentem EPR [1]. Rozważmy dwie punktowe cząstki A i B poruszające się w jednym wymiarze, przygotowane w takim stanie kwantowym, że każda cząstka z osobna ma bardzo słabo określony pęd i położenie, ale już

różnica ich położen i suma ich pędów mają bardzo dobrze określone wartości: $x_B - x_A = d$ (cząstki znajdują się zawsze w odległości d od siebie), $p_A + p_B = 0$ (mają zawsze przeciwne pędy). Oznacza to, że stan cząstek jest niezwykle silnie skorelowany (w języku mechaniki kwantowej moglibyśmy użyć określenia splątany). Mierzając położenie jednej cząstki, możemy spodziewać się znaleźć ją we względnie dużym obszarze, ale gdy już stwierdzimy, że znajduje się ona w punkcie x_A , wiemy natychmiast, że druga cząstka znajduje się praktycznie dokładnie w punkcie $x_B = x_A + d$. Mierzając z kolei pęd cząstek, uzyskamy duży rozrzut wartości pędów danej cząstki, gdy jednak zmierzmy pędy obu cząstek, ich wartości będą zawsze przeciwne, $p_A = -p_B$. Oznacza to, że cząstki zawsze będą lecieć z tym samym pędem w przeciwne strony. Okazuje się, że taki stan kwantowy jest faktycznie dopuszczalny przez mechanikę kwantową i jego istnienie nie przeczy zasadzie nieoznaczoności Heisenberga.

Żeby zrozumieć, dlaczego istnienie opisanego tu stanu nie stoi w sprzeczności z zasadą nieoznaczoności Heisenberga, zwróćmy uwagę, że od strony matematycznej zasada nieoznaczoności związana jest z faktem, że wielkości fizyczne położenia i pędu są reprezentowane przez operatory \hat{x} , \hat{p} , których składanie nie jest przemienne: $[\hat{x}, \hat{p}] := \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \neq 0$, gdzie i jest wielkością urojoną, a \hbar stałą Plancka podzieloną przez 2π . Wielkość $[\hat{x}, \hat{p}]$ reprezentująca stopień nieprzemienności mnożenia dwóch operatorów nazywamy ich komutatorem. W przypadku układu dwóch cząstek mamy analogiczne reguły komutacyjne dla każdej z nich, $[\hat{x}_A, \hat{p}_A] = i\hbar$, $[\hat{x}_B, \hat{p}_B] = i\hbar$, a dodatkowo operatory dotyczące różnych cząstek zawsze komutują ze sobą. Jeśli teraz rozważymy operator odpowiadający różnicy położen $\hat{x}_- = \hat{x}_A - \hat{x}_B$ oraz sumie pędów $\hat{p}_+ = \hat{p}_A + \hat{p}_B$, otrzymamy po bezpośrednim rachunku $[\hat{x}_-, \hat{p}_+] = 0$, a to oznacza, że te dwie wielkości fizyczne nie są związane żadną zasadą nieoznaczoności i może istnieć stan, gdzie obie z nich mają dobrze określone wartości.

Następnie autorzy EPR zdefiniowali dość precyzyjnie, co rozumieją przez *realne istnienie pewnych wielkości fizycznych*:

Jeżeli, nie zakłócając w żaden sposób układu, możemy przewidzieć z całą pewnością (tj. z prawdopodobieństwem równym jedności) wartość danej wielkości fizycznej, to istnieje element rzeczywistości fizycznej odpowiadający tej wielkości fizycznej.

Oznacza to w szczególności, że jeśli w pewnej sytuacji, bez zaburzania stanu cząstki, potrafimy przewidzieć z pewnością, że cząstka ma daną wartość położenia, to położenie jest *realną* cechą tej cząstki. Wyobraźmy sobie teraz sytuację, w której rozważane dwie cząstki znajdują się w dwóch różnych galaktykach.

Ścisłe rzecz biorąc, oznacza to, że coś jednak wiemy na temat ich położen, skoro możemy powiedzieć, że cząstka A jest w jednej galaktyce, a cząstka B w drugiej. Tak, to prawda, możemy jednak myśleć, że to jest jedynie taka bardzo niedokładna lokalizacja w skali makro i nie wpływa na dalszy przebieg argumentu, który dotyczy pomiarów położen w skali mikro.

Obserwator w galaktyce A może teraz przeprowadzić pomiar położenia na swojej cząstce. Jeśli otrzyma wyniki x_A , wie, dzięki własnościom skorelowanego stanu cząstek, że druga cząstka musi znajdować się w punkcie $x_B = x_A + d$. Przy założeniu, że żadne sygnały nie mogą rozchodzić się szybciej niż światło, oznacza to, że może on przewidzieć dokładne położenie cząstki B bez żadnego jej zaburzania. Obserwator

dochodzi do wniosku, że cząstka B musiała mieć dobrze określone położenie już wcześniej, zanim dokonał pomiaru, bo przecież sam akt pomiaru nie mógł w żaden sposób wpłynąć na stan cząstki znajdującej się w innej galaktyce. Nieoznaczoność wyniku była rezultatem jedynie braku wiedzy o tym, jakie dokładnie są położenia cząstek w momencie ich przygotowania. Z tego wynika, że można myśleć o położeniu cząstki jako o *realnym elemencie rzeczywistości fizycznej*.

Zauważmy teraz, że obserwator mógł zdecydować się zmierzyć pęd cząstki A zamiast jej położenia. W tej sytuacji rozumowanie byłoby zupełnie analogiczne i doprowadziłoby nas do wniosku, że pęd cząstki też jest *realnym elementem rzeczywistości fizycznej*. Gdy połączymy kropki, zobaczymy, że argument EPR prowadzi nas do stwierdzenia, iż mechanika kwantowa jest niekompletna, skoro odmawia możliwości istnienia obiektu o jednocześnie dobrze określonym położeniu i pędzie, a jak przecież widzimy, cząstka w drugiej galaktyce musiała mieć te obie wielkości dobrze określone, skoro mogliśmy, wykonując odpowiedni pomiar (niezaburzający cząstki B), stwierdzić z zupełną pewnością, jaką mają wartość.

Argument EPR stał się ciężkim orzechem do zgryzienia dla fizyków. Część z nich, sympatyzując z Einsteinem, zaczęła poszukiwać alternatywy dla mechaniki kwantowej, która miałaby fundamentalnie klasyczny charakter, cząstki miałyby zawsze dobrze określone położenia i pędy, a ich pozornie kwantowe zachowanie wynikałoby z wpływu nieobserwowanych w tym momencie *parametrów ukrytych*, które w szczególności tak każą poruszać się cząstkom, aby po wielu powtórzeniach eksperymentu tworzyły piękne obrazy interferencyjne na ekranie.

Co ciekawe, już Luis de Broglie w latach 20. XX wieku rozwijał taką teorię, która ostatecznie została dopracowana przez Davida Bohma w 1952 roku. Teoria ta była w pełni równoważna z przewidywaniami ortodoksyjnej mechaniki kwantowej! Część fizyków reagowała na tego typu nowinki podejściem „zamknij się i licz”, uznając nadmierne dywagacje filozoficzne za szkodliwe dla rozwoju nauki. Wydawało się to zdrowe podejście, bo skoro obie teorie są sobie równoważne, to jak rozstrzygnąć, która jest lepsza. Z jednej strony teoria parametrów ukrytych zaspokaja nasz ideał klasycznego obrazu świata, ale za cenę wprowadzenia bytów nieobserwowalnych (póki co przynajmniej). Z drugiej strony mechanika kwantowa mimo swoich niejasnych fundamentów filozoficznych charakteryzuje się matematyczną prostotą i elegancją, pozwalającą na efektywne przewidywanie zachowania się obiektów mikroświata.

Tego typu spory są plagą całej filozofii, które złośliwi podają za przykład bezowocności dociekań filozoficznych i przywołują w tym miejscu dowcip o tym, czym się różnią fizycy od filozofów ... (... fizycy używają koszy na śmieci). Można przez tysiąclecia spierać się o istnienie świata idei, duszy, wolnej woli

oraz czy Wszechświat musiał istnieć – i każdy może mieć swoje jedynie słuszne zdanie na ten temat. I podobnie mogłoby być w przypadku powyższego sporu, gdyby nie pewien szalony fizyk, który wcale nie miał zamiaru „zamknąć się i liczyć”.

John Bell, bo o nim mowa, w 1964 roku opublikował przełomową pracę [2], w której udowodnił, że żadna teoria parametrów ukrytych, która jednocześnie byłaby lokalna (czyli nie pozwalała na natychmiastowe oddziaływanie na odległość), nie jest w stanie reprodukcować wszystkich przewidywań mechaniki kwantowej dotyczących zachowania się splątanych cząstek.

Poniżej przedstawimy argument Bella w wersji zmodyfikowanej kilka lat później między innymi przez jednego z naszych noblistów – J. F. Clausera [3], jako że jest zarówno bardziej elegancki, jak i praktyczny z punktu widzenia testów eksperymentalnych.

Rozważmy, analogicznie jak w argumente EPR, dwie cząstki A i B znajdujące się w różnych galaktykach oraz dwójkę obserwatorów dokonujących na nich pomiarów, Atteę i Borga (autor jest już zmęczony wszechobecną Alicją i Bobem). Założymy, że każde z nich może wykonać jeden z dwóch możliwych pomiarów, A_1 lub A_2 w przypadku Attei i B_1 lub B_2 w przypadku Borga. Jest to analogiczne do sytuacji z argumentu EPR, gdzie mogliśmy wybrać, czy dokonujemy pomiaru położenia, czy pędu. W odróżnieniu od pomiaru położenia i pędów w tym przypadku założymy jednak, że wynikiem pomiaru może być tylko jedna z dwóch wartości: $+1$ lub -1 (patrz rysunek).

Oznaczmy przez λ parametry ukryte, które determinują to, jak zachowują się cząstki, gdy zostanie wykonany na nich dany pomiar. Innymi słowy, zakładamy *realizm* Einsteina i uznajemy, że wszystkie wielkości fizyczne są fundamentalnie dobrze określone, a wszelkie nieoznaczoności pomiarowe wynikają z naszej nieznajomości precyzyjnej wartości parametrów ukrytych. Dodatkowo zakładamy *lokalność*, która wymaga, by wyniki pomiaru Attei nie zależały od wyboru pomiaru Borga i vice-versa – w przeciwnym razie mielibyśmy maszynkę do natychmiastowej komunikacji międzygalaktycznej. Oznacza to, że wyniki pomiarów Attei a_i i Borga b_j można zapisać jako:

$$a_i = a(A_i, \lambda), \quad b_j = b(B_j, \lambda),$$

gdzie a, b są pewnymi jednoznacznie określonymi funkcjami, zależącymi od wartości parametru ukrytego i wyboru pomiaru. Rozważmy teraz następującą

„funkcję korelacji” wyników pomiarów uzyskiwanych przy różnych wyborach pomiarów dla danej wartości λ :

$$C(\lambda) = a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2.$$

Dla danego λ wszystkie wyniki pomiaru mają dobrze określone wartości ± 1 , a sama wielkość $C(\lambda) = \pm 2$. Żeby się o tym przekonać, zapiszmy ją w postaci:

$$C(\lambda) = a_1 \cdot (b_1 + b_2) + a_2 \cdot (b_1 - b_2)$$

i zauważmy, że są możliwe dwa przypadki. Albo (1) $b_1 = b_2$, i wtedy drugi człon znika, a pierwszy oczywiście może dać tylko ± 2 , albo (2) $b_1 = -b_2$, i wtedy pierwszy człon znika, a drugi daje ± 2 .

Jeśli teraz uśrednimy wyniki pomiarów po wielu realizacjach, gdzie parametr ukryty λ będzie zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa zadanym przez $p(\lambda)$, wtedy wartość oczekiwaną funkcji korelacji obliczymy jako:

$$\langle C \rangle = \int d\lambda p(\lambda) C(\lambda).$$

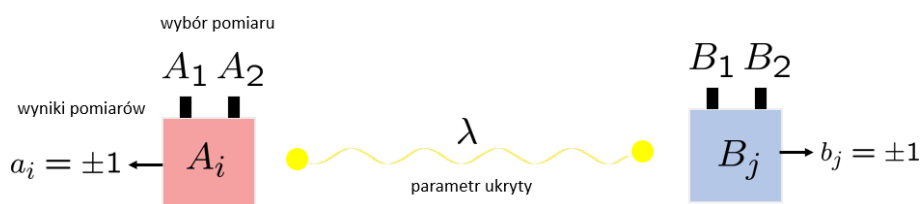
Ponieważ uśredniamy wielkości, które mogą przyjmować jedynie wartości ± 2 , wynika z tego natychmiast, że sama wartość oczekiwana musi znajdować się w przedziale $[-2, 2]$, czyli:

$$|\langle C \rangle| \leq 2.$$

W ten sposób wyprowadziliśmy słynną nierówność Bella w wersji CHSH (skrót od pierwszych liter nazwisk autorów pracy [3]). Powyższą nierówność możemy traktować jako pewnego rodzaju ograniczenie na maksymalną możliwą siłę korelacji pomiędzy wynikami różnych pomiarów wykonywanych na odległych cząstkach, w ramach jakiegokolwiek lokalnej teorii parametrów ukrytych.

Należy docenić geniusz Bella, który głęboki i pozornie nierozstrzygalny problem filozoficzny potrafił zapisać w postaci prostej nierówności matematycznej. Jeśli teraz udałoby nam się przeprowadzić eksperyment, w którym wyniki pomiarów łamałyby powyższą nierówność, mielibyśmy dowód, że niemożliwy jest opis naszego Wszechświata w ramach żadnej lokalnej teorii parametrów ukrytych.

Czy tego typu eksperymenty zostały przeprowadzone? Owszem i właśnie za przeprowadzenie tego typu eksperymentów J.F. Clauser, A. Aspect i A. Zeilinger otrzymali Nagrodę Nobla z fizyki w roku 2022. Przeprowadzili oni eksperymenty na splątanych parach fotonów rozesłanych na pewną odległość i dokonywali na nich odpowiednich pomiarów polaryzacji.



Schemat pomiarowy pozwalający na wyprowadzenie nierówności Bella typu CHSH

Najprostszy pomiar polaryzacji fotonu polega na ustawieniu polaryzatora oraz bezpośrednio za nim detektora. Przyjmijmy, że polaryzator jest ustawiony poziomo. Jeśli polaryzacja fotonu jest również pozioma, co oznaczmy jako stan $|\leftrightarrow\rangle$, foton zawsze przejdzie i detektor kliknie. Jeśli polaryzacja fotonu jest pionowa, $|\updownarrow\rangle$, foton zostanie zawsze pochłonięty. Jeśli polaryzacja fotonu jest pod kątem α do kierunku ustawienia polaryzatora, matematycznie taki stan zapisujemy jako kwantową superpozycję stanu o polaryzacji poziomej i pionowej $|\alpha\rangle = \cos\alpha|\leftrightarrow\rangle + \sin\alpha|\updownarrow\rangle$, a współczynniki stojące przed stanami $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$ nazywamy amplitudami prawdopodobieństwa (formalnie stany są elementami pewnej przestrzeni wektorowej). Foton, trafiając na polaryzator, zachowa się w sposób probabilistyczny: przejdzie z prawdopodobieństwem $\cos^2\alpha$, a zostanie pochłonięty z prawdopodobieństwem $\sin^2\alpha$ (prawdopodobieństwa są równe kwadratowi odpowiednich amplitud). Można takim zdarzeniom przypisać umowne wartości wyników pomiaru odpowiednio ± 1 .

Rozważmy teraz splątany stan dwóch fotonów postaci:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle_A \otimes |\leftrightarrow\rangle_B + |\updownarrow\rangle_A \otimes |\updownarrow\rangle_B),$$

który jest kwantową superpozycją stanów, gdzie oba fotony mają polaryzację poziomą oraz oba fotony mają polaryzację pionową. Symbol \otimes oznacza formalnie iloczyn tensorowy, ale wystarczy, że będziemy przez niego rozumieć oznaczenie rozdzielające stany poszczególnych cząstek.

Prawdopodobieństwa zdarzeń w mechanice kwantowej liczymy, obliczając kwadrat (modułu, jeśli mamy do czynienia z liczbami zespolonymi) iloczynu skalarnego pomiędzy wektorem naszego stanu a wektorem odpowiadającym obserwowanemu zdarzeniu. Przykładowo, chcąc obliczyć prawdopodobieństwo, że oba fotony przejdą przez polaryzatory ustawione pod kątami α i β , zapisujemy najpierw stan odpowiadający fotonom o takiej właśnie polaryzacji:

$$|\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B = (\cos\alpha|\leftrightarrow\rangle + \sin\alpha|\updownarrow\rangle) \otimes (\cos\beta|\leftrightarrow\rangle + \sin\beta|\updownarrow\rangle).$$

Korzystając z rozdzielnosci dodawania względem iloczynu tensorowego oraz z faktu, że wektory $|\updownarrow\rangle, |\leftrightarrow\rangle$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni stanów polaryzacyjnych pojedynczego fotonu, możemy obliczyć iloczyn skalarny tego stanu ze stanem $|\psi\rangle$, który wynosi: $\langle\alpha| \otimes \langle\beta| |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$. Prawdopodobieństwo będzie kwadratem powyższego wyrażenia i wyniesie:

$$p(+1, +1) = \frac{1}{2}\cos^2(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}(1 + \cos(2(\alpha - \beta))),$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzorów na cosinus różnicy kątów oraz cosinus podwojonego kąta. Analogicznie liczymy pozostałe prawdopodobieństwa, zastępując kąty α, β , odpowiednio, kątami $\alpha + 90^\circ, \beta + 90^\circ$.

Stan ten ma taką własność, że jeśli cząstkę A zmierzmy polaryzatorem ustawionym pod kątem α do poziomu, a cząstkę B zmierzmy polaryzatorem ustawionym pod kątem β do poziomu, to prawdopodobieństwa odpowiednich zdarzeń będą miały postać:

$$p(a, b) = \frac{1}{4}(1 + a \cdot b \cdot \cos(2(\alpha - \beta))),$$

gdzie $a = \pm 1, b = \pm 1$ oznaczają, odpowiednio, zdarzenia, w których foton A, B przeszedł lub nie przeszedł przez polaryzator. Jeśli teraz obliczymy wartość oczekiwaną iloczynu wyników otrzymanych przez dwójkę obserwatorów, otrzymamy:

$$\langle ab \rangle = \sum_{a=\pm 1, b=\pm 1} p(a, b) a \cdot b = \cos(2(\alpha - \beta)).$$

A jeśli teraz chcemy zmaksymalizować wielkość wyrażenia

$$\langle C \rangle = \cos(2(\alpha_1 - \beta_1)) + \cos(2(\alpha_1 - \beta_2)) + \cos(2(\alpha_2 - \beta_1)) - \cos(2(\alpha_2 - \beta_2)),$$

musimy inteligentnie wybrać kąty $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Jakie to kąty? Spróbuj znaleźć samodzielnie! (Odpowiedź na końcu artykułu). Okazuje się, że dla optymalnego wyboru otrzymamy wartość $\langle C \rangle = 2\sqrt{2}$, co jest istotnie więcej niż 2 i dowodzi, że przewidywań mechaniki kwantowej nie da się odtworzyć w ramach lokalnych teorii parametrów ukrytych.

Wynika z tego, że musimy porzucić jedno z dwóch założeń leżących u podstaw wyprowadzenia nierówności Bella. Mamy dwa wyjścia. Możemy przyjąć, że parametry ukryte istnieją i cieszymy się klasycznym opisem świata, ale za cenę nielokalności. Oznacza to, że potencjalnie istnieje możliwość komunikacji natychmiastowej między dowolnymi miejscami Wszechświata i cała struktura przyczynowa, na której oparta jest teoria względności oraz cała współczesna fizyka, musi leć w gruzach. Drugim wariantem jest odrzucenie realizmu i przyjęcie do wiadomości, że obiekty fizyczne nie mają dobrze określonych wszystkich wielkości fizycznych, i dopiero kontekst pomiarowy pozwala mówić o pewnych wielkościach fizycznych w sposób sensowny.

Innymi słowy, to odpowiednie sprzężenie obserwatora z układem daje kontekst, w ramach którego mówimy np. „cząstka ma prędkość v ”. Prędkość cząstki nie jest jej autonomiczną cechą, a pewną relacją pomiędzy cząstką a urządzeniem pomiarowym. Tym samym opis świata w ramach mechaniki kwantowej jest opisem Wszechświata niejako „od środka” i niezwykle trudno usunąć z tego opisu samego obserwatora. Wydaje się, że jedynym na to sposobem są wspomniane wyżej nielocalne teorie parametrów ukrytych lub tzw. teorie wielu światów, ale każda z tych propozycji pozostawia duży niedosyt poznawczy. Musimy czekać na kolejny przebłysk geniuszu, w rodzaju nowych nierówności Bella, aby lepiej ugruntować fundamenty naszego poznania.

Wracając do pomiarów polaryzacji splątanych fotonów: Z powyższej dyskusji wynika w szczególności, że stany polaryzacyjne splątanych fotonów nie są ustalone „zawczasu”. Co ciekawe, można ten fakt wykorzystać w praktyce – do tzw. kwantowej dystrybucji klucza wykorzystującej stany splątane. Fakt nieistnienia parametrów ukrytych oznacza, że określone stany polaryzacyjne fotonów „dookreślają” się dopiero w wyniku wykonywania pomiarów. Jeśli wykorzystać wyniki pomiarów jako pewien współdzielony klucz kryptograficzny, można udowodnić, że pod warunkiem, że łamane są nierówności Bella, klucz taki jest fundamentalnie bezpieczny i żadna trzecia strona nie może mieć dostępu do informacji w nim zawartej! Ta obserwacja jest podstawą zaproponowanego przez Artura Ekerta protokołu kwantowej dystrybucji klucza E91 [4]. Widać, że nawet najbardziej szalone pomysły mogą kryć w sobie praktyczne zastosowania.

A na zakończenie, w ramach refleksji filozoficznej, cytaty z Witkacego, który tak naprawdę, w głębi duszy, był fizykiem... (patrz: *Witkacy i Fizyka*, Δ_{19}^3):

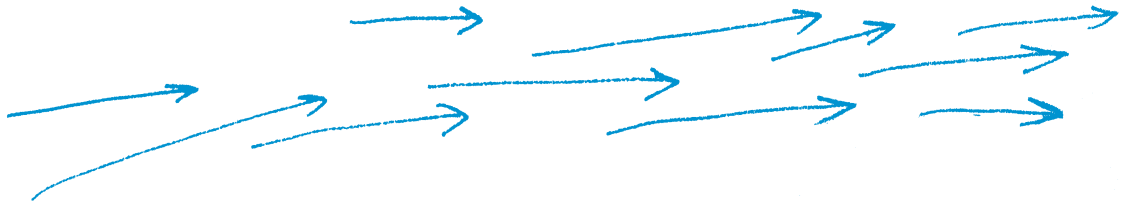
„Jeszcze jaskrawiej występuje problem obserwatora w mikrofizyce w związku z eksplisytym wymaganiem brania pod uwagę tylko tego, co obserwowalne. [...] obserwator nie tylko wślizgnął się tu [...], on po prostu rozsiadł się w odnośnych równaniach jak w fotelach [...]. Obserwator [...] musi być przyjęty jako zanawiasowy element konieczny poglądu fizykalnego, który przez to traci swój charakter pseudoobiektywności absolutnej [...] Wróg czystego fizykalizmu, którego pozorne niegdyś pokonanie było złudnym tryumfem materializmu, znajduje się już wewnątrz fortecy.”

Optymalne kąty to: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 45^\circ$,
 $\beta_1 = 22,5^\circ$, $\beta_2 = -22,5^\circ$.

Obserwatorze i Obserwatoroko, obserwujcie!

Literatura

- [1] A. Einstein, B. Podolski and N. Rosen, *Physical Review* 47, 777 (1935).
- [2] J.S. Bell, *Physics* 1, 195 (1964).
- [3] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* 23, 880 (1969).
- [4] A.K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* 67, 661 (1991).



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1756. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 następujący układ równań

$$\begin{cases} (x_1 - x_2 + x_3)^2 = x_2(x_4 + x_5 - x_2) \\ (x_2 - x_3 + x_4)^2 = x_3(x_5 + x_1 - x_3) \\ (x_3 - x_4 + x_5)^2 = x_4(x_1 + x_2 - x_4) \\ (x_4 - x_5 + x_1)^2 = x_5(x_2 + x_3 - x_5) \\ (x_5 - x_1 + x_2)^2 = x_1(x_3 + x_4 - x_1). \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 2

M 1757. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b takie, że

$$NWW(a, b) + NWW(a + 2, b + 2) = 2 \cdot NWW(a + 1, b + 1).$$

Udowodnić, że $a \mid b$ lub $b \mid a$.

Rozwiązanie na str. 5

M 1758. Wielokąt wypukły \mathcal{F} po obrocie o kąt 90° wokół pewnego punktu przekształca się w siebie. Udowodnić, że istnieją dwa koła o stosunku promieni równym $\sqrt{2}$, z których jedno zawiera \mathcal{F} , a drugie jest zawarte w \mathcal{F} .

Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1079. W notatce prasowej na temat Dzwonu Zygmunta napisano, że podczas dzwonienia jego „ciężar zwiększa się trzykrotnie”. Jaki jest kąt φ_0 największego odchylenia od pionu osiągnięty przez dzwon podczas dzwonienia? Dla jakiego kąta wychylenia φ na oś zawieszenia dzwonu działa największa siła pozioma?

Rozwiązanie na str. 1

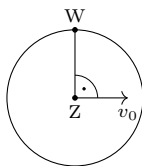
F 1080. W temperaturze $T_0 = 20^\circ\text{C}$ naciągnięta nylonowa struna długości $l = 1$ m drga z podstawową częstotnością $f_0 = 440$ Hz. Oszacuj, jak zmieni się wysokość dźwięku, gdy temperatura spadnie do $T = 0^\circ\text{C}$, a długość struny pozostanie bez zmiany? Przydatne dane dla nylonu: gęstość $\rho = 1,14 \cdot 10^3$ kg/m³, moduł Younga $Y = 2,9$ GPa, współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha = 30 \cdot 10^{-3}$ K⁻¹.

Rozwiązanie na str. 15

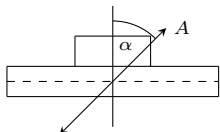
Klub 44 F



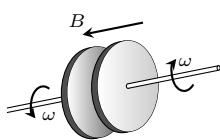
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2023



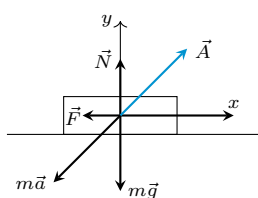
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 762, 763

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

762. Przekształcenie fotonu w parę elektron–pozyton w próżni jest niemożliwe, ze względu na zasadę zachowania pędu. Znaleźć minimalną energię, jaką powinien posiadać foton, aby mogła powstać para elektron–pozyton w pobliżu spoczywającego elektronu.

763. Na poziomej powierzchni lodu narysowany jest okrąg o promieniu $R = 10$ m. W chwili początkowej zajęc Z znajduje się w środku okręgu, a wilk W na okręgu, jak na rysunku 1. Zajęc porusza się po prostej z prędkością $v_0 = 2$ m/s. Wilk powinien poruszać się po okręgu tak, aby odległość między nim a zajęcem nie zmieniała się. Do jakiego punktu na okręgu uda mu się w ten sposób dotrzeć? Współczynnik tarcia wilka o lód: $\mu = 0,05$. Wilk nie podskakuje.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2023

Przypominamy treść zadań:

758. Pozioma podstawa, na której leży klocek, drga harmonicznie z częstotliwością $f = 10$ Hz w kierunku tworzącym kąt $\alpha = \pi/4$ z pionem (rys. 2). Współczynnik tarcia klocka o podstawkę: $\mu = 0,5$. Jakie warunki musi spełniać amplituda drgań, aby klocek zaczął pełznąć po podstawce, ale nie podskakiwał?

759. Dwie jednakowe okrągłe, płaskie, metalowe płytki umieszczone tak, jak pokazano na rysunku 3, obracają się z prędkością kątową ω w przeciwnie strony w polu magnetycznym prostopadłym do powierzchni płytek. Indukcja pola magnetycznego wynosi B , a odległość między płytkami d . Osie płytek połączone przewodnikiem. Znaleźć napięcie między punktami płytek, które znajdują się naprzeciw siebie, a ich odległość od środka płytki wynosi r .

758. Załóżmy, że klocek porusza się razem z podstawką, zgodnie z prawem $\vec{r} = \vec{A} \sin \omega t$, gdzie $\omega = 2\pi f$, a wektor \vec{A} tworzy z pionem kąt α (rys. 4). Na klocek działa siła ciężkości $m\vec{g}$, siła reakcji \vec{N} ze strony podstawki i pozioma siła tarcia statycznego \vec{F} , której zwrot zależy od zwrotu wektora przyspieszenia \vec{a} . Równania ruchu klocka w kierunku poziomym i pionowym mają postać:

$$(1) \quad F_x = ma_x = -m \frac{A}{\sqrt{2}} \omega^2 \sin \omega t,$$

$$(2) \quad N - mg = ma_y = -m \frac{A}{\sqrt{2}} \omega^2 \sin \omega t.$$

Klocek nie podskakuje, gdy $N \geq 0$, czyli

$$(3) \quad A \leq g\sqrt{2}/\omega^2.$$

Warunek na brak poślizgu $|F_x| \leq \mu N$, zgodnie z (1) i (2), możemy zapisać:

$$(4) \quad \left| \frac{A}{\sqrt{2}} \omega^2 \sin \omega t \right| \leq \mu \left(g - \frac{A\omega^2 \sin \omega t}{\sqrt{2}} \right).$$

Prawa strona nierówności (3) dla $\sin \omega t < 0$ jest zawsze większa niż dla $\sin \omega t > 0$, dlatego minimalnej wartości amplitudy, przy której klocek zacznie się ślizgać, należy szukać dla $\sin \omega t > 0$. Znak równości odpowiada sytuacji, gdy tarcie statyczne osiąga wartość maksymalną i możemy to wykorzystać dla znalezienia chwili t_1 , w której rozpocznie się poślizg:

$$(5) \quad \sin \omega t_1 = \frac{\mu g \sqrt{2}}{(\mu + 1) A \omega^2}.$$

Równanie (5) ma rozwiązanie, gdy jego prawa strona jest mniejsza od jedynki, czyli

$$(6) \quad A > \frac{\mu g \sqrt{2}}{(\mu + 1) \omega^2}.$$

Uwzględniając (3) i (6), otrzymujemy: $1,2 \text{ mm} < A < 3,5 \text{ mm}$.

759. Na elektron o ładunku $-e$, który znajduje się w odległości r od środka płytki, działają: siła Lorentza $F_L = evB = q\omega rB$ i siła $F_E = eE$ ze strony pola elektrycznego, wytworzona dzięki nierównomiernemu rozkładowi ładunku na płytce. Wypadkowa tych sił nadaje ładunkowi przyspieszenie dośrodkowe: $m\vec{a} = \vec{F}_L + \vec{F}_E$, $a = \omega r$. Płytki obracają się w przeciwnie strony, więc siły Lorentza działające na ładunki znajdujące się w jednakowej odległości od środków dysków mają przeciwne zwroty:

$$eE + e\omega rB = m\omega^2 r \text{ dla prawego dysku,}$$

$$eE - e\omega rB = m\omega^2 r \text{ dla lewego dysku.}$$

E jest dodatnie, jeśli zwrot jest na zewnątrz płytki, zatem dla małych prędkości kątowych, gdy $m\omega r < erB$, siły elektryczne w płytkach mają zwroty przeciwne, w przeciwnym wypadku zgodne. Wartość bezwzględna E w obu przypadkach jest proporcjonalna do odległości r od środka płytki, a w środku płytki ma wartość zero.

Ponieważ osie płytek są połączone przewodnikiem i mają jednakowe potencjały, szukane napięcie między elementami płytek odległymi o r od środka wynosi $U = U_2 - U_1$, gdzie

$$U_{2,1} = \frac{1}{2} \left(\frac{m\omega^2}{e} \pm \omega B \right) r^2.$$

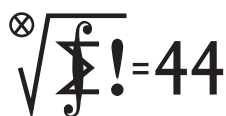
Ostatecznie $U = \omega Br^2$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 750 ($WT = 3,14$), 751 ($WT = 2,63$), 752 ($WT = 2,03$), 753 ($WT = 2,73$), 754 ($WT = 3,51$), 755 ($WT = 2$) z numerów 1, 2, 3/2023

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2 – 38,81
Jacek Konieczny	Poznań	36,51
Tomasz Wietecha	Tarnów	16 – 30,40
Konrad Kapcia	Poznań	2 – 22,55
Ryszard Baniewicz	Wrocław	1 – 21,54
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3 – 19,70

Po 751 zadaniach Paweł Perkowski po raz piąty przekroczył granicę 44 punktów.

Klub 44 M

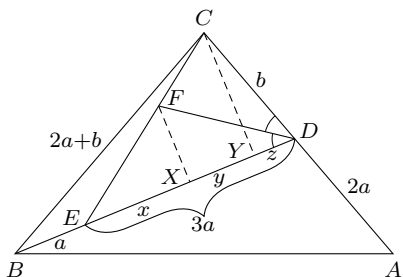


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 855 ($WT = 1,98$) i 856 ($WT = 2,20$) z numeru 2/2023

Norbert Porwol	Essen	43,61
Paweł Najman	Kraków	41,91
Radosław Kujawa	Wrocław	41,33
Marcin Kasperski	Warszawa	40,29
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	35,26
Michał Adamaszek	Kopenhaga	34,81
Janusz Fielt	Warszawa	33,39
Paweł Kubit	Kraków	33,33
Marek Spychała	Warszawa	30,13

861. Niech $BE = a$, $CD = b$; więc $AD = 2a$, $BD = 4a$, $BC = AC = 2a + b$. Dwusieczna kąta CDE przecina odcinek CE w punkcie, który nazwiemy F . Rzuty punktów F i C na prostą BD oznaczmy odpowiednio X i Y . Zadanie sprowadza się do wykazania, że $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FED$, czyli że $FD = FE$ – czyli że X jest środkiem odcinka DE .



Przyjmijmy dalsze oznaczenia długości odcinków: $EX = x$, $XY = y$ oraz $YD = z$, gdy (jak na rysunku) punkt Y leży na odcinku BC ; natomiast jeśli Y leży na przedłużeniu tego odcinka (tak się dzieje, gdy kąt ADB jest ostry), przez z oznaczmy liczbę ujemną $z = -DY$. W każdym przypadku zachodzi równość

$$(1) \quad x + y + z = 3a;$$

dalsze rachunki są niezależne od konfiguracji. Należy dowieść, że $EX = DX$, czyli że $x = y + z$.

Twierdzenie Pitagorasa w trójkątach CBY i CDY pociąga równość $CB^2 - BY^2 = CD^2 - DY^2$, którą przepisujemy jako

$$(2a + b)^2 - (4a - z)^2 = b^2 - z^2;$$

po rozwinięciu kwadratów i redukcji:

$$(2) \quad 2z = 3a - b.$$

Wstawiamy to do równości (1), pomnożonej stronami przez 2, i otrzymujemy

$$(3) \quad 2x + 2y = 3a + b.$$

Zadania z matematyki nr 865, 866 Redaguje Marcin E. KUCZMA

865. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach A i C są proste (ale nie przy wierzchołkach B i D). Punkt M jest środkiem przekątnej AC . Punkt E jest symetryczny do B względem M . Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i ADE są przystające.

866. Dane są dwie różne liczby pierwsze p, q takie, że $2^p - 1$ oraz $2^q - 1$ też są liczbami pierwszymi, a ponadto każda z liczb $2^{p-1} - 1$ oraz $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pq . Udowodnić, że jeżeli liczba całkowita dodatnia d jest dzielnikiem liczby $2^{pq} - 1$, to liczba $d - 1$ dzieli się przez pq .

Zadanie 866 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2023

Przypominamy treść zadań:

861. Trójkąt ABC jest równoramienny: $AC = BC$. Punkt D leży na boku AC , przy czym $2AD = BD$. Punkt E leży na odcinku BD , przy czym $2BE = AD$. Wykazać, że $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle CED$.

862. Dany jest graf skierowany o skończenie wielu wierzchołkach (każde dwa różne wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź zorientowana). Każda krawędź jest pokolorowana jednym z m kolorów; zaś z każdego wierzchołka wychodzi więcej niż m krawędzi. Udowodnić, że z każdego wierzchołka można poprowadzić nieskończenie wiele nieskończonych ścieżek takich, że dla każdej liczby naturalnej k krawędzie przechodzone w k -tym kroku na wszystkich tych ścieżkach mają jednakowy kolor. (Nieskończona ścieżka to nieskończony ciąg kolejno przyległych krawędzi – początkiem kolejnej jest koniec poprzedniej).

W trójkącie CDE odcinek DF jest dwusieczną kąta CDE , a zatem $CF : FE = CD : DE$, czyli

$$(4) \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{3a}.$$

Z połączenia zależności (3) i (4) widać, że

$$(5) \quad 2x = 3a, \quad 2y = b.$$

Teza $x = y + z$, do której wcześniej zostało sprowadzone zadanie, wynika natychmiast ze związków (2) i (5).

862. Przyjmijmy, że graf ma n wierzchołków. Wybierzmy dowolny wierzchołek v_0 . Ustalmy liczbę naturalną r i weźmy pod uwagę wszystkie możliwe ścieżki długości r wychodzące z tego wierzchołka. Ich liczba wynosi co najmniej $(m + 1)^r$, bo z każdego wierzchołka wychodzi co najmniej $m + 1$ krawędzi. Na każdej z tych ścieżek widzimy pewną sekwencję kolorów. Liczba możliwych sekwencji jest równa m^r . Każda z tych ścieżek kończy się w jednym z n wierzchołków grafu. Niech więc r będzie taką liczbą, że $(m + 1)^r > nm^r$ (dla zadanych wartości m, n taka liczba r niewątpliwie istnieje). Wówczas pewne dwie ścieżki o identycznej sekwencji kolorów docierają do tego samego wierzchołka; nazwijmy go v_1 (może być kilka wierzchołków o tej własności; wybieramy jeden z nich).

Oznaczmy te dwie ścieżki symbolami α, β (możemy przyjąć, że wierzchołki i krawędzie są zawczasu ponumerowane i ustalić dowolny algorytm, wybierający wierzchołek v_1 , ścieżkę α i ścieżkę β).

Powtarzamy schemat; rolę wierzchołka v_0 przejmuje wierzchołek v_1 . Znajdujemy dwie różne ścieżki długości r , o identycznej sekwencji kolorów, docierające do wspólnego wierzchołka v_2 ; znów jedną z nich oznaczamy symbolem α , drugą β (według przyjętego algorytmu). Iterując postępowanie (indukcja), dostajemy ciąg wierzchołków $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots$. W każdym z nich mamy do wyboru kontynuację typu α lub β ; i przy każdej kontynuacji otrzymamy ścieżki (długości $r, 2r, 3r, \dots$) o identycznej sekwencji kolorów. Możliwość wyboru na każdym kroku (α lub β) generuje nieprzeliczalnie wiele ścieżek (nieskończonej długości), o jakie chodzi.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Prosto z nieba: Dostawa z kosmosu

Przeciętnie zainteresowany tematem konsument nieczęsto zastanawia się nad tym, skąd biorą się różne pierwiastki chemiczne wchodzące w skład najróżniejszych wytworów naszej cywilizacji, które znajdują się w sklepach. Jak pisaliśmy w Δ_{18} , większość pierwiastków niezbędnych do powstania życia typu ziemskiego powstała we wnętrzach gwiazd w trakcie ich ewolucji. Pierwiastki cięższe natomiast są efektem różnego rodzaju kosmicznych katastrof towarzyszących końcowym momentom życia gwiazd: wybuchów supernowych albo zderzeń gwiazd neutronowych. Rozrzucone w przestrzeni kosmicznej pierwiastki trafiają w pole grawitacyjne powstającego kolejnego pokolenia gwiazd i – co ważne dla nas – stają się częścią układów planetarnych. Przykładowo, niezbędna w naszej cywilizacji stal powstaje z rudy żelaza, które to żelazo w kosmosie występuje powszechnie, ponieważ jest tworzone we wnętrzach masywnych gwiazd jako produkt końcowy fuzji jądrowej. Pozyskanie do użycia potrzebnych składników, czyli oddzielenie atomów jednych pierwiastków od drugich z materiału skorupy ziemskiej jest okupione ciężką pracą, często wciąż wykonywaną ręcznie (np. w kopalniach litu, kobaltu i niklu), oraz nieprzyjazne środowisku.

Dla przykładu produkcja stali (żelaza z dodatkiem manganu, niklu, chromu, węgla lub wanadu) jest jedną z najbardziej emisyjnych części przemysłu: odpowiada za 8% bezpośredniej emisji gazów cieplarnianych pochodzących z paliw kopalnych.

W żmudnej historii cywilizacji zdarzają się jednak czasem miłe niespodzianki. Jedną z nich są, paradoksalnie, meteoryty – w szczególności żelazne, będące świetnym źródłem wysoko oczyszczonego żelaza. Mimo że są dość rzadkie w porównaniu z kamiennymi, stanowią jedynie około 5,7% znanych przypadków, historycznie występują częściej w kolekcjach, co oczywiście wynika z faktu, że łatwiej je znaleźć niż kamienne, np. przy pomocy wykrywacza metali. Są też znacznie bardziej odporne na działanie czynników atmosferycznych. Dużo częściej są znajdowane w postaci dużych kawałków. Ponieważ są gęstsze od meteorytów kamiennych, meteoryty żelazne stanowią prawie 90% masy wszystkich znanych meteorytów. Spadające na Ziemię fragmenty są fragmentami rdzeni większych planetoid, które zostały roztrzaskane w wyniku zderzeń w Układzie Słonecznym. Żelazne jądro tworzy się dzięki ciepłu rozpadów promieniotwórczych izotopów aluminium ^{26}Al i żelaza ^{60}Fe : pierwotna materia protoplanetarna stopniowo topi się i oczyszcza przez stratyfikację pod wpływem grawitacji.

Meteoryty żelazne jako cenny zasób metalu były wykorzystywane do produkcji narzędzi i broni aż do początku epoki żelaza, gdy nauczono się pozyskiwać je wprost z rudy. Jednym z przykładów cywilizacji, która bez dostępu do pieców hutniczych korzystała z żelaza, i świetnie sobie radziła, są Inuici grenlandzcy, mówiący językiem kalaallisut: meteoryt Cape York w Grenlandii składał się z co najmniej ośmiu dużych fragmentów o łącznej masie 58 ton, z czego największy ważył 31 ton! Upadek nastąpił kilka tysięcy lat temu, a dostęp do żelaza umożliwił pokoleniom Inuitów produkcję m.in. harpunów w technologii kucia na zimno (odłupane kawałki żelaza obrabiano przy pomocy kamieni). Największy polski meteoryt żelazny znaleziono w okolicy wsi Morasko w pobliżu Poznania. Fragment o wadze 261 kg można zobaczyć w Muzeum Ziemi Wydziału Nauk Geograficznych i Geologicznych UAM w Poznaniu.

Michał BEJGER

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN,
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy

Niebo we wrześniu

We wrześniu Słońce kontynuuje szybką wędrówkę na południe, obniżając przez cały miesiąc wysokość górowania o kolejne 11° . Nasza Gwiazda Dzienna 23 dnia miesiąca przed godziną 9 przetnie równik niebieski, przechodząc na półkulę południową nieba, i tym samym zacznie się astronomiczna jesień. Ze względu jednak na refrakcję atmosferyczną faktyczne zrównanie dnia z nocą nastąpi u nas dwa dni później.

Podobnie jak w sierpniu, również we wrześniu Księżyc rozświetli początek i koniec miesiąca. Sierpień skończył

się pełnią Srebrnego Globu, a wrzesień zacznie się jego spotkaniem z Neptunem, przy fazie przekraczającej 95%. Wieczorem oba ciała Układu Słonecznego przedzieli 8° , a sama planeta oczywiście zginie w blasku Księżyca. 19 września Neptun znajdzie się w opozycji względem Słońca. W związku z tym najbliższe kilka tygodni to najlepszy okres jego widoczności w tym roku. Planeta świeci nad horyzontem przez całą noc, górując po północy na wysokości przekraczającej 35° , a jej blask wynosi $+7,8^m$. Do jej dostrzeżenia jest zatem

potrzebna przynajmniej lornetka. Stąd dobrze się składa, że Księżyc minie Neptuna na początku miesiąca (powróci doń również pod jego koniec), gdyż w czasie opozycji jego światło nie przeszkodzi w obserwacjach planety. Bliskość opozycji oznacza również, że Neptun porusza się ruchem wstecznym ze swoją maksymalną prędkością kątową i we wrześniu pokona w ten sposób prawie 50'. W tym roku dopisuje nam trochę szczęścia, ponieważ planeta znajduje się bardzo blisko gwiazdy 5. wielkości 20 Psc (stanowiącej odpowiednik Gwiazdy Polarnej w miniaturowym Małym Wozie na pograniczu gwiazdozbiorów Ryb, Wodnika i Wieloryba, na który składają się gwiazdy 5. i 6. wielkości 20, 24, 27, 29, 30 i 33 Psc), co znacznie ułatwia jej odnalezienie. 11 dnia miesiąca Neptun minie tę gwiazdę w odległości mniejszej od 4'.

Noc z 4 na 5 września Księżyc spędzi w gwiazdozbiore Barana, pomiędzy planetami Jowisz i Uran. Do tego czasu księżycowa tarcza zmniejszy swoją fazę do 70%. Srebrny Glob zajmie pozycję w odległości 5° od Jowisza i 3,5° od Urana. Obie planety również dążą do swoich opozycji i przejdą przez nie w listopadzie. Jowisz uczyni to 3 listopada, Uran zaś 10 dni później. Na początku września Jowisz zmieni kierunek ruchu na wsteczny i jest wtedy prawie nieruchomy względem gwiazd tła, Uran zmienił kierunek ruchu jeszcze w sierpniu. Obie planety kreślą swoje pętle w odległości mniej więcej 8° od siebie, przecinając południk lokalny po godzinie 4 na wysokości wyraźnie przekraczającej 50°. Przy czym Uran znajduje się na północny wschód od Jowisza. Widoczny bez kłopotu gołym okiem Jowisz we wrześniu zwiększy swoją jasność obserwowaną z $-2,6^m$ do $-2,8^m$ i średnicę kątową swojej tarczy z 44'' do 48''. Uran natomiast świeci z jasnością $+5,7^m$ i do jego obserwacji lepiej posłużyć się lornetką. 18 września Jowisz przejdzie mniej niż 5' od gwiazdy 5. wielkości σ Ari i może ona mylić się z księżycami galileuszowymi planety, zwłaszcza że cztery dni wcześniej podobną pozycję względem tej gwiazdy zajmie najdalszy z księżyców galileuszowych Kallisto.

Przez następne trzy noce Srebrny Glob odwiedzi gwiazdozbiór Byka, przechodząc przy tym przez ostatnią kwadrę 7 września tuż po północy polskiego czasu i zbliżając się do El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy tej konstelacji na odległość około 7°. Noc wcześniej Księżyc pokaże się nieco ponad 3° od Plejad, znanej gromady otwartej gwiazd.

W sierpniu zaczął się sezon zakryć Antaresa, czyli najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona, we wrześniu natomiast zaczyna się sezon zakryć wspomnianej właśnie El Nath. Obie gwiazdy są położone prawie po przeciwnych stronach nieba, ich rektascensja różni się o 11 godzin, przy prawie dokładnie przeciwnej deklinacji, stąd są one zakrywane w odstępach dwutygodniowych. Gwiazda El Nath jest jednak na tyle daleko od ekliptyki, że jej zakrycia zachodzą na południe od szerokości geograficznej około 39°N. Dlatego sezon zakryć tej gwiazdy trwa 3,5 roku, od września 2023 roku do kwietnia 2027. W tym czasie dojdzie do 49 zjawisk. Niestety Europa tutaj też ma pecha, gdyż przechodzący najbliżej Polski pas

zakrycia pokryje południową część Morza Śródziemnego 18 sierpnia 2025 roku, a jedyne nocne zakrycia ocierające się o północną Afrykę przejdą m.in. przez Egipt 24 września 2024 i 25 lutego 2026 roku oraz północno-zachodnią Afrykę 7 lutego 2025 roku. Pasy pozostałych zjawisk przebiegają daleko od Europy.

Przez te 3,5 roku będą tylko dwie możliwości, by następujące po sobie zakrycia Antaresa i El Nath zaobserwować, nie ruszając się z miejsca (przy czym w obu przypadkach to miejsce znajduje się w północno-zachodniej Australii). 27 sierpnia 2024 roku dojdzie do zakrycia El Nath, a 10 września 2024 roku do zakrycia Antaresa. I jeszcze jedna para, ale tym razem obszar wspólny jest bardzo mały: 20 marca 2025 – zakrycie Antaresa, 3 kwietnia 2025 – zakrycie El Nath.

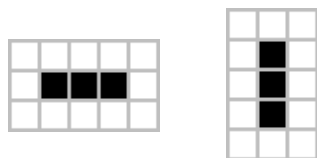
We wrześniu nachylenie ekliptyki do porannego widnokregu jest jeszcze lepsze niż w sierpniu, dlatego aż do prawie samego nowiu można obserwować tarczę Księżyca w fazie cienkiego sierpa ze światłem popielatym. 9 września Księżyc w fazie 29% przejdzie 3° od Meksuty, dobę później zaś, przy fazie zmniejszonej do 21% – 2° od Polluksa, obie gwiazdy w Bliźniętach. 11 września sierp Księżyca zwęzi się do 11% i zajmie pozycję w środku gwiazdozbioru Raka, 4° na północ od jasnej gromady otwartej gwiazd M44 i jednocześnie 13° od Wenus. Następnego ranka Księżyc w fazie 7% pokaże się 11° na prawo od Wenus, a jeszcze następnego, w fazie zaledwie 3%, wszędzie 3° na północ od Regulusa w Lwie. 15 września Księżyc przejdzie przez now i przeniesie się na niebo wieczorne.

W tym miesiącu bardzo dobrze widoczne są dwie pierwsze planety Układu Słonecznego. Merkury 22 września osiągnie swoją maksymalną elongację zachodnią, oddalając się od Słońca na 18°, i o świcie zdąży się wzniesć na wysokość 8°. Pozostanie jednak ozdobą porannego nieba do początku października, jaśniejąc z dnia na dzień, aż do $-1,1^m$. W tym czasie jego tarcza zmniejszy średnicę kątową od 8'' do 5'', z fazą dążącą do pełni. Odpowiednio planeta Wenus zakreśli pętlę na tle gwiazdozbioru Raka, zbliżając się 9 września na 48' do gromady otwartej gwiazd M67 i na 28' do gwiazdy Acubens (α Cnc) 5 dni później. Wenus świeci z jasnością $-4,5^m$, przy tarczy malejącej od 50'' do 32'' i fazie rosnącej od 11% do 35%.

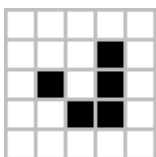
Wieczorem ekliptyka nachylona jest bardzo słabo, dodatkowo Księżyc zanurkuje głęboko pod nią, dlatego znacznie on nabiera wysokości dopiero pod koniec miesiąca. I kwadra Księżyca przypada 22 września, dzień wcześniej zajdzie on 5° na wschód od Antaresa, dzień później zaś – 3° od Nunki, jasnej gwiazdy Strzelca. 29 września Srebrny Glob przejdzie przez pełnię i do tego czasu warto odnotować spotkanie z Saturnem 26 dnia miesiąca. W związku z niedawną opozycją Saturn jest widoczny dobrze, choć jego jasność spadnie do $+0,6^m$, przy średnicy tarczy 19''. Planeta góruje około północy na wysokości ponad 25°. Ostatniego dnia miesiąca prawie pełna tarcza Srebrnego Globu zbliży się na 16° do Jowisza.

Ariel MAJCHER

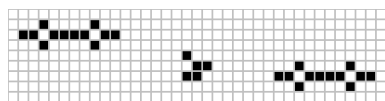
Okresowe życie



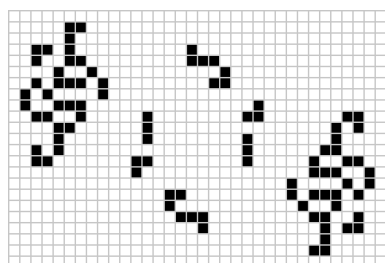
Rys. 1. Przykładowy oscylator o okresie 2. Układ przechodzi ze stanu po lewej do stanu po prawej i z powrotem



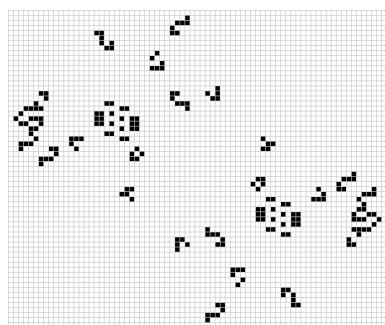
Rys. 2. Jeden ze stanów tzw. glidera, który porusza się po przekątnej. Po czterech generacjach układ wraca do pierwotnego kształtu, ale jest przesunięty o jedno pole w dół i jedno pole w prawo



Rys. 3. Oscylator nazwany *p60 glider shuttle*. Struktury po lewej i prawej stronie oscylują w miejscu, a widoczny w środku glider podróżuje tam i z powrotem, odbijając się od nich. Zwiększanie odległości między „lustrami” pozwala zwiększać okres oscylatora



Rys. 4. Cribbage



Rys. 5. 204P41

Gra w życie została stworzona w 1970 roku przez wybitnego matematyka Johna Conwaya (o którego licznych dokonaniach pisali Józef H. Przytycki i Witold Rosicki w Δ_{21}^6). Kto jeszcze nie słyszał o *Grze w życie* (*The game of life*), niech będzie uprzejmy zajrzeć do artykułu Karola Gryszi (Δ_{19}^9), gdzie podane są jej reguły. To jeden z pierwszych przykładów tzw. *automatów komórkowych*. Jej reguły są bardzo proste, ale struktury, które powstają w wyniku ich zastosowania, mogą być niezwykle skomplikowane. Mimo że gra ma już ponad 50 lat, wciąż istnieje i prężnie działa grono entuzjastów odkrywających nowe fakty na jej temat i tego, jakie struktury można w ramach reguł Conwaya uzyskać.

Zaraz po sformułowaniu reguł gry zauważono, że istnieją układy zwane *oscylatorami*, które po skończonej liczbie kroków czasowych wracają do stanu początkowego. Najmniejszą liczbę generacji prowadzącą do zamknięcia cyklu nazywa się *okresem* oscylatora. Najprostszy tego typu układ tworzą trzy komórki ułożone obok siebie w jednym rzędzie (rys. 1), wówczas okres jest równy 2.

Innym przykładem ciekawej struktury są tzw. *statki kosmiczne* (*spaceships*), czyli układy, które po skończonej liczbie kroków odtwarzają się w tym samym kształcie, ale przesunięte względem położenia początkowego. Czyli jest to konfiguracja, która przesuwa się po planszy w określonym kierunku, a jednocześnie jej kształt zmienia się cyklicznie. Najprostszym przykładem takiej struktury jest tzw. *glider* (rys. 2).

Jeżeli wiadomo, że istnieją układy okresowe, to naturalnie pojawia się pytanie o możliwe wartości okresów. Badacze gry w życie regularnie znajdowali kolejne konfiguracje powiększające zbiór znanych okresów. Istotną klasę konfiguracji stanowią w tym kontekście układy zbudowane na zasadzie czegoś w rodzaju luster odbijających między sobą opisane wcześniej glidery (lub inne statki kosmiczne). Układy te mają tę własność, że oddalając od siebie fragmenty stanowiące lustra, można uzyskiwać układy o coraz większym okresie. Na przykład wszystkie okresy postaci $60 + 120n$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, można otrzymać przy pomocy układu zwanego *p60 glider shuttle*, jednego z pierwszych tego typu układów, odkrytego w roku 1971 (rys. 3).

W kolejnych dekadach liczby, o których wiadomo było, że stanowią możliwe wartości okresów, wypełniały coraz gęściej zbiór liczb naturalnych. Dzięki odkryciu dokonanemu przez Davida Buckinghama (serie oscylatorów zwanych *Herschel loop*) od roku 1996 wiadomo było, że dla każdej liczby naturalnej większej od 60 istnieje układ o takim okresie. Po roku 1996 zostało więc tylko skończenie wiele liczb do sprawdzenia, w szczególności poniżej 61 było wówczas dokładnie 18 liczb, dla których nie znano układów o takich okresach.

Jednak liczba tych dziur malała coraz wolniej. W 2013 roku było ich już tylko pięć: 19, 23, 34, 38 i 41, ale ta piątka stawiała bardzo silny opór i kolejne lata nie przynosiły nowych odkryć. W roku 2019 załatano dziurę nr 23, ale kolejne trzy lata poszukiwań znowu nie przyniosły żadnego rezultatu.

Aż tu nagle w roku 2022 znaleziono konfiguracje o okresach 34 i 38. Następnie 14 lipca 2023 roku Mitchell Riley ogłosił znalezienie układu o okresie 19, który nazwał *Cribbage* (rys. 4). Tydzień później, 21 lipca, Nico Brown ogłosił odkrycie konfiguracji o okresie 41, która otrzymała wdzięczną nazwę *204P41* (rys. 5).

Po 53 latach od sformułowania reguł *Gry w życie* hipoteza o istnieniu konfiguracji o okresie będącym dowolną liczbą naturalną została wreszcie ostatecznie udowodniona. Niestety John Conway nie doczekał rozwiązania tej zagadki, zmarł w 2020 roku. Jednak gra w życie, którą stworzył, żyje nadal i jest przedmiotem badań, źródłem inspiracji, a także rozrywki dla kolejnych pokoleń badaczy i pasjonatów.

Czytelnik zainteresowany szczegółami, jak wyglądają wszystkie okresowe, latające (i realizujące różne inne zadania) konfiguracje, znajdzie je na stronie conwaylife.com prowadzonej przez ciągle żywą społeczność entuzjastów *Gry w życie*.

Szymon CHARZYŃSKI



Wektory – część 1

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Wektory są obiektami z pogranicza dwóch światów – algebraicznego i geometrycznego. Całą filozofię stosowania rachunku wektorowego do rozwiązywania zadań z geometrii można streścić w jednym zdaniu: pozwalają one zamienić problem geometryczny na problem czysto algebraiczny. Tutaj wymienimy kilka podstawowych własności wektorów, pomijając uzasadnienia – Czytelnik może uzupełnić je samodzielnie lub znaleźć w dobrym podręczniku do geometrii analitycznej.

Zacznijmy od geometrii. Niech $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Przez **wektor** \overrightarrow{AB} rozumiemy będziemy odcinek z wyróżnionym początkiem A i końcem B . Wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{A_2B_2}$ uznajemy za **równe**, jeżeli środki odcinków A_1B_2 oraz A_2B_1 pokrywają się. Wektory \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{BA} nazywamy **przeciwnymi**. Szczególnym przypadkiem wektora jest **wektor zerowy** $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.

Z punktu widzenia algebry wektorem na płaszczyźnie będziemy nazywać uporządkowaną parę liczb rzeczywistych: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_v, y_v)$. Jednej parze uporządkowanej (x_v, y_v) odpowiada nieskończenie wiele odcinków \overrightarrow{AB} i każde dwa z nich są równe w sensie opisanym w poprzednim akapicie. **Wektorem przeciwnym** do $\vec{v} = (x_v, y_v)$ jest $-\vec{v} = (-x_v, -y_v)$.

Dodawanie wektorów i mnożenie ich przez **skalar** (liczbę) łatwo się definiuje dla postaci algebraicznej:

$$(x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v, y_u + y_v), \quad a(x_v, y_v) = (ax_v, ay_v).$$

Dla wszystkich wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ oraz skalarów a, b zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{v} + \vec{u}, & (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), & (ab)\vec{v} &= a(b\vec{v}), \\ (a+b)\vec{v} &= a\vec{v} + b\vec{v}, & a(\vec{u} + \vec{v}) &= a\vec{u} + a\vec{v}. \end{aligned}$$

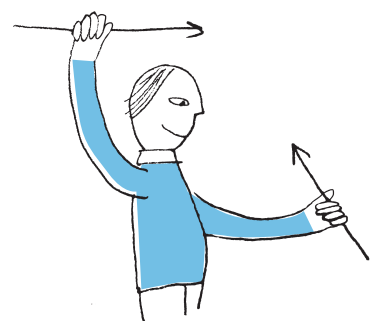
Pierwsza to przemienność, kolejne dwie to prawa łączności, a ostatnie dwie – prawa rozdzielności. Dzięki powyższym własnościom możemy wykonywać działania na wektorach praktycznie tak samo jak na liczbach.

Jeśli wybierzemy punkty A, B, C , dla których $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, to $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Nazywamy to **regulą trójkąta**. Wynika z niej w szczególności, że $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Jeżeli zatem mamy wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ spełniające równość $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, to możemy utworzyć z nich trójkąt (być może zdegenerowany), przesuając je równolegle. Stosując równość $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ oraz indukcję, dowodzimy, że $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ lub równoważnie $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$.

Długością wektora $\vec{v} = (x_v, y_v) = \overrightarrow{AB}$ nazywamy liczbę $|\vec{v}| = |AB| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$. Dla każdego rzeczywistego a zachodzi równość $|a\vec{v}| = |a| \cdot |\vec{v}|$. Dla $a > 0$ wektor $a\vec{v}$ ma ten sam zwrot co wektor \vec{v} , dla $a < 0$ – przeciwny. Na koniec: $0\vec{v} = \vec{0}$. Niezerowe wektory \vec{u} i \vec{v} są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skalar a , że $\vec{u} = a\vec{v}$. Zachodzi **nierówność trójkąta** $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$, a indukcyjnie można wykazać, że $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n| \leq |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + \dots + |\vec{v}_n|$.

Zadania

- Punkty A, B, C, D leżą na płaszczyźnie. Punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AB i CD . Udowodnić, że $2|MN| \leq |BC| + |DA|$.
- Udowodnić, że $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} < \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$ dla a, b, c będących długościami boków trójkąta.
- Czworokąty $APQB, BRSC$ i $CTUA$ są równoległobokami. Wykazać, że z odcinków QR, ST, UP można zbudować trójkąt (być może zdegenerowany).
- Pięć różnych punktów A, B, C, D, E leży na płaszczyźnie. Punkty K, L, M, N są środkami odcinków odpowiednio AB, BC, CD, DE . Punkty P, Q są środkami odcinków odpowiednio KM, LN . Udowodnić, że $PQ \parallel AE$.
- Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC , przy czym $2|AG| = |GB|$, $2|BE| = |EC|$ oraz $2|CF| = |FA|$. Punkty P i Q leżą na odcinkach odpowiednio EG i FG , przy czym $2|EP| = |PG|$ oraz $2|GQ| = |QF|$. Dowiedź, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.



Wskazówki do zadań

1. Podać stronami równości: $\frac{MN}{AN} = \frac{MA}{AD} + \frac{DN}{AN}$ i $\frac{MN}{BN} = \frac{MB}{BC} + \frac{CN}{BN}$.

2. Rozważmy trójkąt ABC o bokach $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ i ich środkach A_1, B_1, C_1 . Ze wzoru na długość mediany zachodzi równość $\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 2|AA_1|$ oraz dwie analogiczne. Wystarczy wykazać, że $2AA_1 + 2BB_1 + 2CC_1 = 0$.

3. Można zapisać $\vec{QR} = \vec{QB} + \vec{BR}$ i dwie równości analogiczne. Otrzymamy $\vec{QR} + \vec{ST} + \vec{UP} = 0$.

4. Niech $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$. Za pomocą tych wektorów można wyrazić $\vec{AK}, \vec{AL}, \vec{AM}, \vec{AN}$, a następnie \vec{AP} i \vec{AQ} .

5. Wygodnie przyjąć oznaczenia $\vec{u} = \overrightarrow{AG}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BE}$, $\vec{w} = \overrightarrow{CF}$, bo wtedy $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$. Możemy za ich pomocą wyrazić wektory $\vec{FG} = \vec{FA} + \vec{AG}$ i $\vec{GE} = \vec{GB} + \vec{BE}$, a następnie \vec{QP} wyrazić przez \vec{FG} i \vec{GE} .



VII DZIEŃ POPULARYZACJI MATEMATYKI



14 września 2023

9:30 - 16:30 | Koszykowa 75

Gmach Wydziału MiNI

Politechnika Warszawska

WYKŁADY | WARSZTATY | POKAZY | WYSTAWY | GRY | ZABAWY

dpm.mini.pw.edu.pl



W ramach Dni Popularyzacji odbędzie się też finał XLV Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki, organizowanego przez miesięcznik "Delta" oraz Polskie Towarzystwo Matematyczne