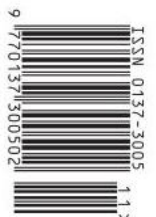


delta

ISSN 0137-3005
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFUCJONALYKA

NR 11 (594) 2023
CENA 8 ZŁ VAT 8%
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

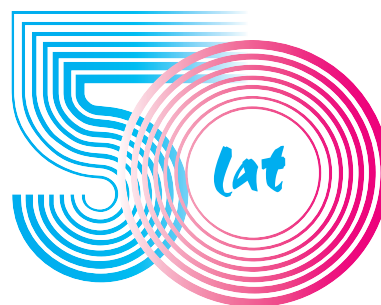
**Jak bronić
wszystkich
frontów
jednocześnie**
str. 10






Nakład: 2800 egz.



W następnym numerze
50 stron na 50 lat *Delta*



SPIS TREŚCI NUMERU 11 (594)

Uran, Neptun i Wulkan – trzy planety, z których jedna nigdy nie istniała, cz. III <i>Mateusz Dembny, Grzegorz Łukaszewicz, Igor Palusiński</i>	str. 1
 Zadania	str. 4
The Happy End Problem <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 5
Strategia w grze w kamyki <i>Dagna Czubla, Marcin Wierzbński</i>	str. 8
Jak bronić wszystkich frontów jednocześnie <i>Stanisław Kaźmierowski</i>	str. 10
Pseudopierwsze zoo <i>Mikołaj Rotkiewicz</i>	str. 13
Samotność i liczby <i>Miroslaw Lachowicz</i>	str. 17
Marek Abramowicz: <i>Między Bogiem a prawdą</i> – autobiografia „roztargnionego profesora”	str. 19
 Starość – tabu naszych dni <i>Magdalena Fikus</i>	str. 20
Prosto z nieba: Szykujcie się na wybuch supernowej!...	str. 21
Klub 44	str. 22
Niebo w listopadzie	str. 22
Aktualności Nagrody Nobla 2023	str. 24
 Kongruencje w akcji <i>Bartłomiej Bzdega</i>	str. 25

Miesięcznik Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wymolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numer archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 8 zł;
wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

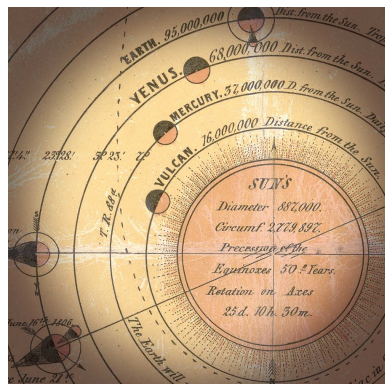
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Uran, Neptun i Wulkan – trzy planety, z których jedna nigdy nie istniała, cz. III

Mateusz DEMBNY*, Grzegorz ŁUKASZEWICZ*, Igor PALUSIŃSKI**

* Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

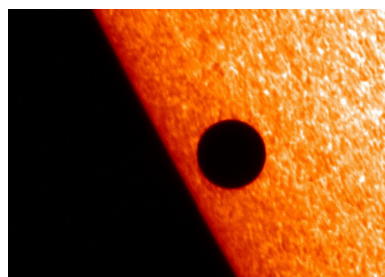
** Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Litografia przedstawiająca hipotetyczną planetę Wulkan okrążającą Słońce, autorzy: E. Jones & G.W. Newman, 1846



Budynek Obserwatorium, Cincinnati, Ohio
Autor: Analogue Kid z en.wikipedia, opublikowane na licencji CC BY 2.5



Obraz Merkurego podczas tranzytu przez tarczę Słońca, uchwycony przez teleskop SOT satelity Hinode, NASA, listopad 2006

Zakończeniem naszej trzyczęściowej serii artykułów jest bardzo pouczająca historia Wulkana. Wulkan to hipotetyczna planeta, która miała być odpowiedzialna za zaburzenie orbity Merkurego, podobnie jak Neptun ma wpływ na ruch Urana. Motywacją dla sformułowania hipotezy o Wulkanie był opisany w poprzedniej części sukces Urbaina Le Verriera, któremu udało się odnaleźć Neptuna w oparciu o badanie trajektorii Urana. Niewiele brakowało, by Francuz przeszedł do historii jako odkrywca dwóch planet Układu Słonecznego, gdyż problem z orbitą Merkurego pojawił się równoległe do zagadnienia ruchu Urana, a Le Verrier również i tutaj odegrał kluczową rolę.

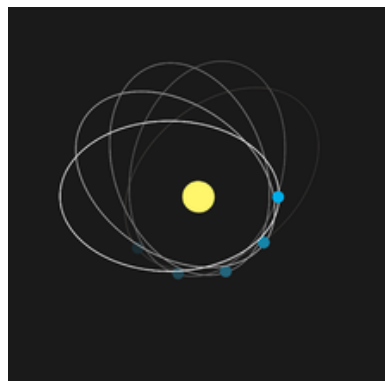
Problematyczna orbita Merkurego. W 1841 roku François Arago, dyrektor Obserwatorium Paryskiego, zasugerował, aby Le Verrier użył swoich niezwykłych zdolności do precyzyjnego obliczenia orbity Merkurego. Wówczas planeta ta była bardzo problematyczna, ponieważ jest najbliżej Słońca, a to utrudnia jej obserwację, gdyż przez większość czasu przyćmiewa ją słoneczny blask. Drugim powodem jest duży mimośród orbity tej planety, który dodatkowo zwiększał błędy obliczeniowe – spośród planet Układu Słonecznego Merkury ma największy mimośród (wynoszący $e = 0,2056$), czyli orbitę najbardziej odbiegającą od okręgu. Problem znalezienia trajektorii Merkurego spędzał sen z powiek astronomów od czasów Ptolemeusza. Le Verrier z przyjemnością zatem przystał na propozycję Arago. W swojej pracy wykorzystał ponad 400 obserwacji dokonanych w Obserwatorium Paryskim w latach 1801–1842. W roku 1843 opublikował raport zatytułowany *Détermination nouvelle de l'orbite de Mercure et de ses perturbations*, którego kontynuacją była wydana po dwóch latach książka *Theorie du Mouvement de Mercure*. Tam też uczony zamieścił przewidywania dotyczące możliwej trajektorii Merkurego.

Kamieniem probierczym dla wyników Le Verriera miał być tranzyt Merkurego przez tarczę Słońca w 1845 roku – częściowo widoczny we Francji, a całkowicie w Stanach Zjednoczonych. Tranzyt przez tarczę Słońca oznacza przejście jakiegoś ciała dokładnie pomiędzy Słońcem a Ziemią. Na przykład zaćmienie Słońca to nic innego jak tranzyt Księżyca przez tarczę Słońca. Le Verrier w 1845 roku wysłał swoje prognozy do Obserwatorium w Cincinnati, które wówczas było centrum pomiaru czasu dla Stanów Zjednoczonych. Obserwacji miał dokonać bardzo utalentowany astronom i przyszły generał amerykańskiej wojny domowej Ormsby M. Mitchel. Równoległego pomiaru dokonał William Lassell w obserwatorium w Liverpoolu (więcej o nim w artykule poświęconym Maxwellowi z Δ_{23}^1).

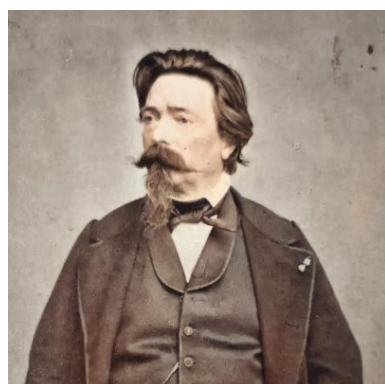
Merkury został zaobserwowany 16 sekund później, niż wskazywały na to wyliczenia Le Verriera. Mitchel był pod ogromnym wrażeniem tej dokładności, lecz Le Verrier był zawiedziony. Jego rachunki dopuszczały błąd rzędu co najwyżej dziesiątej części sekundy. To wystarczyło, żeby badacz stracił zaufanie do swoich wyników i wstrzymał publikację tablic dla Merkurego. Francuz porzucił badania nad Merkurym i przeniósł swoją uwagę na znalezienie orbit dwóch nowych komet, nie wiedząc, że problem, którego dotknął, wywoła niemałe zamieszanie. W tym samym czasie popularność zyskał Uran i zagadnienie nowej planety (opisane w poprzednich częściach artykułu). Problem ten wielce niepokoił Arago, który ponownie zwrócił się do Le Verriera.

Kolejna planeta Le Verriera? W roku 1859, po sukcesie związanym z odkryciem nowej planety – Neptuna, Le Verrier powraca do pracy nad Merkurym. Temat, z którym miał się tym razem zmierzyć, był nieco inny od tego, który mu został zlecony w 1841 roku. Był nim problem precesji orbity Merkurego. Aby wyjaśnić, na czym polega to zjawisko, przyjmijmy, że planety, zgodnie z prawem Keplera, poruszają się po elipsach. Zauważono, że orbita Merkurego nie jest zamknięta – wygląda tak, jakby elipsa, po której krąży Merkury, powoli obracała się wokół Słońca. W związku z tym m.in.

Precesją nazywa się również zjawisko zmiany osi obrotu obracającego się ciała, tutaj jednak używamy terminu precesja w innym sensie.



Precesja peryhelium Merkurego



Edmond Modeste Lescarbault



Domowe obserwatorium Edmonda Modesta Lescarbaulta w Orgères-en-Beauce, Eure-et-Loir (Francja), fotografia: L. Martin, 1863

położenie peryhelium (punktu orbity znajdującego się najbliższej Słońca) zmienia się w czasie. To właśnie ruch peryhelium nazywamy precesją. Le Verrier wyznaczył prędkość, z jaką obraca się peryhelium Merkurego: wynosi ona $565,0''$ na wiek ($1''$ to 1 sekunda łuku, czyli $\frac{1}{3600}^\circ$). Ponadto Francuz podjął się wyznaczenia wpływu, jaki na tę precesję mają inne planety Układu Słonecznego. Odpowiednie składowe tej prędkości to (w jednostkach $''$ /wiek):

Wenus	280,6
Jowisz	152,6
Ziemia	83,6
Pozostałe planety	5,2
Łączny wpływ planet:	522,0
Obserwowana precesja:	565,0
Różnica:	43,0

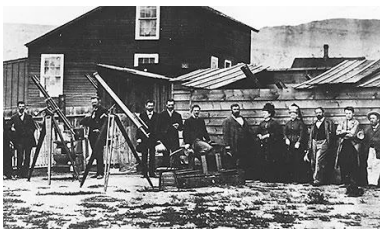
Le Verrier był zdumiony tym wynikiem. Gdzie podziały się brakujące $43,0''$ /wiek ruchu obrotowego peryhelium Merkurego? Doświadczenie z Neptunem podsunęło mu pomysł, że być może odpowiada za to nieznaną planetę, której nie uwzględniono. Z punktu widzenia Le Verriera rozsądnie było umieścić nową planetę między Słońcem a Merkurym. Jak już wspomnieliśmy, ze względu na bliskość Słońca Merkury jest trudny do obserwacji – można dojrzeć go jedynie tuż przed wschodem lub tuż po zachodzie Słońca. Gdyby nowa planeta leżała jeszcze bliżej Słońca niż Merkury, to jej obserwacja byłaby jeszcze trudniejsza, a to wyjaśniałoby, dlaczego nikt do tej pory nie zwrócił na nią uwagi. W roku 1859 Le Verrier opublikował przewidywania dotyczące hipotetycznej planety. Zgodnie z nimi miała ona mieć zbliżoną masę do Merkurego oraz o połowę mniejszą orbitę. Gdy astronomowie całej Europy poznali te parametry, rozpoczęły się łowy na nową planetę.

Wulkanomania. W grudniu 1859 roku Le Verrier otrzymał list od doktora Edmonda Modeste'a Lescarbaulta, francuskiego lekarza, który w wolnych chwilach amatorsko zajmował się astronomią. Ten pasjonat astronomii zbudował obserwatorium w swoim domu w miejscowości Orgères-en-Beauce, w środkowej Francji, oraz utrzymywał korespondencję z różnymi towarzystwami naukowymi. W liście do Le Verriera Lescarbault napisał, że zaobserwował jego planetę podczas tranzytu przez tarczę Słońca, 26 marca 1859 roku. Le Verrier rzucił wszystko i wyruszył na spotkanie z astronomem-amatorem. W jego gabinecie zażądał okazania wszystkich obserwacji nowej planety, przetestował użyty przez lekarza sprzęt oraz przeegzaminował Lescarbaulta z wykorzystanych technik pomiaru. Wypytał nawet sąsiadów, czy lekarz jest człowiekiem godnym zaufania. Po wnikliwym przebadaniu wszystkich okoliczności odkrywca Neptuna nie zauważył błędów w dostarczonych przez Lescarbaulta materiałach, osobiście powtórzył obliczenia, metody pomiaru czasu okazały się trafne, a użyty teleskop (teleskop refrakcyjny o średnicy 95 mm) sprawny. Ostatecznie Le Verrier opuścił gabinet Lescarbaulta przekonany o prawdziwości obserwacji, na podstawie których oszacował okres obiegu nowej planety wokół Słońca na 19 dni i 7 godzin (dla porównania: okres obiegu Merkurego to około 88 dni).

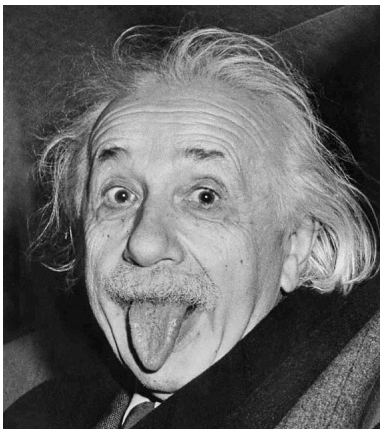
Drugiego stycznia 1860 roku Le Verrier ogłosił odkrycie kolejnej planety. Dla Francji było to wydarzenie bardziej satysfakcjonujące niż odkrycie Neptuna: francuski astronom zaobserwował to, co inny Francuz przewidział. W ciągu miesiąca nowa planeta otrzymała nazwę – Wulkan. „Wulkan” pochodzi od imienia rzymskiego boga ognia, stąd świetnie pasuje do planety znajdującej się tuż obok Słońca. W ciągu paru miesięcy od ogłoszenia najnowszego odkrycia Le Verrier otrzymał sporą ilość listów od innych astronomów. Twierdzili oni, że dokonali obserwacji plam słonecznych, które w istocie mogły być Wulkanem w czasie tranzytu. W kilku listach zawarte zostały nawet wcześniejsze, nieopublikowane obserwacje, z najstarszą sięgającą roku 1762. Mijały lata, a wielu astronomów pozostało sceptycznych wobec istnienia nowej planety. Podnosili oni argumenty, że obserwacje plam słonecznych są niewystarczające do uznania tych plam za planetę. Ponadto, jeśli Wulkan, zgodnie z obliczeniami, ma orbitę około 20-dniową, to liczba zaobserwowanych tranzytów powinna być rzędu setek, a nie dziesiątek, jak do tej pory. Ostatecznym sprawdzianem dla teorii o Wulkanie miało być całkowite zaćmienie Słońca 28 lipca 1878 roku.



Rzymski bóg ognia Wulkan, rzeźba autorstwa Bertela Thorvaldsena



James Watson (szósty od prawej) oraz Thomas Edison (drugi od prawej) oglądali zaćmienie w 1878 roku, niedaleko miasta Rawlins, Wyoming



Albert Einstein, fotografia zrobiona w jego 72 urodziny, 14 marca 1951 r., autor: Arthur Sasse

Orbitując tak blisko Słońca, Wulkan powinien znajdować się na niebie w zasięgu 8° od niego, a podczas zaćmienia gwiazdy i planety wokół Słońca stają się bardzo dobrze widoczne. Niestety Le Verrier nie dożył tego wydarzenia, zmarł 23 września 1877 roku. Środowisko astronomiczne podzieliło się na dwa obozy: sceptyków oraz szczerze wierzących w istnienie Wulkana. Wśród zagorzałych zwolenników teorii o Wulkanie był utalentowany kanadyjsko-amerykański astronom James Craig Watson, odkrywca 22 asteroid, który w ramach testamentu utworzył Medal Jamesa Craiga Watsona, nagrodę przyznaną do dziś, co trzy lata, przez Amerykańską Narodową Akademię Nauk za wkład w astronomię. W opozycji do Watsona był jego wieloletni rywal Christian H.F. Peters, niemiecko-amerykański astronom, uczeń Gaussa, pionier w badaniu i odkrywaniu planetoid, których łącznie odkrył 48. Watson przeprowadził ekspedycję na zachód, do stanu Wyoming, skąd planował obserwować zaćmienie. Uczestnicy wyprawy, w tym młody Thomas Edison, niecierpliwie wyczekiwali, aż Księżyc zajmie pozycję między Słońcem a Ziemią.

W końcu doszło do zaćmienia, a James Watson z radością ogłosił, że zobaczył gwiazdopodobny obiekt, którego nie było w jego tablicach. Stwierdził, że to Wulkan się ujawnił. Wyznaczył dla znalezionej planety okres obiegu, równy 38 dni, oraz dokonał prognoz przyszłych tranzytów. Obserwacja Watsona została wsparta przez Lewisa Swifta, znakomitego amerykańskiego astronoma, odkrywcę 13 komet oraz setek mgławic, z których większość później okazała się galaktykami. Swift również twierdził, że zobaczył Wulkana podczas tego samego zaćmienia.

Czytelnik, który zna Układ Słoneczny oraz tytuł tego artykułu, domyśla się, że jest to obraz niepełny. Mianowicie, obserwacje wymienione wyżej były jedynymi obserwacjami pozytywnymi. Reszta astronomów, obserwując zaćmienie w 1878 roku, nie zobaczyła nic szczególnego. W kwietniu 1879 roku Peters opublikował raport *Some critical remarks on so-called intra-mercurial planet observations*, w którym zganił Watsona za błędy w metodach badawczych oraz użycie nieprecyzyjnych przyrządów pomiarowych. Ponadto uznał, że Watson w istocie zobaczył pobliską gwiazdę θ -Cancri, a nie planetę przewidzianą przez Le Verriera. We wspomnianym raporcie Peters podobnie krytykuje Swifta, a nawet stwierdza, że obserwacje Swifta i Watsona się wykluczają. W ciągu następnego roku brak obserwacji tranzytów przewidzianych przez Watsona oraz brak innych dowodów skłoniły prawie wszystkich astronomów do odrzucenia hipotezy o istnieniu Wulkana. Skąd zatem brakujący składnik $43,0''/\text{wiek}$ odpowiedzialny za precesję orbity Merkurego?

Einstein – niszczyciel planet. Zgodnie z metodą naukową, gdy teoria przestaje odpowiadać obserwacjom, powinno się zmienić teorię. Jednak uczeni opisani w tej serii artykułów: Bessel, Arago, Le Verrier, Adams, Airy, Watson i Swift zrobili coś zupełnie przeciwnego, co można uznać za zatrważające. Będąc pod presją autorytetu Newtona, zaczęli szukać nowych faktów, aby podtrzymać niedokładną teorię. Le Verrier w przypadku Neptuna miał szczęście, jednak Wulkan ujawnił wadę takiego podejścia. Wystarczająco dużo odwagi miał Einstein, który w 1915 roku ogłosił ogólną teorię względności i postawił grawitację relatywistyczną w miejsce Newtonowskiej. Zgodnie z ogólną teorią względności przyciąganie grawitacyjne jest konsekwencją zakrzywienia geometrii czasoprzestrzeni przez masę.

Dodatek trzeci do przełomowego dzieła Einsteina o ogólnej teorii względności (zob. [Einstein]) nosi nazwę *The experimental confirmation of the general theory of relativity*. W tym załączniku Einstein oprócz krótkiego opisu swojego podejścia do teorii naukowej i jej związków z obserwacjami przedstawia rozwiązanie trzech problemów, które pojawiały się w fizyce doświadczalnej XIX i XX wieku. Jedno zagadnienie dotyczyło zaginania się trajektorii światła przy przejściu przez pole grawitacyjne. Dokładniej, promień światła przechodzący blisko ciała niebieskiego odchyła się w jego stronę. Teoria względności wytłumaczyła w ten sposób różnice w obserwacji położenia gwiazd na niebie w zależności od umiejscowienia Słońca. Zdjęcia wykonane w różnych okresach sugerowały różne położenia tych samych gwiazd. Innym punktem tego załącznika była próba wyjaśnienia zjawiska przesunięcia ku czerwieni (*redshift*)

polegającego na tym, że linie widmowe promieniowania elektromagnetycznego docierającego z niektórych gwiazd lub galaktyk są przesunięte w stronę mniejszych częstotliwości. Z ogólnej teorii względności wynika, że światło pokonujące przyciąganie grawitacyjne (pochodzące np. od źródła, które je wysyła) traci energię, czyli jego długość fali się zwiększa. Jest to tzw. grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni, dodatkowo przyczyną przesunięcia jest relatywistyczny efekt Dopplera oraz rozszerzanie się Wszechświata.

Wreszcie interesujący nas problem ruchu peryhelium Merkurego znalazł rozwiązanie w ogólnej teorii względności. Jeśli zamiast prawa Newtona użyjemy w obliczeniach teorii grawitacji Einsteina, odkrywamy, że ruch planet po orbitach wokół ciał niebieskich wykazuje pewne zaburzenie związane z zakrzywianiem się czasoprzestrzeni wokół tych ciał. Zaburzenie to nazywamy dziś precesją relatywistyczną i odpowiada ono za brakujący składnik prędkości ruchu peryhelium Merkurego.

Einstein wyznaczył, że precesja relatywistyczna, wyrażona w radianach na okres obiegu Merkurego, jest dana wzorem

$$24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)},$$

gdzie a to półosć wielka orbity, T – okres obiegu, c – prędkość światła, e – mimośród orbity. Podstawiając parametry znane dla Merkurego: $a = 5,791 \cdot 10^{10}$ m, $T = 7,601 \cdot 10^6$ s, $c = 2,997 \cdot 10^8$ m/s, $e = 0,2056$, oraz zmieniając jednostki na te użyte przez Le Verriera, otrzymamy, że precesja relatywistyczna dla Merkurego wynosi $42,9''$ /wiek. Ten wynik stanowi odpowiedź na pytanie zadane na końcu poprzedniego podrozdziału.

Tym sposobem Einstein położył kres teorii o istnieniu Wulkana i dokonała się historia trzech planet, z których jedna nigdy nie istniała. Historia, która potrzebowała blisko dwóch stuleci, aby znaleźć swój finał.

Bibliografia

- [Baum, Sheehan] Richard Baum, William Sheehan, *In Search of Planet Vulcan*, Springer, 1997.
 [Cornejo] Adrián G. Cornejo, *A Lagrangian Solution for the Precession of Mercury's Perihelion*, International Journal of Astronomy, 2014.
 [Einstein] Albert Einstein, *Relativity: The Special and General Theory*, New York, Henry Holt and Company, 1920.
 [Fellows] Paul Fellows, *The Hunt for Planet Vulcan*, YouTube, 2020, https://www.youtube.com/watch?v=UwLZC_guYKQ.
 [Lequeux] James Lequeux, *Le Verrier – Magnificent and Detestable Astronomer*, Springer, 2013.
 [Levenson] Thomas Levenson, *The Hunt for Vulcan*, Random House Trade, 2016.
 [Zepherus] Zepherus, *Vulcan | The Planet That Didn't Exist*, YouTube, 2021, <https://www.youtube.com/watch?v=iJyweEcpGc>.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1762. Pewną liczbę kostek domina o wymiarach 1×2 położono na szachownicy 100×100 tak, aby żadne dwie kostki się nie stykały bokami ani rogami. Pola: lewe dolne i prawe górne nie są pokryte przez domino. Czy zawsze można przejść z lewego dolnego pola do prawego górnego, wykonując ruchy tylko w górę i w prawo do pól sąsiadujących, omijając wszystkie kostki?
Rozwiązanie na str. 9

M 1763. Udowodnić, że z dowolnego czworokąta wypukłego \mathcal{F} można wyciąć trzy czworokąty podobne do \mathcal{F} w skali $\frac{1}{2}$.
Rozwiązanie na str. 15

M 1764. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność

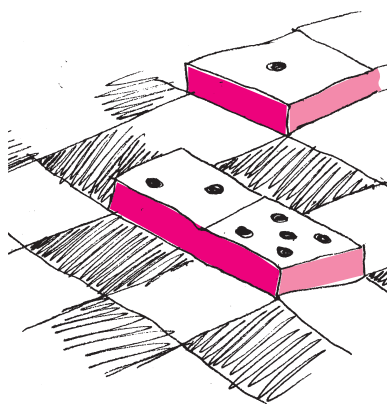
$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Rozwiązanie na str. 16

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1083. Zewnętrzna ściana budynku zbudowana jest z cegły i ma grubość $d_1 = 0,3$ m. Współczynnik przewodnictwa cieplnego cegły $\kappa_1 = 1,2$ W/(m·K). Przed zbliżającą się zimą ścianę postanowiono ocieplić poprzez dodanie zewnętrznej warstwy styropianu o grubości $d_2 = 0,01$ m i współczynnika przewodnictwa cieplnego $\kappa_2 = 0,033$ W/(m·K). Ile razy zmaleje utrata ciepła przez ścianę po jej ociepleniu? Przyjmij, że przed ociepleniem i po nim wewnętrzna powierzchnia ściany ma temperaturę T_2 , a zewnętrzna temperaturę $T_1 < T_2$.
Rozwiązanie na str. 8

F 1084. Wewnętrzny promień jednorodnej, grubej rury wynosi $r_0 = R$, a zewnętrzny $r_1 = 2R$. Wewnętrzna powierzchnia rury utrzymywana jest w temperaturze T_0 , a zewnętrzna w temperaturze $T_1 < T_0$. Ile wynosi temperatura w połowie grubości rury? Wskazówka: W każdym punkcie wewnątrz rury strumień ciepła jest równoległy do promienia rury i proporcjonalny do wartości pochodnej temperatury wzdłuż promienia obliczanej w tym punkcie.
Rozwiązanie na str. 6



The Happy End Problem

Jarosław GÓRNICKI*

*Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Spotkanie

KöMaL jest skrótem nazwy węgierskiego czasopisma „Közéskolai Matematikai és Fizikai Lapok” wspierającego młodzież zainteresowaną matematyką, fizyką i informatyką. Czasopismo z przerwami istnieje od 1894 roku. Wiosną 1929 roku grupa młodych entuzjastów konkursów *KöMaL* regularnie spotykała się u stóp pomnika Anonymusa w budapesztańskim parku, aby dyskutować o matematyce i rozwiązywać problemy ze zbioru G. Pólya i G. Szegő „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis” (Springer, Heidelberg, 1925). Początkowo grupę *Anonymus* tworzyli Pál Turán, Márta Wachsberger i Eszter (Esther) Klein. Wkrótce do grupy dołączyli György (George) Szekeres, Miklós Ság, a rok później Pál (Paul) Erdős, Tibor Grünwald (Gallai) i inni.

Współcześnie *Anonymus* może się kojarzyć z grupą aktywistów internetowych, ale stojący w Budapeszcie pomnik poświęcony jest XII-wiecznemu kronikarzowi węgierskiemu, znanemu też jako „Anonim Węgierski”.



Eszter Klein



György Szekeres

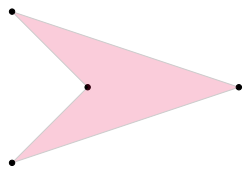


Pál Erdős

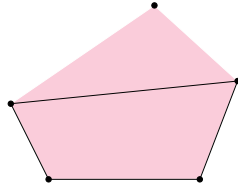
Zimą 1932/33 na spotkaniu grupy *Anonymus* Eszter Klein (studentka fizyki, która właśnie wróciła z semestralnego pobytu na Uniwersytecie w Getyndze) zaprezentowała następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych pięciu (lub więcej) punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, pewne cztery z nich tworzą wielokąt wypukły.*

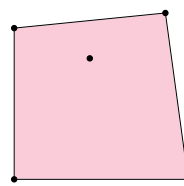
Zbiór na płaszczyźnie jest *wypukły*, gdy wraz z każdą parą swoich punktów zawiera odcinek je łączący. Wypukły jest każdy trójkąt, ale nie każdy czworokąt (rys. 1).



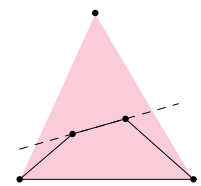
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

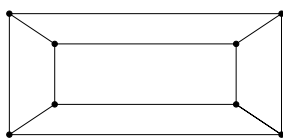
Uzasadnienie jest następujące. Jeżeli otoczka wypukła zbioru pięciu punktów ma cztery lub pięć wierzchołków (rys. 2, 3), to dowód jest skończony. W przeciwnym wypadku mamy trójkąt zawierający we wnętrzu dwa punkty. Prosta przez nie wyznaczona przecina dwa boki trójkąta (rys. 4), omijając wierzchołki. Punkty tworzące trzeci bok trójkąta z dwoma punktami wewnętrznymi tworzą czworokąt wypukły.

Klein postawiła również poniższe zadanie.

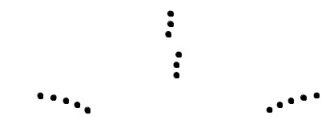
Problem 1. *Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $N = N(n)$ taką, że wśród dowolnych N punktów na płaszczyźnie, z których żadne 3 nie są współliniowe, pewne n z nich tworzy wielokąt wypukły.*

Częścią problemu jest ustalenie, że dla każdego n liczba $N(n)$ w ogóle istnieje – może dla pewnych n dowolnie wiele punktów na płaszczyźnie nie gwarantuje istnienia n -kąta wypukłego? Odpowiedź wcale nie jest oczywista.

Wkrótce po postawieniu zadania Endre Makai wykazał, że istnienie pięciokąta wypukłego gwarantuje 9 punktów, i podał kontrprzykład, że 8 punktów nie wystarczy (rys. 5), czyli uzasadnił równość $N(5) = 9$.



Rys. 5



Rys. 6

Istnienia sześciokąta wypukłego nie zapewnia 16 punktów (rys. 6), czyli $N(6) > 16$.

Na początku był... Ramsey

Erdős (student piszący doktorat u profesora Lipóta Fejéra) oraz Szekeres (absolwent inżynierii chemicznej), próbując rozszerzyć wynik na wielokąt wypukłe o większej liczbie boków, szybko zdali sobie sprawę, że prosta argumentacja nie wystarczy. Postawili wtedy następującą hipotezę, za udowodnienie której Erdős oferował nagrodę w wysokości 500 \$.

Hipoteza 1. $N(n) = 2^{n-2} + 1$ dla $n \geq 3$.

Po kilku tygodniach Szekeres udowodnił, że „absurdalnie duża liczba punktów” zawsze zapewnia istnienie n -kąta wypukłego – wykorzystał w tym celu *twierdzenie Ramseya*, które za moment przytoczymy. Niezależnie od Szekeres, Erdős również wykazał, że $N(n)$ istnieje i jest skończone dla każdego n . Zrobił to, nie odwołując się do rezultatu Ramseya, i uzyskał w ten sposób lepsze oszacowanie wartości $N(n)$ niż Szekeres (jednak rozumowanie Szekeres ma tę zaletę, że może zostać uogólnione na większą liczbę wymiarów). Udowodnili więc oni na dwa różne sposoby następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 (Erdős–Szekeres). *Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje liczba naturalna m_0 taka, że każdy zbiór $m \geq m_0$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawiera n punktów tworzących wielokąt wypukły.*

Oba dowody można odnaleźć we wspólnej pracy Erdősa i Szekeres [1], która dała początek kombinatorycznej (dyskretnej) geometrii.

Przytoczmy teraz zapowiadane wcześniej twierdzenie Ramseya i zobaczymy, jak można z niego wyprowadzić twierdzenie Erdősa–Szekeres.

Twierdzenie Ramseya (przypadek skończony). *Dla dowolnych liczb naturalnych r, n i k istnieje liczba naturalna $m_0 = R(r, n, k)$ taka, że jeśli $m \geq m_0$ i wszystkie r -elementowe podzbiory zbioru m -elementowego S_m zostały pokolorowane przy użyciu k kolorów, to S_m zawiera podzbiór n -elementowy S_n , którego wszystkie r -elementowe podzbiory są tego samego koloru.*

Liczby $R(r, n, k)$ nazywamy *liczbami Ramseya*. Wyznaczenie ich dokładnej (w sensie: minimalnej) wartości, nawet dla małych parametrów, jest bardzo trudnym problemem obliczeniowym. Więcej na ten temat można przeczytać w artykule T. Bartnickiego *Największa liczba na świecie*, Δ_{08}^3 . Możemy teraz przystąpić do pierwszego dowodu twierdzenia Erdősa–Szekeres.

Dowód 1 (Erdős–Szekeres). Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Zgodnie z twierdzeniem Ramseya w przypadku skończonym (ustalamy $r = 4$ i $k = 2$) istnieje liczba naturalna $m_0 = R(4, n, 2)$ taka, że jeśli $m \geq m_0$ i wszystkie 4-elementowe podzbiory zbioru m -elementowego S_m są pokolorowane dwoma kolorami, to zbiór S_m zawiera n -elementowy podzbiór S_n , którego wszystkie 4-elementowe podzbiory są tego samego koloru.

Niech S_m będzie zbiorem $m \geq m_0$ punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. 4-elementowy podzbiór zbioru S_m kolorujemy na czerwono, jeśli tworzy on czworokąt wypukły, a na niebiesko w przeciwnym przypadku. Wówczas zbiór S_m zawiera n -elementowy podzbiór S_n , którego wszystkie 4-elementowe podzbiory mają ten sam kolor. Ten kolor nie może być niebieski, bo w myśl obserwacji Klein każdy zbiór 5 lub więcej punktów zawiera 4-elementowy podzbiór czerwony! Zatem wszystkie 4-elementowe podzbiory zbioru S_n są koloru czerwonego.

Taki zbiór n punktów, w którym każde cztery punkty tworzą czworokąt wypukły, musi być n -kątem wypukłym. Istotnie, gdyby jeden punkt znajdował się we wnętrzu otoczki wypukłej pozostałych $(n - 1)$ punktów, to należałoby do wnętrza pewnego trójkąta o wierzchołkach wybranych ze zbioru $(n - 1)$ punktów, i te 4 punkty tworzyłyby czworokąt niewypukły. Sprzeczność. \square

Twierdzenie Ramseya można także sformułować w wersji nieskończonej (w obu przypadkach zapewnia ono, że w każdym dostatecznie dużym zbiorze pojawi się jakaś regularność).

Twierdzenie Ramseya (przypadek nieskończony). *Dla dowolnych liczb naturalnych r i k , jeśli wszystkie r -elementowe podzbiory nieskończonego zbioru S zostały pokolorowane przy użyciu k kolorów, to S zawiera nieskończony podzbiór S_∞ , którego wszystkie r -elementowe podzbiory są tego samego koloru.*



Rozwiązanie zadania F 1084.

Wewnątrz powłoki rury przez powierzchnię o promieniu r , $R \leq r \leq 2R$, na odcinku o długości H przepływa ten sam strumień ciepła. Dla rury z materiału o współczynniku przewodnictwa cieplnego κ mamy więc:

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi r H \kappa \frac{dT}{dr} = \alpha,$$

przy czym α ma wartość stałą, niezależną od r . Otrzymujemy równanie pozwalające znaleźć rozkład temperatury jako funkcji r :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\alpha}{2\pi H r},$$

z warunkami: $T(R) = T_0$ i $T(2R) = T_1$. Jak łatwo sprawdzić, rozwiązaniem tego równania jest:

$$T(r) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{\ln(r/R)}{\ln(2R/R)}.$$

Połowa grubości rury odpowiada $r = 3R/2$. Dla tej wartości r mamy:

$$T(3R/2) = T_0 + (T_1 - T_0) \ln(3/2) / \ln(2) \approx T_0 + 0,585 \cdot (T_1 - T_0).$$



Powyższy dowód daje ograniczenie górne $N(n) \leq R(4, n, 2)$. Michael Tarsi zaobserwował w 2006 roku, że można go poprawić, otrzymując ograniczenie $N(n) \leq R(3, n, 2)$.

Dowód 2 (Michael Tarsi). Niech S_m będzie zbiorem $m \geq m_0 = R(3, n, 2)$ punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Numerujemy te punkty liczbami $1, 2, \dots, m$. Zbiór $\{x, y, z\}$, gdzie $x < y < z$, kolorujemy na czerwono, jeśli poruszamy się od x przez y do z zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a na niebiesko w przeciwnym przypadku. Zgodnie z określeniem m_0 zbiór S_m musi zawierać n -elementowy podzbiór S_n , w którym wszystkie trójelementowe podzbiory mają ten sam kolor, tj. mają tę samą „orientację”, a to oznacza, że punkty zbioru S_n tworzą n -kąąt wypukły! \square

W kolejnym rozumowaniu Erdős i Szekeres bez odwołania do rezultatu Ramsey’a uzyskali lepsze oszacowanie wartości $N(n)$. To uzasadnienie jest odrobinę zbyt obszerne, by zmieścić się na łamach tego artykułu, warto jednak przedstawić jeden z kluczowych lematów, który się w tej argumentacji pojawia. Dotyczy on tematu pozornie niezwiązanego, mianowicie: monotonicznych podciągu zadanego ciągu.

Lemat jest optymalny w tym sensie, że dla każdej pary liczb naturalnych m i n istnieje ciąg $m \cdot n$ różnych liczb rzeczywistych, w którym każdy podciąg rosnący ma długość co najwyżej m i każdy podciąg malejący ma długość co najwyżej n :

$$\begin{pmatrix} n, & n-1, & \dots, & 1, \\ 2n, & 2n-1, & \dots, & n+1, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ mn, & mn-1, & \dots, & (m-1)n+1 \end{pmatrix}.$$

Lemat (Erdős–Szekeres). *Jeżeli m, n i s są liczbami naturalnymi takimi, że $s > m \cdot n$ i $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ jest ciągiem różnych liczb rzeczywistych, to zawiera on podciąg rosnący o długości większej niż m lub podciąg malejący o długości większej niż n .*

Dowód lematu. Dla każdego j niech m_j (odpowiednio, n_j) oznacza długość najdłuższego podciągu rosnącego (odpowiednio, malejącego) ciągu $\{a_i\}$, który rozpoczyna wyraz a_j . Gdy $j < k$, to pary (m_j, n_j) i (m_k, n_k) są różne, bo jeśli $a_j < a_k$, to $n_j > n_k$, a jeśli $a_j > a_k$, to $m_j > m_k$. Jeżeli dla wszystkich $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, $m_j \leq m$ i $n_j \leq n$, to par (m_j, n_j) jest nie więcej niż $m \cdot n$, a to jest sprzeczne z założeniem $s > m \cdot n$.

Wniosek. *Jeśli $s > n^2$, to zbiór $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ różnych liczb rzeczywistych zawiera podciąg monotoniczny o długości $n + 1$.*

Czytając artykuł A. Pelczyńskiego *Trzy rozwiązania zadania o 101 liczbach*, Δ_{74}^5 , widzimy, dlaczego P. Erdős nie miałby problemu z rozwiązaniem zadania z XIII Moskiewskiej Olimpiady Matematycznej (1950 r.): „Liczby od 1 do 101 wypisano w dowolnym porządku. Udowodnić, że można z tych 101 liczb wykreślić 90 tak, aby pozostałych 11 utworzyło ciąg monotoniczny, tzn. albo ciąg malejący, albo ciąg rosnący”. W czasie olimpiady udało się to tylko jednemu uczestnikowi.

Zakończenie?

Korzystając z własności istnienia ciągów monotonicznych (szczegóły można znaleźć w pracy [1]), Erdős i Szekeres wykazali, że

$$N(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1 \approx \frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

Ponadto w 1961 roku w pracy [2] pokazali, że dla każdego $n \geq 3$ istnieje konfiguracja 2^{n-2} trójkami niewspółliniowych punktów, w której nie występuje n -kąąt wypukły, czyli $N(n) \geq 2^{n-2} + 1$. W 2006 roku (już po śmierci George’a) ukazała się praca Szekeres’a i Lindsaya Petersa [4] zawierająca wspomagany komputerowo dowód równości $N(6) = 17$, a w 2017 roku Andrew Suk [3] poprawił oszacowanie górne liczby $N(n)$ do $2^{n+o(n)}$. Hipoteza Erdős’a i Szekeres’a ciągle czeka na rozstrzygnięcie.

Pozostaje wyjaśnić tytuł artykułu. Esther Klein i George Szekeres pobrali się 13 czerwca 1937 roku, co skłoniło Erdős’a do nazwania problemu trójki przyjaciół „The Happy End Problem”. Po wybuchu wojny państwo Szekeres wyemigrowali do Australii. Zmarli 28 sierpnia 2005 roku w Adelaide w odstępnie godzinę.

Bibliografia:

- [1] P. Erdős, G. Szekeres, *A combinatorical problem in geometry*, Ann. Univ. Sci. Budapest 2 (1935), 463–470.
- [2] P. Erdős, G. Szekeres, *On some extremum problem in elementary geometry*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sek. Mat. 3-4 (1961), 53–62.
- [3] A. Suk, *On the Erdős–Szekeres convex polygon problem*, J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 1047–1053.
- [4] G. Szekeres, L. Peters, *Computer solution to the 17-point Erdős–Szekeres problem*, ANZIAM J. 48, no 2 (2006), 151–164.

Strategia w grze w kamyki

Dagna CZUBLA*, Marcin WIERZBIŃSKI**

* Uczennica, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie
 ** Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania F 1083.

Przed ociepleniem przez jednorodną, płaską warstwę ciała stałego (ściany) o powierzchni A , której powierzchnie zewnętrzne utrzymywane są w różnych (ale stałych w czasie) temperaturach $T_1 < T_2$, przepływa ciepło o mocy:

$$\frac{dQ}{dt} = P_1 = \frac{\kappa_1}{d_1} (T_2 - T_1)A.$$

Po ociepleniu ściana składa się z dwóch jednorodnych warstw: styropianu o grubości d_2 i cegły o grubości d_1 . Na granicy pomiędzy styropianem i cegłą ustali się temperatura T_3 , $T_1 < T_3 < T_2$. Przez każdą z warstw (styropianu i cegły) przepływa taka sama ilość ciepła, ale teraz o mocy $P_2 \neq P_1$. Z warunku równości mocy przepływających przez każdą z warstw ściany otrzymujemy:

$$P_2 = \frac{\kappa_1}{d_1} (T_2 - T_3)A = \frac{\kappa_2}{d_2} (T_3 - T_1)A,$$

który pozwala wyznaczyć wartość

$$T_3 = \frac{\kappa_1 T_2 / d_1 + \kappa_2 T_1 / d_2}{\kappa_1 / d_1 + \kappa_2 / d_2},$$

a następnie

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\kappa_1 \kappa_2 (T_2 - T_1) / (d_1 d_2)}{\kappa_1 / d_1 + \kappa_2 / d_2} = \\ &= \frac{\kappa_2 / d_2}{\kappa_1 / d_1 + \kappa_2 / d_2} P_1. \end{aligned}$$

Dla podanych danych $P_2 \approx 0,45P_1$, czyli strata ciepła jest ponad 2,2 raza mniejsza niż przed ociepleniem. Jeśli przyjąć, że ściana ma dosyć typowe wymiary: 2,7 m na 4 m, a różnica temperatur $T_2 - T_1 = 20$ K, to $P_1 \approx 864$ W, a $P_2 \approx 391$ W.

Tabela dla początkowych liczb kamyków z określeniem, czy Ada ma strategię pozwalającą jej wygrać z Bajtkiem.

n	Strategia wygrywająca dla Ady?
1	TAK
2	NIE
3	TAK
4	TAK
5	TAK
6	TAK
7	NIE
8	TAK

Niektóre problemy informatyczne można rozwiązać prostymi algorytmami, których poprawność (tzn. udzielanie odpowiedzi zgodnie z oczekiwaniami) jest oczywista. Istnieją też problemy, do których rozwiązania potrzebne są bardzo skomplikowane algorytmy, a znane dowody ich poprawności są wyjątkowo złożone i zagmatwane. W tym artykule będziemy się zajmować problemem, który może być rozwiązany przez bardzo prosty algorytm, ale udowodnienie jego poprawności wymaga już pewnego wysiłku.

Na tegorocznej próbnej maturze z informatyki pojawiło się ciekawe zadanie o nazwie *Gra w kamyki*. Należało podać efektywny algorytm obliczający, który gracz ma strategię wygrywającą. Okazuje się, że zadanie to można rozwiązać bardzo prostym algorytmem, ale formalny dowód jego poprawności wymaga więcej wysiłku. W czasie egzaminu samo podanie algorytmu wystarczało do uzyskania maksymalnej liczby punktów, a dowód poprawności nie był wymagany. W tym artykule przedstawimy wzorcowy algorytm oraz uzasadnimy jego poprawność.

Gra w kamyki

Ada i Bajtek postanowili zagrać w następującą grę. Na stole przed sobą rozłożyli n kamyków. Zasady gry są proste. Gracze wykonują ruchy na przemian, rozpoczyna Ada. W swoim ruchu gracz może zabrać ze stołu 1, 3 lub 4 kamyki. Gracz, który weźmie ostatni kamyk, wygrywa.

Przykładowy przebieg rozgrywki dla $n = 5$ kamyków:

Ada bierze jeden kamyk ze stołu, następnie Bajtek bierze cztery kamyki i wygrywa grę. Ada może też zacząć od zabrania trzech kamyków, następnie Bajtek może jedynie zabrać jeden kamyk (ponieważ na stole zostały dwa), a na końcu Ada zabiera ostatni kamyk i wygrywa grę.

Ada zastanawia się, dla jakich n ma strategię wygrywającą. To znaczy chciałaby wiedzieć, czy niezależnie od ruchów Bajtka będzie w stanie z nim wygrać, jeśli będzie mądrze wybierać swoje posunięcia. Okazuje się, że ten problem rozwiązuje bardzo prosty algorytm podany poniżej.

Algorytm 1. Sprawdzenie strategii wygrywającej dla Ady

```

1: procedure CZYADAMASTRATEGIĘWYGRYWAJĄCĄ( $n$ )
2:   if  $n \bmod 7 = 0$  or  $n \bmod 7 = 2$  then
3:     return „NIE”
4:   else
5:     return „TAK”
    
```

Algorytm 1 sprawdza, czy reszta z dzielenia liczby n przez 7 jest równa 0 lub 2. Jeśli tak, to zwraca „NIE” (czyli Ada nie ma strategii wygrywającej). W przeciwnym przypadku zwraca „TAK” (czyli Ada ma strategię wygrywającą). Uzasadnimy teraz formalnie poprawność tego algorytmu.

Zastanówmy się, co dzieje się dla małych wartości n . Jeżeli n jest równe 1, 3 lub 4, to Ada może wziąć wszystkie kamyki ze stołu i wygrać – ma strategię wygrywającą. Jeśli $n = 2$, Ada musi wziąć 1 kamyk, zostawiając na stole 1 kamyk, który Bajtek musi wziąć, tym samym wygrywając; Ada nie ma w tym przypadku strategii wygrywającej. Jeśli $n = 5$ lub $n = 6$, to Ada może wziąć odpowiednio 3 lub 4 kamyki, zostawiając Bajtkowi 2 kamyki, Bajtek więc musi przegrać – Ada ma strategię wygrywającą w obu przypadkach. Jeżeli $n = 7$, Ada po swoim ruchu zostawi Bajtkowi 3, 4 lub 6 kamyków na stole, Bajtek ma więc strategię wygrywającą. Stąd wynika, że dla $n = 7$ Ada nie ma strategii wygrywającej.



Rozwiązanie zadania M 1762.

Odpowiedź: tak.

Niech pola lewe dolne i prawe górne leżą na głównej przekątnej szachownicy i mają „współrzędne” $(1, 1)$ i $(100, 100)$.

Korzystając z zasady indukcji, udowodnimy, że można dostać się do dowolnego wolnego pola na tej przekątnej.

Rzeczywiście, założmy, że możemy przejść do pola (n, n) . Jeżeli pole $(n + 1, n + 1)$ jest wolne, to co najmniej jedno z pól $(n, n + 1)$ i $(n + 1, n)$ nie jest zajęte i można przez nie przejść do pola $(n + 1, n + 1)$.

Jeżeli natomiast pole $(n + 1, n + 1)$ jest zajęte, to dokładnie jeden z jego sąsiadów jest zajęty, więc jedna z dwóch ścieżek od (n, n) do $(n + 2, n + 2)$ jest możliwa do przejścia.

Pytanie: czy dla wymiaru planszy 100×101 teza również zachodzi?

Ogólnie, jeśli Ada ma strategię wygrywającą dla $n - 1, n - 3$ oraz $n - 4$ kamyków na początku, to nie ma strategii wygrywającej dla n kamyków, gdyż każdy jej ruch doprowadzi do sytuacji, w której Bajtek ma strategię wygrywającą.

Formalny dowód poprawności algorytmu będzie wykorzystywał zasadę indukcji matematycznej, o której można przeczytać na przykład w Kąćniku Początkującego Olimpijczyka w Δ_{19}^7 . Mianowicie: wiemy już, że dla $n \leq 7$ Ada nie ma strategii wygrywającej, jeśli n daje resztę 0 lub 2 z dzielenia przez 7, zaś w przeciwnym przypadku ma taką strategię. Pokażemy teraz, że jeśli ta własność zachodzi dla wszystkich $n \leq 7k$ dla pewnej liczby naturalnej k , to zachodzi również dla wszystkich n ze zbioru $\{7k + 1, 7k + 2, \dots, 7k + 7\}$.

Dla $n = 7k + 1, n = 7k + 3$ oraz $7k + 4$ Ada może wziąć ze stołu odpowiednio 1, 3 lub 4 kamyki. W konsekwencji na stole zostanie $7k$ kamyków i, jak wynika z naszego założenia, oznacza to przegraną Bajtka.

Jeśli $n = 7k + 2$, to po ruchu Ady na stole będzie $7k + 1, 7(k - 1) + 6$ albo $7(k - 1) + 5$ kamyków. Wiemy jednak z naszego założenia, że dla każdej z tych liczb Ada ma strategię wygrywającą, czyli nie ma strategii wygrywającej dla $n = 7k + 2$.

Teraz jeśli $n = 7k + 5$ lub $n = 7k + 6$, to Ada może wziąć odpowiednio 3 lub 4 kamyki, po czym na stole zostaną $7k + 2$ kamyki, więc, jak pokazaliśmy przed chwilą, Bajtek będzie na straconej pozycji.

W końcu jeśli na początku mamy $n = 7k + 7$, to po ruchu Ady na stole będzie $7k + 3, 7k + 4$ albo $7k + 6$ kamyków. Udowodniliśmy już, że w każdej z tych sytuacji Ada ma strategię wygrywającą, więc dla wyjściowego n Ada nie ma strategii wygrywającej. Zasada indukcji matematycznej kończy dowód poprawności algorytmu.

Co dalej?

Czy to, że gracze mogli zabrać 1, 3 lub 4 kamyki, miało kluczowe znaczenie dla istnienia algorytmu o prostej strukturze stwierdzającego, kto ma strategię wygrywającą? Jak zmieniłaby się odpowiedź, gdyby gracze mogli zabierać na przykład 1, 4, 5 lub 10 kamyków? Aby odpowiedzieć na te pytania, rozważmy ogólniejszy przypadek – każdy z dwojga graczy w swoim ruchu może zabrać ze stołu k_1, k_2, \dots, k_{l-1} lub k_l kamyków (przy czym liczby te są parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi ustawionymi w kolejności malejącej). Tak jak wcześniej, przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.

Rozważmy ciąg $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, zdefiniowany następująco: a_n jest równe 1, jeśli Ada ma strategię wygrywającą przy n kamykach znajdujących się początkowo na stole oraz 0 w przeciwnym przypadku. Zauważmy, że dowolnych k_1 kolejnych wyrazów ciągu (a_i) determinuje wszystkie przyszłe jego wyrazy. Istotnie, jeśli wiemy, czy Ada ma strategię wygrywającą dla $n - k_1, n - k_2, \dots, n - k_l$, to możemy stwierdzić, czy ma również strategię wygrywającą dla n .

Skoro różnych możliwych ciągów binarnych o długości k_1 jest 2^{k_1} , to od pewnej pozycji $p \leq 2^{k_1}$ wyrazy ciągu a_n zaczną się cyklicznie powtarzać, z pewnym okresem $q \leq 2^{k_1}$.

Stąd wynika, że nasz problem da się rozwiązać algorytmem o bardzo prostej strukturze, który unika jakichkolwiek pętli, a wykonuje maksymalnie jedno

dzielenie modulo i pewną liczbę porównań. Taki algorytm powinien działać następująco:

- jeśli $n \leq p$, to algorytm ma zakodowaną odpowiedź dla n ;
- jeśli $n > p$, to algorytm sprawdza resztę z dzielenia n przez q i na tej podstawie stwierdza, czy Ada ma strategię wygrywającą.

Zauważmy, że nie pokazaliśmy w związku z tym, jak konkretnie napisać algorytm dla ustalonych wartości k_1, k_2, \dots, k_l – wykazaliśmy tylko, że algorytm o prostej strukturze istnieje.

Czytelnik znający pojęcie deterministycznego automatu skończonego i języka regularnego (można o nich przeczytać w artykułach Wojciecha Czerwińskiego w Δ_{18}^9 i Marii Donten-Bury w Δ_{10}^{11}) może zastanowić się nad następującym problemem: czy dla ustalonych k_1, k_2, \dots, k_l i jednoliterowego alfabetu $\{a\}$ język $L = \{a^n : \text{Ada ma strategię wygrywającą dla } n \text{ kamyków}\}$ jest regularny? Czy to, że języki regularne są rozpoznawane przez deterministyczne automaty skończone, pozwala jakoś inaczej wywnioskować, że nasz problem można rozwiązać algorytmem o prostej strukturze?

Jak widać, nawet zadania maturalne potrafią prowadzić ku zagadnieniom o głębokim charakterze teoretycznym. To pokazuje, jak bogaty i zaskakujący może być świat nauki, który kryje się za pozornie prostymi problemami.

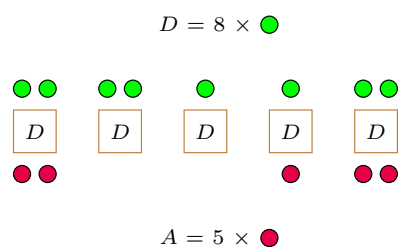
Jak bronić wszystkich frontów jednocześnie

*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

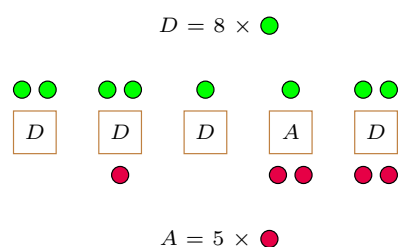
Stanisław KAŻMIEROWSKI*

Napięcia graniczne pomiędzy Alandią i Delandią wznoszą się od lat. Dwóch generałów, Acki i Decki, szykują swoje kraje do konfliktu zbrojnego. Delandzka doktryna wojenna jest ściśle (D)efensywna – po poprzedniej wojnie z Alandią, w której obie strony poniosły bardzo znaczące straty, sztab Delandii nie wyraził zgody na żadne działania ofensywne. W związku z tym generał Decki może jedynie zdecydować o rozmieszczeniu delandzkich dywizji na przełęczach łączących obydwa kraje.

Przy poniższym rozmieszczeniu dywizji Delandia wygra wojnę (nie straci żadnej przełęczy):



Z kolei takie rozmieszczenie dywizji zapewni zwycięstwo Alandii (która przeprawi się przez czwartą przełęcz):



Gracz posiadający $C \in \{A, B\}$ dywizji może je rozmieścić pomiędzy n przełęczami na $\binom{n+C-1}{n-1}$ różnych sposobów. Aby to zobaczyć, wyobraźmy sobie, że gracz dysponuje $n + C - 1$ nierozróżnialnymi dywizjami ułożonymi w rzędzie. Usuwając $n - 1$ z nich, wybiera jednoznaczny podział C dywizji na n grup – pierwsza grupa zawiera dywizję od początku rzędu do pierwszej usuniętej dywizji, następne analogicznie. Liczba różnych rozmieszczeń jest zatem równa liczbie wyborów $n - 1$ elementów spośród $n + C - 1$. W związku z tym, że liczba strategii każdego z graczy jest wykładnicza względem parametrów gry, jest to gra o *związłej reprezentacji*.

Alandzki sztab wyciągnął z poprzedniej wojny dokładnie odwrotne wnioski – (A)tak jest uważany za najskuteczniejszą metodę. Generał Acki ma zdecydować o kierunkach natarć przez przełęcze łączące obydwa kraje i przydzieleniu alandzkich dywizji do poszczególnych atakujących armii. W wypadku udanego ataku na dowolnej z przełęczek alandzkie armie zaleją Delandię, a ta będzie zmuszona kapitulować. Jeżeli żadnej z alandzkich armii nie uda się skutecznie przełamać frontu, gospodarka Alandii załamie się w związku z wysokimi kosztami prowadzenia ofensywnych działań wojennych, i to Alandia będzie zmuszona podpisać kapitulację. W związku z stałą rotacją dywizji w obydwu krajach każdy z generałów podejmie decyzję niezależnie, nie znając rozmieszczenia dywizji przeciwnika. W jaki sposób obydwaj generałowie powinni przypisać dywizje, którymi dysponują?

Zabawmy się w strategów i spróbujmy znaleźć rozwiązanie dla tego problemu.

W tym celu sformalizujemy powyższy scenariusz jako *grę strategiczną*. Gra strategiczna to następująca trójka: zbiór graczy, zbiór strategii każdego z graczy i funkcja wypłaty mówiąca o tym, jaki jest rezultat gry dla każdego z graczy przy każdej możliwej parze strategii. W rozważanym scenariuszu jest dwóch graczy (generałów): Acki i Decki. Każdy z nich zarządza pewną liczbą dywizji, opisanych odpowiednio przez liczby naturalne A i D . Pomiędzy dwoma krajami znajduje się pewna liczba n przełęczek. Strategią generała Ackiego jest rozmieszczenie A dywizji pomiędzy n przełęczkami. Analogicznie, generał Decki przydziela D dywizji pomiędzy te same n przełęczki. Zakładamy, że każdy z generałów przydzieli wszystkie dywizje, którymi zarządza, w celu zmaksymalizowania szansy na wygranie konfliktu. Pojedyncza przełęcz będzie obroniona przed Delandią, jeżeli liczba delandzkich dywizji broniących tej przełęczki będzie nie mniejsza niż liczba atakujących dywizji z Alandii. W przeciwnym wypadku przełęcz zostanie stracona, a wojna przegrana przez Delandię. Delandia wygra wojnę tylko w przypadku skutecznego obronienia wszystkich przełęczek. Zwycięzca otrzyma wypłatę 1, a przegrany -1 . Gra ta nazywana jest grą „Atak i Obrona” (*Attack and Defense*).

Warto zauważyć, że reprezentacja gry jest bardzo mała! Trójka (A, D, n) jednoznacznie definiuje zbiór strategii każdego z graczy i, co za tym idzie, całą grę. Ważną cechą opisanego gry jest bezpośrednie powiązanie wypłat obydwu graczy – sukces jednego z nich bezpośrednio łączy się z porażką drugiego, a suma wypłat obydwu graczy jest zawsze równa 0. Takie gry nazywamy *grami o sumie zerowej*.

Podstawową *konceptcją rozwiązania* gry strategicznej jest *równowaga Nasha*. Równowaga Nasha to para strategii, w której żaden z graczy nie może poprawić swojej wypłaty przez zmianę swojej strategii, gdy strategia drugiego z graczy pozostanie niezmienną.

Okazuje się, że w grach o sumie zerowej wypłata ustalonego gracza w każdej równowadze Nasha jest zawsze taka sama. Jest to zatem wypłata, jaką może on sobie zagwarantować: niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik, grając strategię z równowagi Nasha, uzyska on co najmniej taką wypłatę. Dlatego też strategie w równowadze Nasha w grach o sumie zerowej są w pewnym sensie optymalne. Wartość nieujemnej wypłaty w równowadze Nasha (jeden z graczy ma zawsze nieujemną wypłatę, drugi – niedodatnią) jest nazywana *wartością gry*.

W obu przypadkach wartość gry jest równa 1 – jeden z graczy może sobie zapewnić zwycięstwo.

Macierz wypłat w grze ($A = 2, D = 3, n = 2$) – kolumny odpowiadają strategiom Ackiego, a wiersze strategiom Deckiego.

	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)
(3, 0)	D	A	A
(2, 1)	D	D	A
(1, 2)	A	D	D
(0, 3)	A	A	D

Uproszczona macierz wypłat po usunięciu nieopłacalnych strategii:

	(2, 0)	(0, 2)
(2, 1)	D	A
(1, 2)	A	D

Bardziej precyzyjnie – nie ma równowagi Nasha w *strategiach czystych* (niewytajemniczonym Czytelnikom zaraz wytłumaczymy, co to znaczy).

Warto zauważyć, że każda ze „zwykłych” strategii, czyli podziałów dywizji, odpowiada strategii mieszanej, która przypisuje temu podziałowi prawdopodobieństwo 1. Takie strategie mieszane nazywane są *strategiami czystymi*.

Czy w tej grze istnieją równowagi Nasha? W niektórych przypadkach tak! Zauważmy, że jeżeli $A > D$ (Acki dysponuje większą liczbą dywizji niż Decki), to każda para strategii, w której Acki przypisuje wszystkie dywizje do jednego frontu, a Decki wybiera dowolny przydział swoich strategii, jest równowagą Nasha. W taki sytuacji Alandzkie dywizje przebijają się na froncie, do którego zostały przypisane niezależnie od strategii wybranej przez Deckiego. Podobna sytuacja zachodzi, gdy $D \geq n \cdot A$. W takim przypadku każda para strategii, gdzie Decki przypisuje do każdego frontu co najmniej A dywizji, a Acki wybiera dowolny podział swoich A dywizji, jest równowagą Nasha (tym razem to Delandia wygrywa wojnę).

Co się dzieje w pozostałych przypadkach, czyli gdy $A \leq D < n \cdot A$? Zacznijmy od rozważenia małego przykładu.

Przykładowa gra. Rozważmy przypadek, w którym Acki dysponuje dwoma dywizjami, Decki trzema, a państwa są połączone dwoma przełęczami, czyli grę zdefiniowaną przez trójkę ($A = 2, D = 3, n = 2$). Decki dysponuje czterema strategiami – są to podziały dywizji (3, 0), (2, 1), (1, 2) i (0, 3), natomiast Acki ma do dyspozycji trzy strategie – (2, 0), (1, 1) oraz (0, 2). Tabelka na marginesie, zwana *macierzą wypłat*, opisuje wyniki gry (zwycięzcę) dla każdej pary strategii obydwu graczy.

Zauważmy, że przypisanie trzech dywizji do jednej przełęczy nie jest rozsądne z perspektywy Deckiego, gdyż wystarczą tylko dwie dywizje, aby uczynić daną przełęcz całkowicie chronioną przed atakiem Ackiego. W związku z tym założymy, że Decki dopuszcza jedynie strategie (2, 1) lub (1, 2). W konsekwencji Acki nigdy nie chce wybrać strategii (1, 1), gdyż przegrywa ona z każdą ze strategii dopuszczanych przez Ackiego.

Po takiej analizie dostajemy uproszczoną macierz wypłat, przedstawioną na marginesie. Gra opisana przez tę macierz wypłat nie ma równowagi Nasha – dla każdej pary strategii gracz przegrywający może zwiększyć swoją wypłatę z przegranej na wygraną poprzez zmianę swojej strategii.

Analogiczny argument pokazuje, że zawsze gdy $A \leq D < n \cdot A$, równowaga Nasha nie istnieje. Jeżeli rozpatrywana para strategii rozstrzyga konflikt na korzyść Delandii, zawsze istnieje strategia Alandii, która gwarantuje jej zwycięstwo. Jest tak, ponieważ na którymś z frontów Delandia musi przypisać mniej niż A dywizji (jako że $D < n \cdot A$), więc strategia Alandii, w której wszystkie dywizje będą przypisane do tej przełęczy, zmienia wynik konfliktu na korzystny dla Alandii. Analogicznie, dla każdej pary strategii, która zapewnia zwycięstwo Alandii, Delandia może przypisać swoje dywizje w sposób wyrównujący liczby dywizji przypisane przez Alandię do odpowiednich frontów (ponieważ $A \leq D$).

Strategie mieszane. Czy możemy coś zrobić, gdy nie istnieje równowaga Nasha w rozpatrywanym modelu? Tak! Zauważmy, że każdy z graczy, zamiast wybierać jedną ze swoich strategii, może zdecydować się na „wylosowanie” strategii według pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Takie rozkłady prawdopodobieństwa na zbiorze strategii gracza nazywamy *strategiami mieszanymi*. Jak należy je interpretować? Powiedzmy, że generał Acki wybierze strategię mieszaną, która przypisze równe prawdopodobieństwo każdej z paru wybranych strategii. Interpretacja jest następująca: generał Acki numeruje wybrane strategie, następnie wrzuca do urny ponumerowane kulki. Każda kulka odpowiada numerowi dokładnie jednej strategii. W momencie podjęcia decyzji Acki losuje kulkę z urny i wybiera przypisanie dywizji odpowiadające strategii, której numer znajdował się na wylosowanej kulce.

Rozszerzenie zbioru strategii wymaga również rozszerzenia funkcji wypłat obydwu graczy. W przypadku pary strategii mieszanych nie znamy wypłaty graczy, bo nie wiemy, jaka para strategii została wylosowana. Mówimy zatem o *oczekiwanej wypłacie* gracza – opisuje ona, jaka będzie „średnia” wypłata gracza z zadanej pary strategii przy wielokrotnym powtarzaniu rozgrywki. Oczekiwana wypłata jest obliczana przy założeniu, że rozkłady

Dla przykładu popatrzmy znów na uproszczoną macierz wypłat w rozpatrywanej wyżej grze. Załóżmy, że Acki wybierze pierwszą strategię (2, 0) z prawdopodobieństwem $1/3$ (więc druga (0, 2) z prawdopodobieństwem $2/3$), a Decki wybierze pierwszą strategię (2, 1) z prawdopodobieństwem $3/4$ (i drugą (1, 2) z prawdopodobieństwem $1/4$).

Oczekiwana wypłata Ackiego to zatem:

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.$$

W tej równowadze Decki z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ przydziela $A = 2$ dywizje na każdą z przełęczy. Bardziej ogólnie, gdy $A \leq D < n \cdot A$, to gdyby istniała przełęcz, na której Decki zawsze przydziela mniej niż A dywizji, to Acki mógłby zagwarantować sobie wygraną, gdyby to on przydzielił tam A dywizji. Decki nie może do tego dopuścić, a zatem w każdej równowadze musi bronić każdej przełęczy co najmniej A dywizjami z dodatnim prawdopodobieństwem.

Podstawowe narzędzia używane do rozwiązywania gier o sumie zerowej bazują na jednym z dwóch założeń – zbiór strategii obydwu graczy jest niewielki (wielomianowy względem parametrów gry) lub istnieją równowagi Nasha w strategiach mieszanych, gdzie strategie mieszane obydwu graczy mają niewielkie (wielomianowe względem parametrów modelu) *nośniki*. Nośnik strategii mieszanej to zbiór wszystkich strategii czystych gracza, które są grane z dodatnim prawdopodobieństwem przy danej strategii mieszanej. W związku z tym, że zbiór strategii każdego z graczy jest duży (wykładniczy) względem parametrów modelu oraz istnieją równowagi, w których wszystkie strategie znajdują się w nośniku, badana przez nas gra jest trudna do rozwiązania w czasie wielomianowym.

Jako ćwiczenie dla Wnikliwego Czytelnika pozostawiam poszukanie odpowiedzi na pytanie, dlaczego żadna inna para strategii mieszanych nie jest równowagą Nasha, gdy obaj gracze dysponują taką samą liczbą dywizji.

prawdopodobieństwa zadane przez strategię mieszane obydwu graczy są niezależne – to, jaka strategia zostanie „wylosowana” przez jednego z graczy, nie zmienia prawdopodobieństwa „wylosowania” konkretnych strategii przez drugiego gracza. Aby obliczyć oczekiwaną wypłatę gracza, należy zsumować prawdopodobieństwo wystąpienia każdej pary strategii czystych pomnożonych przez wypłatę rozważanego gracza przy zadanej parze strategii.

Z rozszerzeniem zbiorów strategii obydwu graczy do strategii mieszanych pojęcie równowagi Nasha rozszerza się do *równowagi Nasha w strategiach mieszanych*. Taka równowaga to para strategii mieszanych, w której żaden z graczy nie może zwiększyć swojej oczekiwanej wypłaty, wybierając inną strategię, gdy strategia przeciwnika nie ulegnie zmianie. Chociaż poszukiwanie równowag Nasha w strategiach mieszanych jest znacznie bardziej wymagające niż w strategiach czystych, twierdzenie Nasha z 1951 roku gwarantuje, że w każdej grze skończonej (o skończonej liczbie graczy i ich strategii) taka równowaga istnieje!

Wróćmy na chwilę do naszej przykładowej gry. Jak wygląda równowaga Nasha w strategiach mieszanych? Jest to para strategii mieszanych, w której każdy z graczy wybiera każdą ze swoich dwóch nieodrzuconych strategii z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Jeżeli Decki częściej broni dwoma dywizjami którąś przełęcz, to Acki powinien zawsze atakować tę drugą, a wtedy Decki będzie wolał zmienić strategię. W równowadze Decki musi zatem wybierać obie strategie z takim samym prawdopodobieństwem. Analogiczna analiza dla Ackiego prowadzi do wniosku, że w równowadze również on musi wybierać każdą ze swoich strategii z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Łatwo sprawdzić, że żadnemu z graczy nie opłaca się wówczas zmienić swojej strategii. Oczekiwana wypłata każdego z generałów jest równa 0, więc taka jest też wartość gry.

W powyższym przykładzie okazało się, że niektórych podziałów dywizji w ogóle nie opłaca się używać, co pozwoliło nam znacząco uprościć grę. Czy zawsze tak jest? Okazuje się, że nie. Pokażemy teraz, że w pewnych konfiguracjach, w jedynej równowadze Nasha w strategiach mieszanych każda ze strategii obydwu graczy jest grana z niezerowym prawdopodobieństwem.

Równe liczby dywizji. Załóżmy, że każde z państw dysponuje taką samą liczbą dywizji opisaną przez liczbę naturalną k ($k = A = D$). Ponieważ obaj gracze dysponują taką samą liczbą dywizji, ich zbiory strategii są równe. Co więcej, jeżeli obydwaj generałowie wybiorą ten sam podział dywizji pomiędzy fronty, Delandia wygra wojnę, zatrzymując przeciwnika na każdym froncie. W każdym innym przypadku (gdy gracze wybiorą różne strategie), na pewnym froncie Alandia będzie dysponowała większą od Delandii liczbą dywizji, co doprowadzi do wygranej Alandii na tym froncie i w konsekwencji w całej wojnie.

Ustalmy parę strategii mieszanych, w której każdy z graczy przypisuje takie samo prawdopodobieństwo p każdej z dostępnych strategii czystych. Czy ta para strategii mieszanych opisuje równowagę Nasha? Żeby odpowiedzieć na to pytanie, musimy zastanowić się, czy któryś z graczy może zwiększyć swoją oczekiwaną wypłatę przez zmianę swojej strategii mieszanej. Rozważmy zmianę strategii mieszanej przez generała Ackiego. Każda strategia czysta gwarantuje wygraną Alandii z takim samym prawdopodobieństwem, równym $1 - p$ (z takim prawdopodobieństwem Decki wylosuje strategię odpowiadającą innemu przypisaniu dywizji pomiędzy fronty niż strategia czysta wybrana przez Ackiego). W związku z tym każda strategia mieszana wybrana przez Ackiego zagwarantuje wygraną Alandii z takim samym prawdopodobieństwem, równym $1 - p$. Oznacza to, że Acki nie może zwiększyć prawdopodobieństwa wygranej Alandii, a zatem i oczekiwanej wypłaty, przez zmianę swojej strategii mieszanej. Analogiczny argument pokazuje, że to samo dotyczy Deckiego, zatem rozważana para strategii opisuje równowagę Nasha! Oczekiwana wypłata Ackiego przy tych strategiach jest równa $1 - 2p$, taka jest zatem wartość gry. Oznacza to, że przy takiej samej liczbie dywizji generał Acki jest w nieporównanie lepszej sytuacji.

Czego dowiedzieliśmy się o rozważanej grze? Po pierwsze, przy odpowiedniej dysproporcji liczby dywizji, którymi dysponują gracze, istnieją równowagi Nasha w strategiach czystych, w których jeden z graczy ma zagwarantowaną wygraną. Po drugie, w sytuacji, gdy $A \leq D < A \cdot n$, nie istnieją równowagi Nasha w strategiach czystych, a żaden z graczy nie jest w stanie zagwarantować swojej wygranej z prawdopodobieństwem 1. W takich scenariuszach dla każdej przełęczy obrońca powinien z dodatnim prawdopodobieństwem przypisywać A dywizji, aby atakujący nie miał w odpowiedzi strategii, przy której na pewno wygra. Okazuje się zatem, że w każdej sytuacji, gdy atakujący nie może zagwarantować swojej wygranej, obrońcy oplać się bronić na wszystkich frontach równocześnie.



Pseudopierwsze zoo Mikołaj ROTKIEWICZ*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

O liczbach pseudopierwszych pisaliśmy w Δ_{22}^3 . Przypomnijmy, że liczba pseudopierwsza (Fermata, przy podstawie a) to liczba złożona n , która „udaje” liczbę pierwszą w tym sensie, że spełnia podzielność $n|a^n - a$. O takim kamuflażu można mówić na wiele różnych sposobów.

Przedstawiony wzór rekurencyjny dla ciągu (V_n) wynika ze zsumowania następujących dwóch równości, prawdziwych na mocy definicji liczb α, β :

$$\begin{aligned}\alpha^{n+2} &= a\alpha^{n+1} - b\alpha^n, \\ \beta^{n+2} &= a\beta^{n+1} - b\beta^n.\end{aligned}$$

Weźmy na warsztat (w miejsce ciągu geometrycznego (a^n)) ciąg $V_n = \alpha^n + \beta^n$, gdzie α, β są pierwiastkami, być może zespolonymi, trójmianu kwadratowego $f(X) = X^2 - aX + b$, natomiast a, b są liczbami całkowitymi. Początkowe wyrazy tego ciągu można szybko obliczyć, stosując rekurencję: $V_0 = 2, V_1 = a, V_{n+1} = aV_n - bV_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Stąd widać również, że (V_n) jest ciągiem liczb całkowitych. Małe twierdzenie Fermata ma następujące uogólnienie:

Lemat 1. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $V_p \equiv V_1 \pmod{p}$.*

Dowód. Niech $p > 2$. Zastosujemy wzory na pierwiastki równania kwadratowego. Mamy $V_p = \left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^p + \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^p$, gdzie $\Delta = a^2 - 4b$. Po rozwinięciu część wyrazów sumy zredukuje się i otrzymamy

$$V_p = 2^{-p+1} \left(a^p + \sum_{j=1}^{(p-1)/2} \binom{p}{2j} a^{p-2j} \Delta^j \right).$$

W powyższej sumie $a^p \equiv a \pmod{p}$, a pozostałe składniki sumy są całkowite i podzielne przez p , gdyż $p \mid \binom{p}{2j}$. Ponadto $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ i dlatego

$$V_p \equiv 2^{p-1} V_p \equiv a + 0 = V_1 \pmod{p}.$$

Przypadek $p = 2$ pozostawiamy Czytelnikowi. □

Lemat 1 prowadzi do pierwszego egzemplarza w naszym zoo. Liczbę złożoną n nazywa się *pseudopierwszą Dicksona*, jeśli

$$(D) \quad V_n \equiv V_1 \pmod{n}$$

i $\text{NWD}(n, 2b\Delta) = 1$. Warunek na NWD jest po to, by pominąć trywialne rozwiązania kongruencji (D). Okazuje się, że sprawdzenie warunku (D) można wykonać niemalże tak szybko jak sprawdzenie, czy $a^n \equiv a \pmod{n}$ (patrz ćwiczenie 1).

Obliczenia wartości $(a^n \pmod{n})$ można dokonać w czasie $O(\log n)$ – jak? Odpowiedź w dalszej części artykułu.

W poprzednim artykule wspominaliśmy o *liczbach Carmichaela*, które spełniają $a^n \equiv a \pmod{n}$ dla dowolnej liczby naturalnej a . Powstaje naturalne pytanie, czy istnieją liczby, które są liczbami pseudopierwszymi Dicksona dla dowolnych liczb całkowitych a, b ? Odpowiedź jest twierdząca, najmniejszą z nich jest

$$n = 443372888629441 = 17 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 167 \cdot 331.$$

W dalszej części artykułu przyjrzymy się własnościom ciągu (A_n) , który zdefiniowany jest przez analogiczną rekurencję, lecz tym razem jest ona rzędu 3:

$$(1) \quad A_0 = 3, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 2, \quad A_{n+1} = A_{n-1} + A_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Lemat 2 ([L]). *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to p dzieli A_p .*

Dowód. Z ogólnej teorii ciągów rekurencyjnych wnosimy, że $A_n = a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n$, gdzie α, β, γ są rozwiązaniami (zespolonymi) równania $X^3 = X + 1$, natomiast a, b, c są pewnymi stałymi. Dociekliwy Czytelnik łatwo sprawdzi, że warunek początkowy podany w (1) wymusza $a = b = c = 1$, stąd $A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$. Ze wzorów Viète'a mamy $\alpha + \beta + \gamma = 0$, więc

$$(2) \quad A_p = \alpha^p + \beta^p + \gamma^p - (\alpha + \beta + \gamma)^p = - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=p \\ 0 \leq k_1, k_2, k_3 < p}} \frac{p!}{k_1!k_2!k_3!} \alpha^{k_1} \beta^{k_2} \gamma^{k_3} = p \cdot \Theta_p.$$

Zauważmy, że w powyższej sumie $\frac{p!}{k_1!k_2!k_3!}$ jest liczbą całkowitą podzielną przez p , więc Θ_p jest całkowitoliczbową kombinacją liczb postaci $\alpha^{k_1} \beta^{k_2} \gamma^{k_3}$. Dla dokończenia dowodu posłużymy się uogólnieniem pojęcia liczby całkowitej:

Definicja. Liczbę zespoloną θ nazywamy *algebraiczną*, jeśli θ jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych: $c_d\theta^d + c_{d-1}\theta^{d-1} + \dots + c_1\theta + c_0 = 0$, gdzie $c_d \neq 0$. Jeśli dodatkowo założymy, że $c_d = 1$, to θ nazywamy liczbą *algebraiczną całkowitą*.

Niech \mathbb{A} oznacza zbiór liczb algebraicznych całkowitych. Okazuje się, że działania dodawania i mnożenia liczb z \mathbb{A} nie wyprowadzają poza \mathbb{A} . (Dowód tego ważnego twierdzenia Czytelnik łatwo znajdzie w [BB-S, M]). Ponieważ (A_n) jest z definicji ciągiem liczb całkowitych, więc liczba $\Theta_p = A_p/p$ jest wymierna. Z drugiej strony, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{A}$, więc również $\Theta_p \in \mathbb{A}$. Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianów o współczynnikach całkowitych można zapisać krótko: $\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$, tj. każda wymierna liczba algebraiczna całkowita jest całkowita. To oznacza, że $\Theta_p \in \mathbb{Z}$, więc $p \mid A_p$. \square

W krótkiej notce [P] Raoul Perrin postawił pytanie o istnienie liczby złożonej n takiej, że $n \mid A_n$. Takie liczby nazywamy wspólnie *liczbami pseudopierwszymi Perrina* (lub po prostu *liczbami Perrina*).

Przez ponad 80 lat od postawienia problemu w [P] i kilku prób jego rozwiązania, nie była znana żadna liczba Perrina. Odkryto ją w sposób bardzo naturalny, niemalże na kartce papieru z ołówkiem w rękę [A-S]. Jak? Otóż zamieniając α, β, γ w (2) na $\alpha^m, \beta^m, \gamma^m \in \mathbb{A}$, dostajemy szybko

$$(3) \quad A_{mp} \equiv A_m \pmod{p}$$

dla każdej liczby naturalnej m . Zatem $A_{p^2} \equiv A_p \equiv 0 \pmod{p}$. Podzielność A_{p^2} przez p to tylko „połowa sukcesu” – ale sugeruje, że może warto ograniczyć poszukiwania liczb pseudopierwszych Perrina do kwadratów liczb pierwszych. Ta heurystyka okazała się słuszna – liczbą pseudopierwszą Perrina (jak się okazuje, najmniejszą!) jest $n = 521^2 = 271441$.

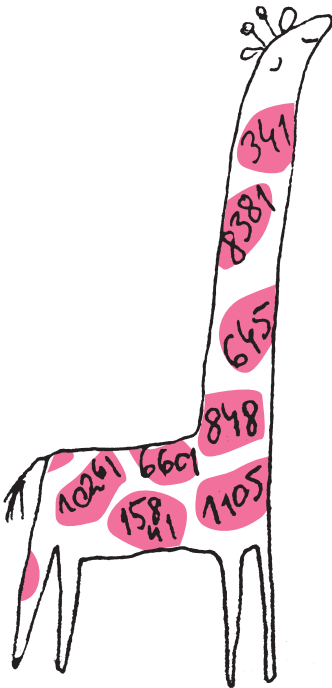
Jak trudne jest sprawdzenie warunku $n \mid A_n$? Obliczenie reszt z dzielenia kolejnych wyrazów ciągu A_k przez n dla $1 \leq k \leq n$ byłoby bardzo kosztowne, bo wymaga aż $O(n)$ kroków. Lepiej posłużyć się rachunkiem macierzowym: dla macierzy

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ mamy } M \begin{bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \\ A_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n+1} \\ A_{n+2} \\ A_{n+3} \end{bmatrix}, \text{ skąd } M^{n-2} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ A_{n-1} \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Obliczenie M^n mod n można wykonać w $O(\log_2 n)$ krokach, stosując rekurencyjnie równości $M^k = (M^{k/2})^2$ dla parzystych $k \leq n$ i $M^k = M \cdot (M^{k-1})^2$ w przypadku, gdy k jest liczbą nieparzystą. Każdy z kroków polega na obliczeniu iloczynu macierzy 3×3 modulo N , więc całkowity koszt obliczenia M^n wynosi $O((\log_2 N)^2 \log_2 n)$ operacji bitowych. Inny sprytny algorytm wyznaczenia A_n podajemy w ćwiczeniu 5.

Ciąg (A_n) ma kilka innych ciekawych własności teoriolicebowych, z pomocą których możemy zbudować silniejszy test pierwszości. Rekurencję (1) można

Dla przykładu: $\sqrt{2}$ oraz $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ są liczbami algebraicznymi całkowitymi, ale $\sqrt{2}/2$ już nie (ćwiczenie 2).



Można dowiedzieć, że $A_{p^2} \equiv A_p \pmod{p^2}$, więc dla dowodu, że 271441 jest liczbą Perrina, wystarczy sprawdzić, że $521^2 \mid A_{521^2}$, co przy zastosowaniu podanego algorytmu zrobimy, wykonując 10 operacji mnożenia modulo 521^2 macierzy 3×3 .

odwrócić: $A_{n-1} = -A_n + A_{n+2}$, skąd
 $(A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots) = (3, -1, 1, 2, -3, 4, -2, -1, \dots)$.

Dowód następującego lematu jest analogiczny do dowodu lematu 2 i pozostawiamy go jako ćwiczenie.

Lemat 3. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $A_{-p} \equiv -1 \pmod{p}$.*

Liczbę złożoną n nazywamy *silną liczbą Perrina*, jeśli $n \mid A_n$ oraz $n \mid 1 + A_{-n}$. Liczba 521^2 nie spełnia ostatniej podzielności, więc nie jest silną liczbą Perrina. Z kolei $A_{-p^2} \equiv -1 \pmod{p^2}$ już dla $p = 7, 11$ i 29 (por. ćwiczenie 3). Czy silne liczby Perrina w ogóle istnieją? Tak, a ich poszukiwania ułatwia następująca klasyfikacja liczb pierwszych.

Popatrzmy na możliwe rozkłady wielomianu $H(X) = X^3 - X - 1$, czyli wielomianu charakterystycznego rekurencji (1), nad ciałem \mathbb{F}_p – ciałem reszt z dzielenia przez liczbę pierwszą p (informacje w pigułce o ciałach \mathbb{F}_p znajdują się na marginesie). Na przykład $X^3 - X - 1 \equiv (X - 2)(X^2 + 2X + 3) \pmod{5}$, gdzie zapis $P_1(X) \equiv P_2(X) \pmod{m}$ oznacza, że wielomian $P_1(X) - P_2(X)$ ma wszystkie współczynniki podzielne przez liczbę naturalną m . Ponieważ wielomian stopnia 3 ma co najwyżej trzy pierwiastki, możliwe są 4 przypadki:

- (i) $H(X) \equiv (X - a)(X - b)(X - c) \pmod{p}$ dla pewnych trzech różnych reszt $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- (ii) Wielomian H nie ma pierwiastków w ciele \mathbb{F}_p , tj. $p \nmid H(a)$ dla wszystkich $a \in \mathbb{Z}$. Wówczas H jest wielomianem nierozkładalnym nad ciałem \mathbb{F}_p .
- (iii) $H(X) \equiv (X - a)Q(X) \pmod{p}$ dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$ i wielomianu Q nierozkładalnego nad ciałem \mathbb{F}_p .
- (iv) $H(X) \equiv (X - a)^2(X - b) \pmod{p}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$.

W przypadkach (i), (ii) i (iii) mówimy, że liczba pierwsza p jest typu **S**, **I** i **Q**, odpowiednio. Przypadek (iv) ma miejsce tylko dla $p = 23$ (co ma związek z tym, że -23 jest *wyróżnikiem* wielomianu $H(X)$). Przykłady liczb pierwszych zadanych typów podajemy w ćwiczeniu 7.

Ciąg $(A_n \pmod{m})_{n=-\infty}^{\infty}$ jest okresowy, ponieważ jest tylko skończenie wiele możliwości na $(A_{n-1}, A_n, A_{n+1}) \pmod{m}$ dla każdej ustalonej liczby naturalnej m , a każda taka trójka wyznacza ten ciąg jednoznacznie, w przód i tył. Oznaczmy przez ω_m okres podstawowy ciągu $(A_n \pmod{m})$. Poniższy lemat pozostawiamy bez dowodu.

Lemat 4 ([A-S]). *Jeśli liczba pierwsza p jest typu **S**, to $\omega_p \mid p - 1$, jeśli jest typu **Q**, to $\omega_p \mid p^2 - 1$, jeśli zaś typu **I**, to $\omega_p \mid p^2 + p + 1$.*

Przypomnijmy, liczba złożona n jest liczbą Carmichaela, jeśli dla każdej liczby całkowitej a zachodzi podzielność $n \mid a^n - a$. Zdarza się, że liczba jest jednocześnie liczbą Carmichaela i silną liczbą Perrina, i nie jest to takie dziwne. Przypuśćmy, że liczba Carmichaela $C = \prod_{i=1}^k p_i$ jest iloczynem różnych liczb pierwszych typu **S**. Na mocy Lematu 4, $\omega_{p_i} \mid p_i - 1$, zaś z kryterium Korselta (patrz np. Δ_{22}^3), $p_i - 1 \mid C - 1$. Zatem $C \equiv 1 \pmod{\omega_{p_i}}$, więc $A_C \equiv A_1 = 0 \pmod{p_i}$ i podobnie $A_{-C} \equiv A_{-1} = -1 \pmod{p_i}$, więc C jest silną liczbą Perrina. Najmniejszą z takich liczb jest

$$7045248121 = 821 \cdot 1231 \cdot 6971.$$

Szczególna postać dzielników pierwszych tej liczby pozwala szybko uzasadnić, że jest ona liczbą Carmichaela. Przyjrzyjmy się teraz liczbie

$$n = 24306384961 = 19 \cdot 53 \cdot 79 \cdot 89 \cdot 3433.$$

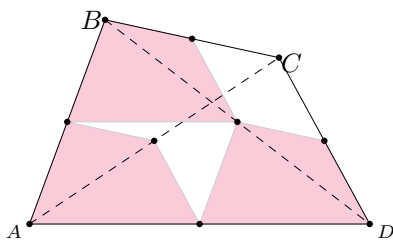
To również jest liczba Carmichaela, dość osobliwa, bowiem nie wszystkie dzielniki pierwsze liczby n są typu **S**. Liczby pierwsze $q_1 = 19, q_2 = 53, q_3 = 79$ i $q_4 = 89$ są typu **Q**, zaś $q_5 = 3433$ jest typu **S**. Liczby te są tak dobrane, że $n \equiv 1 \pmod{q_i^2 - 1}$ dla każdego $1 \leq i \leq 4$ (a nie tylko $n \equiv 1 \pmod{q_i - 1}$) oraz $n \equiv 1 \pmod{q_5 - 1}$. Z lematu 4 natychmiast dostajemy $A_n \equiv A_{n \pmod{\omega_{q_i}}} = A_1 = 0 \pmod{q_i}$ dla $1 \leq i \leq 5$. Zatem $n \mid A_n$. Zupełnie analogicznie sprawdzamy warunek $A_{-n} \equiv A_{-1} = -1 \pmod{n}$. Zatem n jest silną liczbą Perrina.

O zbiorze F mówimy, że jest ciałem, jeśli jego elementy można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić (z wyjątkiem dzielenia przez 0, które jest jedynym elementem o własności $0 + x = x$ dla każdego $x \in F$). Więcej o ciałach można przeczytać w Δ_{17}^{10} . Zbiór \mathbb{F}_p powstaje na drodze redukcji (abstrakcji) modulo p , tzn. liczby całkowite x, x' uznajemy za *równoważne*, jeśli $x \equiv x' \pmod{p}$. Redukcja ta jest możliwa, gdyż jeśli $x \equiv x' \pmod{p}$ oraz $y \equiv y' \pmod{p}$, to $x + x' \equiv y + y' \pmod{p}$ oraz $xx' \equiv yy' \pmod{p}$. Elementy zbioru \mathbb{F}_p można dzielić, więc \mathbb{F}_p jest ciałem: chcąc podzielić $x \pmod{p}$ przez $y \pmod{p}$, gdzie $p \nmid y$, szukamy takiego z , że $x \equiv yz \pmod{p}$.



Rozwiązanie zadania M 1763.

Rozważmy dowolny czworokąt $ABCD$. Suma kątów przy wierzchołkach jest równa 360° , więc wśród sum $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ i $\sphericalangle C + \sphericalangle D$ jedna nie przekracza 180° . To samo dotyczy $\sphericalangle B + \sphericalangle C$ i $\sphericalangle D + \sphericalangle A$. Bez straty ogólności założmy, że są to sumy $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ i $\sphericalangle D + \sphericalangle A$. W kątach wewnętrznych o wierzchołkach A, B i D umiemy kopie wyjściowego czworokąta w skali $\frac{1}{2}$, jak pokazano na rysunku.



Ze względu na założone nierówności kopia $ABCD$ umieszczona w wierzchołku A ma po jednym punkcie wspólnym z dwoma pozostałymi kopiami, które z kolei mają tylko jeden wspólny punkt – środek przekątnej BD .



Rozwiązanie zadania M 1764.

Ponieważ $(a_k - a_{k+1})^2 \geq 0$, to

$$\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geq 2a_k - a_{k+1}$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$ ($a_{n+1} := a_1$). Liczba $2a_k - a_{k+1}$ jest całkowita, więc

$$\left\lfloor \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor \geq 2a_k - a_{k+1},$$

zatem

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor \geq \sum_{k=1}^n (2a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Definicja liczby pseudopierwszej Lucasa jest bardzo podobna do definicji liczby pseudopierwszej Dicksona. Przytaczamy ją dla Czytelników Zainteresowanych: rozważamy ciąg (U_n) określony rekurencją $U_0 = 0, U_1 = 1$ oraz $U_{n+1} = aU_n - bU_{n-1}$. Niech $\Delta = b^2 - 4ac$. Liczba złożona n jest **liczbą pseudopierwszą Lucasa**, jeśli jest względnie pierwsza z $2b\Delta$ oraz spełnia podzielność $n \mid U_{n-\varepsilon(n)}$, gdzie $\varepsilon(n)$ jest pewną funkcją o wartościach ± 1 (konkretnie: symbolem Jacobiego $\left(\frac{\Delta}{n}\right)$).

Wiadomo, że liczb Carmichaela jest nieskończenie wiele. Co więcej, udowodniono, że liczb Carmichaela, których każdy dzielnik pierwszy ma typ **S**, również jest nieskończenie wiele. Każda taka liczba jest silną liczbą Perrina, więc tych ostatnich też jest nieskończenie wiele. Z drugiej strony nie wiadomo, czy liczb Perrina z co najmniej jednym dzielnikiem typu **Q** lub **I** jest nieskończenie wiele.

Liczby Perrina to bardzo rzadkie okazy. Przedstawmy trochę statystyk – jest 1700 liczb Perrina mniejszych niż 10^{14} , wśród nich 942 są silnymi liczbami Perrina, a tylko 30 z nich jest liczbami Carmichaela.

Wspomnieliśmy o liczbach pseudopierwszych Fermata, Carmichaela, Dicksona i Perrina. Oprócz tego są jeszcze liczby pseudopierwsze Eulera, Lucasa, Lehmera, Szekeresa i ich różne warianty – a lista ta jest niepełna. Czy to matematyczne zoo liczb pseudopierwszych ma jakiś wspólny mianownik? Jon Grantham [G] podjął próbę (udaną) usystematyzowania występujących definicji liczb pseudopierwszych. Dla ustalonego wielomianu $P \in \mathbb{Z}[X]$ wprowadził pojęcie liczby P -pseudopierwszej Frobeniusa, której definicja wykracza niestety poza ramy tekstu popularnonaukowego. Wspomnijmy jednak, że liczby $(X - a)$ -pseudopierwsze Frobeniusa to dokładnie liczby pseudopierwsze Fermata przy podstawie a , każda liczba $(X^3 - X - 1)$ -pseudopierwsza Frobeniusa jest silną liczbą Perrina, a każda liczba $(X^2 - aX + b)$ -pseudopierwsza Frobeniusa to taka, która jest jednocześnie liczbą pseudopierwszą Dicksona i Lucasa.

Nie wypada nie wspomnieć tutaj o przełomie, jaki dokonał się w 2002 roku za sprawą znalezienia prostego, wielomianowego (względem liczby cyfr w zapisie danej liczby) i deterministycznego testu pierwszości, zwanego algorytmem AKS, od pierwszych liter jego odkrywców: Agrawala, Kayala i Saxena (patrz Δ_{12}^6). Słowo *deterministyczny* oznacza tu tyle, że dla dowolnej liczby n udziela on poprawnej odpowiedzi na pytanie, czy jest to liczba pierwsza. Jednak w praktyce powszechnie stosowanym testem pierwszości (Mathematica, Pari/GP, Maxima, Sage, ...) jest algorytm Baillie-PSW (od jego autorów: Pomerance, Selfridge, Wagstaff), który choć nie jest deterministyczny (stwierdza jedynie, że dana liczba n jest „prawdopodobnie” pierwsza lub że n jest na pewno złożona), jest znacznie szybszy. Jest on połączeniem testów pierwszości Fermata (przy bazie 2) i Lucasa (dla odpowiednio dobranych parametrów a, b – patrz margines).

Nieznane są przykłady liczb złożonych, które algorytm Baillie-PSW uznałby za pierwsze. Wiadomo, że nie ma takich poniżej 10^{19} , jednak przypuszcza się, że jest ich nieskończenie wiele.

Ćwiczenia (wskazówki dostępne na deltami.edu.pl)

- Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i niech (V_n) będzie ciągiem zadanym przez warunki: $V_0 = 2, V_1 = a, V_{n+1} = aV_n - bV_{n-1}$. Uzasadnić wzory

$$V_{2n} = V_n^2 - 2b^n, \quad V_{2n+1} = V_n V_{n+1} - ab^n.$$

- Uzasadnić, że $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nie jest liczbą algebraiczną całkowitą.
- Pierwiastkami wielomianu $X^3 - X - 1$ są $\alpha \approx 1,32 \in \mathbb{R}$, $\beta \approx -0,66 + 0,56i = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\cos \phi + i \sin \phi)$ oraz $\gamma = \bar{\beta}$, gdzie $\phi \approx 1,55 \frac{\pi}{2}$, a dokładniej rozwinięcie w ułamek łańcuchowy $2\phi/\pi$ daje oszacowanie $1 \frac{16}{29} < \frac{\phi}{\pi/2} < 1 \frac{101}{183}$. Uzasadnić wzór

$$A_{-n} = 2(\sqrt{\alpha})^n \cos(n\phi) + \alpha^{-n}$$

dla $n > 0$, a następnie na podstawie podanych przybliżeń i lematu 3 wywnioskować, że $A_{-29} = -1$.

- Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej $p \neq 5$ iloczyn $F_{p+1}F_{p-1}$ jest podzielny przez p , gdzie $(F_n)_{n \geq 1} = (1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ jest ciągiem Fibonacciego.

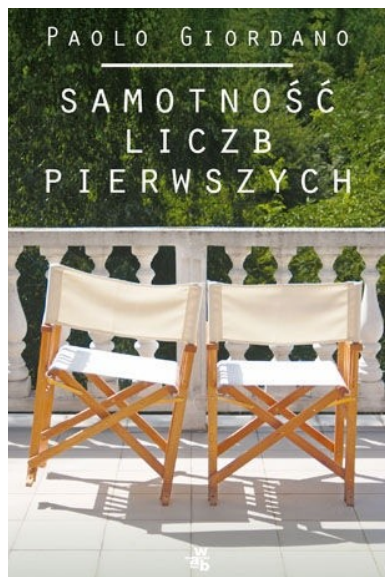
- Uzasadnić, że ślad macierzy M^n (suma liczb na przekątnej NW—SE), gdzie $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, wynosi A_n , dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

Wniosek. Dostajemy krótki algorytm dla sprawdzenia, czy n jest liczbą Perrina.

- Udowodnić lemat 3.
- Uzasadnić, że 2 jest typu **I**, 5 typu **Q**, natomiast $59 = 4^3 - 4 - 1$ typu **S**. (59 jest najmniejszą liczbą pierwszą typu **S**.)
- Uzasadnić, że liczba $904631 = 7 \cdot 13 \cdot 9941$ jest liczbą Perrina, natomiast $16043638781521 = 13 \cdot 223 \cdot 691 \cdot 829 \cdot 9661$ jest silną liczbą Perrina.

Literatura

- [A-S] W. Adams, D. Shanks, *Strong primality tests that are not sufficient*, Math. Comp. 39 (1982).
- [L] E. Lucas, *Sur la recherche de grands nombres premiers*, A. F. Congrès du Clermont-Ferrand (1876).
- [P] R. Perrin, *Item 1484*, L'Intermédiaire des Math. 6 (1899).
- [G] J. Grantham (2001), *Frobenius pseudoprimes*, Math. Comp. 70 (234): 873–891.
- [BB-S] A. Białynicki-Birula, M. Skałba, *Lectures on Number Theory*.
- [M] D. A. Marcus, *Number fields*.



Samotność i liczby

Miroslaw LACHOWICZ*

Fizyk Paolo Giordano (urodzony w 1982 r. w Turynie) w I dekadzie XXI wieku przygotowywał się spokojnie do obrony swojego doktoratu na Uniwersytecie w Turynie. Doktorat dotyczył fizyki cząstek, a dokładniej kwarków b (zwanymi w literaturze popularnej kwarkami pięknymi). Doktorat został pomyślnie zakończony obroną w roku 2010.

W roku 2008 nasz fizyk opublikował książkę pod tytułem *Samotność liczb pierwszych* (polskie tłumaczenie: Wydawnictwo W.A.B., 2010).

Książka nie wydaje się bezpośrednio mieć wiele wspólnego z liczbami pierwszymi, o których mówi się tu tylko na jednej stronie. Niemniej analogia losu dwojga ludzi do liczb pierwszych może być twórcza. Zdaniem Magdaleny Mai Śliwińskiej („italianistki, miłośniczki filozofii, lasu, jaszczurek i światełek”, *Lente-Magazyn*) *świat liczb stanowi klucz do zrozumienia tej jednej z bardziej oryginalnych pozycji włoskiej literatury popularnej ostatnich lat*. Książka opisuje losy dwojga osób, Alice (Alicji) Della Rocca i Mattii (Macieja) Balossino, ciągnących za sobą bagaż doświadczeń. Alice zostaje fotografką, a Mattia matematykiem – zajmował się funkcją ζ Riemanna. Wydaje się, że powinni być sobie bliscy, jednakże ich losy powodują utrzymywanie dystansu, oddzielenia. Jak liczby pierwsze? Mattia jest wycofany i niezdolny do urzeczywistnienia swojego uczucia, Alice jest silniejsza i zdolna do przezwyciężenia przeszłości.

Giordano uważa, że historia Alice i Mattii jest bardzo intymna. Jest w niej sporo użalania się nad sobą. Nie wydaje mu się jednak, że dodanie nowych elementów, jak odniesienia do matematyki, mogłoby osłabić tę atmosferę. Pomysł nawiązania do matematyki był potrzebny autorowi do użycia innego języka od literackiego. Dla Giordana – fizyka, przypominam – matematyka jest językiem, może więc być użyta do opowiedzenia czegoś. Tutaj, jak rozumiem, zastosowana jako rodzaj metafory uzupełniającej właściwą opowieść. Zdaniem autora książki oparcie opowieści na innym języku niż literacki jest interesujące: tworzy nieoczekiwane efekty (z wywiadu udzielonego w 2008 r.).

Książka spotkała się z entuzjastycznym przyjęciem we Włoszech, a także w USA. Autor w wieku 26 lat (2008 r.) otrzymał prestiżową włoską nagrodę literacką *il Premio Strega*, zostając najmłodszym laureatem tej nagrody. Słowo *strega* oznacza czarownicę, ale tutaj odnosi się do firmy Liquore Strega produkującej mocne (jak na zwyczaję włoskie) likiery. Książkę uznano za wspaniały pokaz stylu literackiego.

Można zadać pytanie, czy na entuzjastyczny odbiór książki nie wpłynął częściowo tytuł pochodzący bezpośrednio z matematyki. Czy to nie jest tak, że czytelnik poszukuje (podświadomie?) jedności tak odległych sposobów myślenia, jak refleksja nad losem człowieka i matematyka? Czyli że jedność jest „towarem poszukiwanym”? Czyli że nie wszystko stracone? Może Ludzkości się uda? Więcej pytań niż odpowiedzi!

Dla zachowania prawdy historycznej należy jednak nadmienić, że autor początkowo proponował tytuł *Wewnątrz i na zewnątrz wody* (*Dentro e fuori dall'acqua*). Oj, chyba nie zaszedłby za daleko

z takim tytułem. Ciekawe, jak by zadziałał tytuł *Samotność kwarków pięknych*. Kwarki te występują tylko w cząstkach wytwarzanych sztucznie, a więc jakimś rodzajem samotności się charakteryzują.

Na podstawie książki w roku 2010 został nakręcony film w reżyserii Saveria Costanza. Chyba jednak film nie osiągnął poziomu książki.

Czy liczby pierwsze mogą być samotne? Oczywiście są wytworem ludzkiego umysłu. Dzielić więc z nami kalki z ewolucji naszych umysłów. Klasyczna definicja liczb pierwszych (tu z Wikipedii) to: „liczba pierwsza jest liczbą naturalną większą od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: jedynekę i siebie samą”. Przy tej definicji 0 i 1 nie byłyby liczbami pierwszymi, natomiast 2, 3, 5 i na przykład 17 już tak. Pierwsze pytanie, jakie narzuca się w związku z liczbami pierwszymi, to jak dużo ich jest. Odpowiedź znana jest już od dawna. Euklides (ok. 365 p.n.e. – ok. 270 p.n.e.) w *Księdze IX Elementów* udowodnił stwierdzenie 20, które mówi (w sformułowaniu bliskim sformułowania Euklidesa), że liczb pierwszych jest więcej niż elementów jakiegokolwiek skończonego zbioru liczb pierwszych (*Liczb pierwszych jest więcej, niż jakiegokolwiek dane ich mnóstwo*; dziękuję panu Krzysztofowi Maślance za wskazówki).

Argument Euklidesa jest następujący. Załóżmy, że dany jest skończony zbiór liczb pierwszych p_1, p_2, \dots, p_m . Rozważmy ich iloczyn:

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_m.$$

Wówczas żadna z liczb p_1, \dots, p_m nie może być dzielnikiem liczby $p + 1$, bo z dzielenia otrzymalibyśmy resztę 1. Z drugiej strony, liczba $p + 1$ ma jakiś dzielnik pierwszy, jest więc on szukaną liczbą pierwszą niewymienioną wśród p_1, p_2, \dots, p_m .

M. Kordos, *Największa liczba pierwsza*, Δ_{96}^4 .

K. Gryszka, *Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele*, Δ_{21}^{10} .

W książce M. Aignera i G.M. Zieglera *Proofs from THE BOOK* (Springer, 1998) jest podanych 6 dowodów stwierdzenia Euklidesa, wszystkie oczywiście z KSIĘGI, a więc piękne.

E.S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*, NCTM 1968, II wydanie. Książka zawiera 109 dowodów „algebraicznych”, 255 dowodów „geometrycznych”, 4 dowody „oparte na kwaternionach” i 2 „oparte na dynamice”.

Świat liczb pierwszych jest bardzo ciekawy.

Przykładowo badane są liczby pierwsze bliźniacze, to znaczy pary liczb pierwszych, których różnica wynosi 2, na przykład 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, a także 1997 i 1999 oraz 2 760 889 966 649 i 2 760 889 966 651. Te dwie ostatnie liczby pojawiają się w książce Giordana.

Zagadnienie, czy istnieje nieskończenie wiele par liczb bliźniaczych, jest dalej otwartym problemem teorii liczb („hipoteza o liczbach pierwszych bliźniaczych”). Jest też mocniejsza hipoteza, zwana „hipotezą Hardy’ego–Littlewooda”, dotycząca rozkładu liczb bliźniaczych.

To te liczby tworzą w książce Giordana analogię Mattia i Alice. Są oni osobami w jakiś sposób bliskimi, ale jednak oddzielenymi. *Mattia myślał, że on i Alice byli jak dwie liczby pierwsze bliźniacze, sami i zagubieni, bliscy, ale nie na tyle, by zbliżyć się naprawdę*. Zapewne właściwszym tytułem książki byłby tytuł „Samotność liczb bliźniaczych”.

W roku 1919 norweski matematyk Viggo Brun (1882–1978) udowodnił, że szereg odwrotności liczb bliźniaczych jest zbieżny:

$$b := \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \dots < \infty.$$

Zatem niezależnie od tego, czy suma ta zawiera skończenie, czy nieskończenie wiele składników (bo tego, jak już wiemy – nie wiemy), daje stałą b , zwaną stałą Bruna. Gdyby tak samo potraktować wszystkie liczby naturalne, to odpowiedni szereg (*szereg harmoniczny*) byłby rozbieżny. Można uznać, że wynik Bruna to matematyczne ujęcie „samotności” liczb bliźniaczych. Wszystkie liczby naturalne (a także np. wszystkie liczby parzyste) samotne oczywiście być nie powinny. Leonhard Euler (1707–1783) udowodnił, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $M > 0$ można znaleźć taką liczbę

R.L. Rivest, A. Shamir, L.M. Adleman, „A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems”, *Communications ACM* 21 (2).

W. Diffie, M.E. Hellman, „New directions in cryptography”, *IEEE Transactions on Information Theory* 22 (6), 1976, 644–654.

E. Goles, O. Schulz, M. Markus, „Prime number selection of cycles in a predator–prey model”, *Complexity* 2001, 3, 33–38.

Współcześnie najczęściej formuluje się stwierdzenie Euklidesa w postaci „zbiór liczb pierwszych jest nieskończony” (oswoiliśmy się już z nieskończonością) i do dowodu wykorzystuje się *podstawowe twierdzenie arytmetyki* (PTA). Bazę do udowodnienia twierdzenia PTA podał Euklides, ale współczesną wersję udowodnił Carl F. Gauss (1777–1855) w *Disquisitiones Arithmeticae* w 1798 roku. PTA mówi, że każda liczba naturalna większa niż 1 albo jest liczbą pierwszą, albo może być jednoznacznie (czyli w sposób jedyny) przedstawiona jako iloczyn liczb pierwszych. Jednoznaczność należy rozumieć w ten sposób, że kolejność czynników nie jest istotna.

Jest wiele różnych dowodów stwierdzenia Euklidesa o nieskończoności zbioru liczb pierwszych, choć nie wydaje mi się, aby ktoś je zebrał, tak jak Elisha S. Loomis zebrał 370 różnych dowodów twierdzenia Pitagorasa. Tak, aby czytelnik mógł codziennie przez więcej niż rok zapoznawać się z kolejnym dowodem.

pierwszą p , że suma odwrotności wszystkich liczb pierwszych „do p ” jest większa niż M :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{p} > M.$$

W ten sposób otrzymujemy kolejny dowód nieskończoności zbioru liczb pierwszych oraz pewność, że liczby pierwsze nie są samotne (przynajmniej w powyższym sensie).

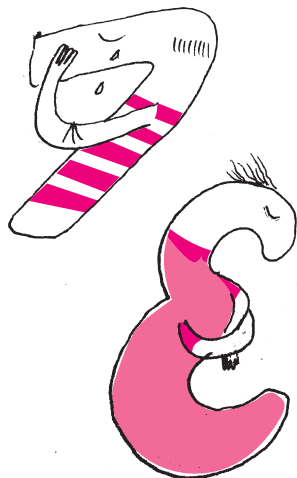
Liczby pierwsze są źródłem ciekawych rozważań matematycznych, a zbadanie ich rozmieszczenia jest dużym wyzwaniem teoretycznym, o znaczeniu również praktycznym. Na pierwszy rzut oka liczby te są rozmieszczone wśród liczb naturalnych bardzo chaotycznie. Wiemy już, że są pary bardzo dużych liczb pierwszych bliźniaczych, ale nie wiemy, czy tych liczb bliźniaczych jest nieskończenie wiele. Wiemy, że mogą się pojawić bardzo długie sekwencje liczb, w których w ogóle nie ma liczb pierwszych.

Pytanie o rozmieszczenie liczb pierwszych prowadzi do jednego z największych problemów otwartych matematyki, jakim jest hipoteza Riemanna. Jego wagę pokazuje fakt, że znalazł się na liście *23 problemów Hilberta* (jako 8. problem) z 1900 roku – wyzwania matematycznych na XX wiek, na liście *16 problemów Smale’a* z 1998/1999 – wyzwania matematycznych na XXI wiek, oraz na liście 7 tzw. *problemów milenijnych* (jako problem 4.) z dużą nagrodą pieniężną ogłoszoną przez Clay Mathematics Institute. Zabawne byłoby, gdyby hipoteza Riemanna została również umieszczona na liście wyzwań na XXII wiek. Po więcej informacji na ten temat polecam sięgnąć do artykułu K. Maślanki oraz tekstów z *Delty* (M. Szurka w Δ_{81}^4 i P. Strzeleckiego w Δ_{03}^9).

K. Maślanka, *Hipoteza Riemanna – refleksje na temat największej zagadki matematyki*, *Roczniki Filozoficzne* LIII (1), 2005.

Wyniki matematyczne dotyczące liczb pierwszych ostatnio nabrały również kluczowego znaczenia w matematyce stosowanej, a w szczególności w kryptografii z kluczem publicznym. W kryptografii wykorzystuje się fakt, że trudno jest rozłożyć bardzo duże liczby, np. iloczyny bardzo dużych liczb pierwszych, na czynniki pierwsze.

Można znaleźć związki pomiędzy liczbami pierwszymi a procesami biologicznymi. E. Goles, O. Schulz i M. Markus sugerują, że pewien rodzaj cykad ma długości cykli lęgowych charakteryzowane liczbami pierwszymi, aby uniemożliwić



drapieżnikom dostosowanie się do tych cykli. Tylko w pewnych fazach cyklu istnieje bowiem możliwość ich złapania. Inne przykłady można znaleźć w przeglądowej pracy M. Loconsole i L. Regolina oraz w podanej tam bibliografii.

Czy można uznać, że koncepcje matematyczne mogą mieć coś wspólnego z trudno definiowanymi odczuciami psychicznymi, jak poczucie samotności? Każda odpowiedź wydaje się niesatysfakcjonująca. Odpowiedź TAK oznaczałaby, że należy ewentualne związki formułować konkretniej, a tego raczej nie jesteśmy w stanie dokonać. Odpowiedź taka byłaby więc dużym uproszczeniem. Odpowiedź NIE oznacza, że świat nam się rozpada na oddzielne, niepowiązane części, co nie wydaje się zgodne z ewolucyjnym dostosowaniem się do życia.

Zatem byłoby to uproszczenie jeszcze gorsze. Odpowiedzi typu „i TAK, i NIE” zostawmy raczej politykom.

Obie skrajne odpowiedzi prowadzą do różnych modeli, a modele rzeczywistości są istotnym i chyba jedynym sposobem jej zrozumienia. Zatem upraszczajmy i starajmy się coś z tego zrozumieć. Może wraz ze zrozumieniem przyjdzie akceptacja?

Zaskakujące i niebanalne zakończenie książki Giordana sugeruje, że w samotności może być siła. Ale to jest tylko jedna z możliwych interpretacji.

Marek Abramowicz: *Między Bogiem a prawdą – autobiografia „roztargnionego profesora”*

Profesor Marek Abramowicz, światowej klasy astrofizyk, autor setek prac naukowych, który w swej bogatej karierze pracował w wielu instytutach i uniwersytetach Europy i Ameryki, ciągle dokładnie pamięta zadanie, które rozwiązywał podczas finału Olimpiady Matematycznej w liceum. Choć od finału minęło kilkadziesiąt lat, ze szczegółami opisuje rozwiązanie, na które wpadł, i emocje, jakie towarzyszyły mu w tamtej chwili.

W swojej książce Marek Abramowicz dzieli się z czytelnikiem wieloma tego typu wspomnieniami przełomowych momentów ze swojego życia, które kształtowały go jako naukowca oraz jako człowieka. Książka nie jest jednak typową autobiografią. Autor, pisząc np. o swoim zachwycie nad pięknem matematyki, przedstawia rozwiązania konkretnych zadań, definicje, twierdzenia i dowody. Opisuje pewne wybrane zagadnienia fizyki i astronomii w sposób bardzo obrazowy i przystępny (swoje popularyzatorskie umiejętności prezentował swego czasu jako autor artykułów w *Delcie*). Na tym wszystkim autor buduje kolejną warstwę swej opowieści, jaką jest prezentacja poglądów religijno-filozoficznych. Marek Abramowicz artykułuje wprost swoje przekonanie, że pewne fakty naukowe wspierają jego wiarę. Dużo miejsca poświęca np. tzw. *zasadzie antropicznej*. Autor stara się zaznaczać, kiedy relacjonuje obiektywne fakty naukowe, a kiedy swoje osobiste religijne przekonania, nie sposób jednak oprzeć się wrażeniu, że fakty, które wybiera do swojej opowieści są starannie wyselekcjonowane pod z góry założoną tezę.

Można się z Markiem Abramowiczem nie zgadzać, ale z pewnością warto poznać jego argumenty i obserwacje, które prowokują do głębszej refleksji. Niewątpliwie wielkim walorem opowieści jest to, jak daleko autor się w niej odsłania, opisując swoje przeżycia, emocje, historie z życia prywatnego, rodzinnego i wreszcie bardzo osobiste poglądy na kwestie religijne, społeczne czy nawet polityczne. Ta otwartość autora i wielowarstwowość jego opowieści sprawia, że jest to książka zdecydowanie nietypowa i intrygująca. „Roztargniony profesor” pozwala prawie że zajrzeć czytelnikowi do swojej głowy, relacjonując, jakie zakręty życiowe pokonywał i jak splot wydarzeń w jego karierze naukowej i życiu prywatnym oraz dyskusje z innymi badaczami kształtowały jego poglądy na kwestie naukowe i metafizyczne, które wyraża w swojej autobiografii.

Szymon CHARZYŃSKI



Starość – tabu naszych dni

Zaledwie 150 lat temu biologowie sądzili, że cechy dziedziczone przekazywane są od komórek ciała do rozrodczych. Przekonanie to podważył doświadczalnie niemiecki biolog August Weismann. Obcinał on przez 20 pokoleń ogony myszom przed osiągnięciem przez nie dojrzałości płciowej i zdolności do rozmnażania i... kolejne pokolenia nadal rodziły się z ogonami. Zrozumiano wówczas, że przekazywalna cecha posiadania ogona istnieje niezależnie od komórek ciała, w komórkach rozrodu – gametach. Bez rozróżnienia funkcjonalnych komórek ciała i rozrodczych niemożliwe jest zrozumienie procesów starzenia się i umierania. Bądź co bądź najważniejszych zagadnień dotyczących egzystencji człowieka.

Ani Darwin, ani Weismann nie znali przyczyn genetycznych zmienności osobniczej. Dopiero Gregor Mendel uświadomił naukowcom, że zmienność osobników wynika z istnienia różnych alleli (molekularnie: różnych cząsteczkowych wersji tego samego genu). Z różnic między allelami wynika pytanie: jak szybko i dlaczego dochodzi w populacji do selekcji osobników z allelami dominującymi. Proste obserwacje kierują uwagę na czynniki środowiskowe: dostępność pokarmu, temperatura, przestrzeń, obecność drapieżników. Wpływają one na wewnętrzne tempo wzrostu populacji. Po wyczerpaniu możliwości środowiska populacja starzeje się i wymiera. Tak więc badanie zmienności alleli w zmiennych warunkach środowiska jest jedną z możliwości badania procesów starzenia się. Dobór naturalny faworyzuje allele sprzyjające przetrwaniu do wieku reprodukcyjnego, a nie cechy przedłużające życie gatunku.

Współcześnie przyjęto zatem, iż wiele zjawisk dotyczących starzenia się wynika z działania czynników środowiska. Umożliwia to studiowanie procesów starzenia się, tempa ich postępu. Naukowcy zwrócili uwagę na starzenie się, gdy wyraźnie i zauważalnie wzrosła statystyczna przeciętna długość życia ludzkiego. Przeciętna długość życia w USA przed 1910 rokiem nie przekraczała 50 lat, a w roku 1970 – 77 lat. Na grype, zapalenie płuc przypadło w Stanach Zjednoczonych w 1900 roku 12% zgonów, na choroby serca 8%, a nowotwory 4%; w 2015 liczby te istotnie się zmieniły: grypa i zapalenie płuc odpowiadały za 2% zgonów, „za to” choroby serca za 23%, a nowotwory 22%. Te liczbowe różnice związane są m.in. z rozszerzeniem i udoskonaleniem diagnostyki, z wyróżnianiem „nowych” chorób i wzrostem zanieczyszczenia środowiska.

Do połowy XX wieku lekarzy zajmował głównie problem, jak leczyć chorych, a nie jak przedłużać im życie. O starości debatowali filozofowie i teologowie. W 1974 roku powstał w USA Narodowy Instytut Starzenia – NIA (dysponujący w pierwszej dekadzie XXI wieku rocznym budżetem 1,2 mld dolarów). Stopniowo do badań geriatrycznych wkroczyły nauki humanistyczne, zwracające uwagę na **jakość** życia u jego schyłku. Znaczenie holistycznego spojrzenia na starość wzrosło wraz ze świadomością, że, tak jak na śmierć, nie ma na nią lekarstwa.

Niezwykle ważną okolicznością stało się docenienie badań nad starzeniem się zwierząt żyjących na wolności: niewielki robak *Caenorhabditis elegans* jest ulubionym modelem w takich doświadczeniach, a wnioski z tych wyników mogą być dość prosto przenoszone na życie ludzkie. Większość badań molekularnych w omawianym zakresie dotyczy życia laboratoryjnego mutantów myszy. I ludzie, i wyższe zwierzęta wykazują dużą zmienność

osobniczą, stąd wynikają ograniczenia przydatności danych statystycznych dla nauk o starości.

Fizyków ucieszy wiadomość, że za jedyną przyczynę starzenia się uznaje się obecnie wzrost entropii, podczas gdy w przebiegu wielu procesów narastają różne przyczyny starzenia się (w gospodarce cukrowej np. zaczynamy od otyłości dziecięcej, kończymy na starczej cukrzycy typu 2).

Definicje starzenia się historycznie ulegały zmianom, zależnie od tego, kto tej definicji szukał, i nadal są przedmiotem sporów. Można taką definicję wiązać z *podwyższoną umieralnością*. Można rozpatrywać zmiany w funkcjonowaniu narządu lub procesu jako bardziej precyzyjne przejawy starzenia się (zmiany odpowiadające za zwiększenie podatności na szkodliwe czynniki), zmiany niekorzystne dla funkcjonowania organizmu, podnoszące ryzyko zgonu. Tego typu zmiany można mierzyć (np. siłę mięśni) i w czasie oceniać postępy starzenia się.

Biologia molekularna przyniosła dane dotyczące starzenia się komórek. Procesy komórkowe mają za przyczyny przypadkowe, losowe mutacje w licznych genach skutkujące gromadzeniem się zmian strukturalnych w białkach, a więc zmian w ich sprawności. Przypadkowy charakter takich zmian wyklucza hipotezy o ewolucji jako przyczynie starzenia się. Starzenie się przebiega różnie dla różnych organów, części ciała. Na starzenie się indywidualne może wpłynąć konkretne jednostkowe przeżycie w młodości. Tak widząc te procesy, biolog może sformułować definicję:

Starzenie się to losowa zmiana struktury i funkcji cząsteczek, komórek i organizmów wywołana wpływem czasu i interakcjami ze środowiskiem. Starzenie się zwiększa prawdopodobieństwo śmierci.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

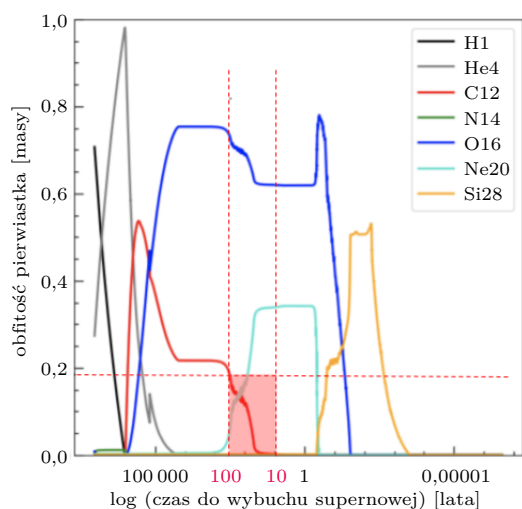
Prosto z nieba: Szykujcie się na wybuch supernowej!...

... W ciągu najbliższych 10–100 lat. Najprawdopodobniej, bo na pewno to nie wiemy.

Wybuchnąć ma oczywiście nasza najlepsza kandydatka na supernową – gwiazda Betelgeza. Betelgeza to czerwony nadolbrzym znajdujący się w gwiazdozbiórce Oriona. Gwiazda ta jest na końcowym etapie swojej ewolucji i spekulacje o jej wybuchu trwają już od dawna. Ostatnio nasiliły się, gdy trzy lata temu zaobserwowano znaczny i nieoczekiwany spadek jasności Betelgezy, mogący sygnalizować nadchodzący wybuch. Okrzyknięto to wydarzenie „Wielkim Ściemnieniem”. Okazało się jednak, że „wielkie ściemnienie” można również nazwać „wielką ściemną”, gdyż zaobserwowane pociemnienie było najprawdopodobniej spowodowane przez chmurę pyłu, która przeszła pomiędzy nami a gwiazdą, przysłaniając jej światło. Po kilku dniach Betelgeza wróciła do swojej normalnej jasności, rozczarowując oczekujących na wybuch supernowej obserwatorów.

Ale oczywiście astronomowie nie mogli tak tej sprawy zostawić. Wciąż próbują ustalić, kiedy Betelgeza zakończy swój żywot. Na początku czerwca tego roku uwagę wszystkich przykuły wyniki badań zaprezentowane przez grupę badaczy pod kierunkiem Hideyuki Saio, którzy twierdzą, że wybuch supernowej może nastąpić w ciągu kilku następnych dekad!

Dlaczego badacze tak sądzą? Betelgeza jest gwiazdą zmienną, co oznacza, że jej jasność zmienia się okresowo w czasie (pomijając nagły spadek jasności sprzed trzech lat, który był niezwiązany z samą gwiazdą). Ponadto jest także gwiazdą znaną i dokładnie obserwowaną. Właśnie dzięki dziesięcioleciom obserwacji (od lat 20. zeszłego wieku) możemy wyróżnić cztery regularne zmiany jasności o okresach 2190 (~6 lat), 417 (rok i dwa miesiące), 230 (7 miesięcy) i 185 (3 miesiące) dni. Te zmiany jasności są spowodowane przez „pulsacje” samej Betelgezy – zmiany rozmiaru wynikające z nieustannej walki pomiędzy siłami grawitacji (próbującymi „ścisnąć” gwiazdę) a ciśnieniem gazu i energią reakcji fuzji jądrowych (działającymi na zewnątrz).



Obfitość różnych pierwiastków w jądrze gwiazdy jako funkcja czasu logarytmicznego (w latach) do momentu zapadnięcia się gwiazdy

Dzięki długim obserwacjom można stworzyć model opisujący, jakie warunki muszą panować we wnętrzu gwiazdy, aby obserwowane oscylacje miały miejsce. To właśnie zrobili naukowcy. Zidentyfikowali cztery modele, które wspierają obserwacje Betelgezy. Według każdego z nich gwiazda wykorzystwała już cały dostępny w jej jądrze wodór i hel i w tym momencie spala już głównie węgiel (powstały we wcześniejszych reakcjach). Co więcej, według najbardziej optymistycznego, dla gwiazdy, modelu w jej rezerwach pozostało maksymalnie około 20% tego pierwiastka. Gdy to paliwo się skończy, zwycięży grawitacja i gwiazda wybuchnie jako supernowa, pozostawiając po sobie gwiazdę neutronową.

Zakładając, że te modele są prawdziwe, możemy przewidzieć, kiedy to się stanie. Rysunek przedstawia przewidywaną względną obfitość różnych pierwiastków w jądrze gwiazdy w funkcji czasu. Czerwona krzywa przedstawia obfitość węgla w funkcji czasu pozostałego do wybuchu. Sprawdzając położenie linii w momencie, gdy obfitość węgla wynosi 20%, otrzymujemy czas od 100 do 10 lat, jaki pozostał Betelgezie do wybuchu supernowej.

Oczywiście, jak to zwykle bywa, na końcu musimy napisać, że modele nie są doskonałe i naukowcy mogą się mylić. Ale ja będę spoglądać w niebo z nadzieją, że wybuch nastąpi w czasie mojego życia.

Anna DURKALEC

Departament Badań Podstawowych (BP4),
Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Oparte na pracy Hideyuki Saio et al. 2023, “The evolutionary stage of Betelgeuse inferred from its pulsation periods”, arXiv: 2306.00287.

Klub 44 M

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
859 ($WT = 2,24$) i 860 ($WT = 1,86$)
z numeru 4/2023

Marcin Kasperski	Warszawa	44,39
Michał Adamaszek	Kopenhaga	43,90
Radosław Kujawa	Wrocław	43,57
Paweł Najman	Kraków	43,16
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Janusz Fiett	Warszawa	38,18
Paweł Kubit	Kraków	36,11
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olstyn	35,26
Marek Spychała	Warszawa	34,50
Jerzy Cisło	Wrocław	32,97

Weteran od dawna – pan Marcin
Kasperski – teraz już po raz piąty!

Klub 44 F

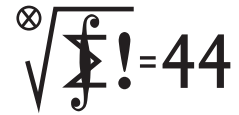
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
756 ($WT = 1,6$), 757 ($WT = 2,8$)
z numeru 4/2023

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2–38,81
Jacek Konieczny	Poznań	36,51
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–31,36
Konrad Kapcia	Poznań	2–26,47
Ryszard Baniewicz	Wrocław	1–22,98

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2024

Zadania z matematyki nr 869, 870

Redaguje Marcin E. KUCZMA



869. Funkcja g przyporządkowuje każdej (uporządkowanej) parze x, y liczb rzeczywistych dodatnich wartość $g(x, y)$, określoną jako najmniejsza liczba z trójki $x, 1/y, (xy + 1)/x$. Wyznaczyć kres górny wartości $g(x, y)$, gdy x oraz y przebiegają zbiór wszystkich liczb dodatnich.

870. (a) Wykazać, że z odcinków łączących dowolny punkt płaszczyzny z wierzchołkami trójkąta równobocznego (leżącego w tej płaszczyźnie) można zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).

(b) Trójkąt równoboczny jest zanurzony w przestrzeni (trójwymiarowej). Wyjaśnić, czy – analogicznie – zawsze można z odcinków łączących dowolny punkt przestrzeni z wierzchołkami tego trójkąta zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).

Zadanie 870 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

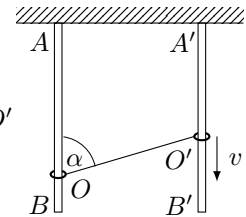
Zadania z fizyki nr 766, 767

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



766. Znaleźć siłę oddziaływania dwóch połówek nieprzewodzącej kuli o promieniu R , naładowanych ze stałą gęstością objętościową, odpowiednio ρ_1 i ρ_2 . Przyjąć, że kula wykonana jest z materiału o stałej dielektrycznej równej jeden.

767. Pierścienie O i O' nasunięte są na pionowe, nieruchome pręty AB i $A'B'$. Nierozciągliwa nić umocowana w punkcie A' przewleczona jest przez pierścień O' i przyczepiona do pierścienia O . Pierścień O' porusza się w dół ze stałą prędkością v . Jaka jest prędkość pierścienia O w chwili, gdy kąt AOO' ma wartość α .



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Niebo w listopadzie

Słońce powoli wyhamowuje swój ruch na południe. Do końca miesiąca obniży swoją wysokość górowania o kolejne 7° . Przez ten czas przejdzie od gwiazdozbioru Wagi do Wężownika, spędzając tydzień w północnej części Skorpiona. 22 listopada Słońce przecina równoleżnik -20° deklinacji i od tego momentu aż do trzeciej dekady stycznia przyszłego roku potrwa okres najkrótszych dni i najdłuższych nocy w roku.

W listopadzie planety Jowisz i Uran przechodzą przez opozycję względem Słońca (Jowisz 3 listopada, Uran – 10 dni później), Mars natomiast 18 listopada przejdzie przez koniunkcję ze Słońcem. Oznacza to, że Mars jest po przeciwnej stronie Słońca niż Jowisz z Uranem oraz że wraz z naszą planetą i Słońcem pięć dużych ciał

Układu Słonecznego jest ustawionych prawie na jednej linii z Marssem po jednej stronie Słońca oraz Ziemią, Jowiszem i Uranem po drugiej. Z perspektywy Ziemi Mars ginie w blasku Słońca, Jowisz z Uranem są zaś widoczne całą noc.

Ekliptyka nadal tworzy duży kąt z horyzontem na niebie porannym i mały wieczorem, stąd do połowy miesiąca bardzo dobrze widoczny jest dążący do nowiu Księżyc. Pierwszego listopadowego poranka tarcza Srebrnego Globu w fazie 87% pokaże się 4° na zachód od El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka, przecinając południk lokalny około godziny 2 na wysokości aż 65° . Dobę później tarcza Księżyca zmniejszy fazę do 80% i przeniesie się na pozycję 10° na wschód od El Nath.

4 listopada jego tarcza pokaże się 4° od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt, dobę później zaś naturalny satelita Ziemi przejdzie przez ostatnią kwadrę. Gościć będzie wtedy w centrum gwiazdozbioru Raka, jakieś 4° na północny wschód od gromady otwartej gwiazd M44 i jednocześnie 2° na wschód od gwiazdy Asellus Borealis (γ Cnc), czyli północno-wschodniej gwiazdy trapezu gwiazd, otaczających Żłóbek.

Kolejne trzy poranki Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Lwa, stopniowo przybierając kształt coraz węższego sierpa, od 42% do 24%. 7 listopada jego tarcza zbliży się na 5° do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji. 9 listopada natomiast Srebrny Glob pokaże fazę 16%, świecąc 2° od Wenus i wznosząc się o 30° na wysokość 30° . W trakcie dnia Księżyc podaży ku planecie, ostatecznie zakrywając ją. Zjawisko da się obserwować z prawie całej Europy, poza Półwyspem Iberyjskim oraz z północno-wschodniej Afryki i zachodniej Azji, gdzie Księżyc zakryje Wenus w dzień. Również z Grenlandii i Ziemi Ellesmere'a, gdzie zjawisko zajdzie na ciemnym niebie. W Polsce Wenus zniknie za jasnym brzegiem księżycowej tarczy około godziny 10:50, na wysokości mniej więcej 30° nad punktem SW widnokregu. Odkrycie nastąpi przy ciemnym brzegu Księżyca jakieś 70 minut później. Planeta świeci z jasnością $-4,3^m$, stąd zjawisko może dać się zaobserwować bez pomocy przyrządów optycznych, a na pewno jest łatwo obserwowalne przez lornetkę. W momencie zakrycia tarcza planety ma średnicę $20''$ i fazę 59%.

Sama Wenus w listopadzie zaczyna zbliżać się do Słońca po październikowej maksymalnej elongacji. Do końca miesiąca pokona na niebie ponad 33° od pogranicza Lwa i Panny do Spiki, najjaśniejszej gwiazdy drugiej z wymienionych konstelacji. W tym czasie tarcza planety skurczy się od $22''$ do $17''$, jej faza urośnie od 55% do 67%, jasność natomiast spadnie z $-4,3^m$ do $-4,2^m$. 18 listopada Wenus przejdzie niewiele ponad 1° od Porriny (γ Vir), a ostatniego dnia miesiąca zbliży się na 4° do Spiki.

Przez czas pozostały do nowiu 13 dnia miesiąca Srebrny Glob odwiedzi gwiazdozbiór Panny. 10 listopada Księżyc w fazie 10% także odwiedzi wspomnianą Porrinę. Kolejnego poranka jego tarcza pojawi się na niebie około godziny 4:30, prezentując tarczę w fazie zaledwie 5% i o 30° wzniesie się na wysokość ponad 10° . Niecałe 2° na południe od Księżyca znajduje się Spica.

Po nowiu Księżyc wędruje głęboko pod słabo nachyloną ekliptyką, stąd dopiero w trzeciej dekadzie miesiąca zaczyna wznosić się wyżej nad widnokrąg. 20 listopada przypada I kwadra Księżyca. Tej nocy jego tarcza przejdzie $3,5^\circ$ na południe od Saturna, który na początku miesiąca zmieni kierunek ruchu na prosty, kończąc tym samym okres najlepszej widoczności w obecnym sezonie obserwacyjnym. Oba ciała niebieskie przetną południk lokalny około godziny 18 na wysokości

ponad 20° . Sama planeta w listopadzie osłabnie do $+0,8^m$, a jej tarcza zmniejszy średnicę kątową do $17''$. Dobę później Księżyc przesunie się kilkanaście stopni na północny wschód i w fazie 65% zakryje gwiazdę 4. wielkości $\psi 1$ Aqr. Do zakrycia dojdzie około godziny 20, odkrycie zaś nastąpi godzinę później.

22 listopada tarcza Srebrnego Globu zwiększy fazę do 75% i dotrze na pogranicze gwiazdozbiorów Wodnika, Ryb i Wieloryba, wędrując jakieś 5° na wschód od Neptuna. Blask planety wynosi $+7,9^m$, stąd w momencie spotkania z Księżycem ginie ona w jego blasku. Dlatego Neptuna lepiej obserwować na początku miesiąca, gdy noc jest ciemna. Planeta znajduje się około $1,5^\circ$ na zachód od gwiazdy 20 Psc.

W ostatnich dniach miesiąca Księżyc ponownie wznosi się wysoko na niebie, wędrując wyraźnie nad ekliptyką i dążąc do pełni. 25 listopada jego tarcza w fazie 97% pokaże się 5° na północny wschód od Jowisza, dobę później natomiast zajmie podobną pozycję względem Urana. Jak już wspomniałem obie planety w listopadzie świecą na niebie przez całą noc, górując około godz. 23 na wysokości ponad 50° . Jowisz osiągnie jasność $-2,9^m$ przy średnicy tarczy $49''$. Uran świeci blaskiem $+5,6^m$. Między planetami utrzymuje się odległość 13° .

27 listopada Srebrny Glob przejdzie przez pełnię, wędrując 9° na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka. Dobę później jego tarcza zmniejszy blask do 98% i przeniesie się na pozycję 2° na wschód od El Nath. Na koniec miesiąca Księżyc w fazie 85% odwiedzi Polluksa w Bliźniątach, zbliżając się doń na 2° . Odwiedzi zatem ten sam obszar nieba, przez który przechodził w pierwszych dniach miesiąca.

W listopadzie co roku promieniują meteory ze słynnego roju Leonidów. Maksimum ich aktywności przypada w nocy z 17 na 18 listopada. Niestety w tym roku można się spodziewać około 20 zjawisk na godzinę. Znajdujący się jakieś 10° na północ od Regulusa radiant roju wschodzi ok. godz. 22 i 7 godzin później wznosi się na wysokość prawie 60° . Przy nieobecności Księżyca w tym roku warunki ich obserwacji są bardzo dobre. A są to szybkie meteory, ich prędkość zderzenia z naszą atmosferą wynosi 71 km/s. Stąd są na ogół bardzo jasne i często pozostawiają po sobie smugi dymu.

Innymi słynnymi listopadowymi rojami meteorów są Tauridy Południowe i Północne. Pierwszy rój maksimum aktywności osiąga 5 dnia miesiąca, drugi zaś tydzień później. Radianty obu rojów znajdują się pod Plejadami w Byku (radiant drugiego nieco bliżej Menkara w Wielorybie) i górują około północy na wysokości ponad 50° . Oba roje nie są obfite, można liczyć zaledwie na kilka zjawisk na godzinę, są też znacznie wolniejsze od Leonidów, bo ich prędkość wynosi poniżej 30 km/s, obfitują za to w jasne bolidy. Warto zatem wybrać się na ich obserwację. Nie przeszkodzi w nich nawet Księżyc po ostatniej kwadrze.

Ariel MAJCHER

Nagrody Nobla 2023

Tegoroczną Nagrodę Nobla z Fizyki za *metody doświadczalne, które pozwalają wytwarzać attosekundowe impulsy światła umożliwiające badanie dynamiki elektronów w materii*, otrzymali:

- Pierre Agostini,
The Ohio State University, Columbus, USA,
- Ferenc Krausz,
Max Planck Institute of Quantum Optics, Garching
i Ludwig-Maximilians-Universität München, Niemcy,
- Anne L’Huillier,
Lund University, Szwecja.

Nie tak dawno (Δ_{20}^4 , Δ_{20}^5) Piotr Fita w swoim dwuczęściowym artykule (za który otrzymał również bardzo prestiżową Nagrodę Dziekanów za najlepszy artykuł w *Delcie*) objaśniał, za co przyznano Nagrodę Nobla z Fizyki w roku 2018. Połowę tej nagrody otrzymali wtedy Gérard Mourou i Donna Strickland za *metodę generowania ultrakrótkich impulsów laserowych o wysokiej energii*.

Czym są nagrodzone w 2018 roku femtosekundowe impulsy światła (trwające od kilku do kilkuset fs), bardzo obrazowo opisał w Δ_{20}^5 Piotr Fita. Zachęcam do zajrzenia do tego tekstu. Przypomnijmy tylko, że femtosekunda (fs) to 10^{-15} s. Czas trwania impulsów generowanych przez Noblistów z roku 2023 jest jeszcze krótszy i schodzi poniżej magicznej granicy 1 fs, dlatego ich długość wyraża się w attosekundach ($1 \text{ as} = 10^{-18} \text{ s} = 10^{-3} \text{ fs}$). Na razie są to setki attosekund, ale to już wystarcza, żeby zacząć oswajając się z nowym terminem – *fizyka attosekundowa* i zapamiętać znaczenie kolejnego przedrostka, czyli *atto*, który znaczy 10^{-18} . Zapewne stanie się teraz modny i używany coraz częściej.

Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że w odstepie kilku lat Nagrodę Nobla z Fizyki przyznano za bardzo podobne odkrycia. Jak zwykle, okazuje się jednak, że diabeł tkwi w szczegółach, i nagrody przyznano za pokrewne, ale jednak różne odkrycia.

Aby zejść poniżej 1 fs z długością impulsu, nie wystarczy doskonalic metody wytwarzania impulsów femtosekundowych, opisane w Δ_{20}^5 . Na drodze stoi pewien fundamentalny problem, który musieli pokonać tegoroczni Nobliści. Skracanie długości trwania impulsu przekłada się na skracanie długości tego impulsu w przestrzeni. W pewnym momencie dochodzimy do długości przestrzennej impulsu, która staje się porównywalna z długością fali. Impuls na pewno nie może być krótszy od tej długości, a zwykle jest co najmniej kilka razy dłuższy. Aby więc wytworzyć impulsy krótsze niż 1 fs, konieczne było wykorzystanie do tego fali o dużo mniejszej długości niż światło widzialne, czyli nadfioletu. A do generowania attosekundowych impulsów w nadfiolecie potrzebne było stworzenie zupełnie nowych metod – i za to właśnie została przyznana tegoroczna Nagroda Nobla z Fizyki.

Do czego mogą przydać się tak krótkie impulsy? Do badania procesów zachodzących bardzo szybko. W Internecie można znaleźć wiele filmów nagrywanych bardzo szybkimi kamerami, na których w zwolnionym tempie można zobaczyć kule karabinowe przebijające przedmioty, pękające balony z wodą, tłuczone szkło itp. Filmy kręcone są kamerami rejestrującymi tysiące, dziesiątki albo nawet setki tysięcy klatek na sekundę. Następnie odtwarzane są z prędkością 25 klatek na sekundę, co pozwala nam zobaczyć procesy, które normalnie trwają krócej niż przysłowiowe mgnienie oka i dlatego nie jest możliwe zaobserwowanie ich bezpośrednio. Ultrakrótkie impulsy laserowe wykorzystuje się do badania bardzo szybkich procesów w cząsteczkach, np. tworzenia wiązań chemicznych. Impuls spełnia rolę podobną do roli lampy błyskowej lub stroboskopu w tradycyjnej fotografii – pozwala na próbkowanie i obrazowanie badanej cząsteczki w poszczególnych etapach badanego procesu. Istotne jest, aby czas trwania następujących po sobie impulsów (błysków) był znacznie krótszy niż czas samego procesu.

Impulsy femtosekundowe pozwalały na śledzenie przebiegu reakcji chemicznych lub obserwowanie, jak w czasie drgań cząsteczek poruszają się poszczególne atomy. Impulsy attosekundowe umożliwiają śledzenie losów pojedynczych elektronów w atomach i cząsteczkach. Czyli fizyka attosekundowa daje możliwość badania procesów zachodzących jeszcze szybciej, których nie można było badać w ramach fizyki femtosekundowej.

Tegoroczna Nagroda Nobla z Chemii została natomiast przyznana za badania z pogranicza chemii i fizyki. Za *odkrycie i syntezę kropek kwantowych* uhonorowani zostali:

- Mouni G. Bawendi,
Massachusetts Institute of Technology (MIT),
Cambridge, USA,
- Louis E. Brus,
Columbia University, Nowy York, USA,
- Alexei I. Ekimov,
Nanocrystals Technology Inc., Nowy York, USA.

Kropki kwantowe stanowią od wielu lat obiekt zainteresowania zarówno chemików, fizyków, jak i inżynierów. Są to cząsteczki tak małe, że ujawniają się w nich efekty kwantowe, to znaczy, że do opisanie ich niezwykłych własności niezbędna jest mechanika kwantowa. Jedną z tych własności jest np. zależność koloru kropki od rozmiaru – znalazła już zastosowanie w konstrukcji wyświetlaczy i monitorów (technologia QLED). Ale na tym nie kończy się lista ciekawych własności kropek kwantowych.

Obie nagrody dotyczą fascynujących zjawisk i zasługują na dokładniejsze omówienie w osobnych artykułach na łamach *Delty*. Autorzy już ostrzą pióra, więc *stay tuned!*

Szymon CHARZYŃSKI



Kongruencje w akcji

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Kongruencje pojawiały się już kilka razy w Kąciku, ale zawsze grały rolę co najwyżej drugoplanową. Tym razem będzie inaczej.

Niech a, b i n będą liczbami całkowitymi. Kongruencję $a \equiv b \pmod{n}$ (czytaj: a przystaje do b modulo n) możemy zdefiniować na dwa równoważne sposoby:

- (1) Liczby a, b dają tę samą resztę z dzielenia przez n .
- (2) Liczba n dzieli $a - b$.

Będziemy tutaj używać krótszej notacji: $a \equiv_n b$.

Z (1) natychmiast wynikają własności:

$$a \equiv_n a, \quad a \equiv_n b \Rightarrow b \equiv_n a, \quad a \equiv_n b \wedge b \equiv_n c \Rightarrow a \equiv_n c.$$

Kongruencje modulo n możemy dodawać, odejmować i mnożyć stronami, czyli jeśli $a \equiv_n b$ oraz $c \equiv_n d$, to

$$a \pm c \equiv_n b \pm d \quad \text{oraz} \quad ac \equiv_n bd.$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że liczby $(a \pm c) - (b \pm d) = (a - b) \pm (c - d)$ oraz $ac - bd = c(a - b) + b(c - d)$ są podzielne przez n na mocy (2).

Dzięki możliwości mnożenia kongruencji stronami można wykazać indukcyjnie, że jeśli $a \equiv_n b$, to $a^k \equiv_n b^k$ dla naturalnych k .

Pierwiastkowania kongruencji na ogół wykonywać nie można. Na przykład zachodzi $8 \equiv_7 1$, ale po wyciągnięciu obustronnie pierwiastka sześciennego otrzymamy nieprawdziwą kongruencję $2 \equiv_7 1$.

Najogólniejszym wnioskiem z powyższych faktów jest następujące twierdzenie: dla wielomianu P o współczynnikach całkowitych zachodzi implikacja

$$x \equiv_n y \Rightarrow P(x) \equiv_n P(y).$$

Dla dowodu niech $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d$. Z kongruencji $x \equiv_n y$ otrzymujemy $x^k \equiv_n y^k$, a po pomnożeniu przez a_k mamy $a_kx^k \equiv_n a_ky^k$. Wystarczy teraz zsumować ostatnią kongruencję dla $k = 0, 1, 2, \dots, d$.

Jeśli $n = x - y \neq 0$, to oczywiście $x \equiv_n y$. Wnioskiem z tego jest podzielność $x - y \mid P(x) - P(y)$ dla $x \neq y$ (jest to twierdzenie 2 z Kącika 12. w Δ_{19}^{12} – tam można znaleźć inny dowód).

Z dzieleniem jest trochę trudniej – można je wykonać tylko w szczególnych okolicznościach. Niech $a \equiv_n b$ oraz $c \equiv_n d$. Przyjmijmy, że $c \mid a$ i $d \mid b$. Jeśli dodatkowo $\text{NWD}(c, n) = 1$, to wówczas $\frac{a}{c} \equiv_n \frac{b}{d}$. Aby to wykazać, zauważmy, że $a - b = c \cdot \frac{a}{c} - d \cdot \frac{b}{d} \equiv_n c \cdot \frac{a}{c} - c \cdot \frac{b}{d} = c(\frac{a}{c} - \frac{b}{d})$. Ostatnia liczba jest podzielna przez n oraz $\text{NWD}(c, n) = 1$, więc $n \mid \frac{a}{c} - \frac{b}{d}$ (zobacz (1) w 29. Kąciku, w Δ_{21}^5).

Z powyższej własności najczęściej korzysta się w szczególnym przypadku $c = d$ oraz gdy n jest liczbą pierwszą.

Zadania

1. Liczby a_1, a_2, \dots, a_n są całkowite. Niech d będzie wspólnym dzielnikiem liczb $a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$. Udowodnić, że $d \mid a_1 a_2 \dots a_n - 1$.
2. Dane są takie liczby całkowite dodatnie d, m, n , że $d \mid mn^4 - 1$ i $d \mid m^4n - 1$. Wykazać, że $d \mid n^{15} - 1$.
3. Liczby naturalne n i k są nieparzyste. Dowieść, że liczba $1^k + 2^k + \dots + n^k$ dzieli się przez n .
4. Liczby a, b, c są całkowite. Liczba nieparzysta n jest dzielnikiem liczb $a + b + c$ i $a^2 + b^2 + c^2$. Wykazać, że liczby a^3, b^3, c^3 dają takie same reszty z dzielenia przez n .
5. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Liczby całkowite x, y, z spełniają równości: $P(x) = y, P(y) = z, P(z) = x$. Wykazać, że $x = y = z$.
6. Niech p będzie liczbą pierwszą. Liczby całkowite x_1, x_2, \dots, x_p spełniają podzielności $p \mid x_1 x_2 \dots x_k - k$ dla $k = 1, 2, \dots, p$. Udowodnić, że liczby x_1, x_2, \dots, x_p są różne.
7. Liczby a i b są całkowite, a $p > 2$ jest liczbą pierwszą, która nie dzieli ab . Liczby $a^2 + b^2$ i $a^3 + b^3$ dają resztę 1 z dzielenia przez p . Dowieść, że $p \mid a + b + 2$.

Wskazówki do zadań
 1. Pomnożyć stronami kongruencje $a_i \equiv_n d$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.
 2. Kongruencję $mx \equiv_n d$ i podnieść obustronnie do potęgi 4. Sprawdzić, że tak otrzymane równanie można podzielić przez m^4 .
 3. Uzasadnić, że $k^2 \equiv_n (n - k)^2$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, [n/2]$.
 4. Kongruencję $-a \equiv_n b + c$ podnieść do kwadratu i odjąć od niej $-a^2 \equiv_n b^2 + c^2$. Można stąd otrzymać $a^3 \equiv_n abc$.
 5. Jeśli pewne dwie liczby x, y , z są równe, to $x = y = z$. Przypuśćmy, że są to trzy różne liczby. Wtedy $x - y \mid P(x) - P(y)$ i $y - z \mid P(y) - P(z)$, zachodzą też dwie analogiczne podzielności. Wnioskujeśmy, że $|x - y| = |y - z| = |z - x|$, co daje $x = y = z$.
 6. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 7. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 8. Jeśli pewne dwie liczby x, y , z są równe, to $x = y = z$.
 9. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 10. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 11. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 12. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 13. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 14. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 15. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 16. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 17. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 18. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 19. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 20. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 21. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 22. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 23. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 24. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 25. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 26. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 27. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 28. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 29. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 30. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 31. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 32. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 33. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 34. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 35. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 36. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 37. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 38. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 39. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 40. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 41. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 42. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 43. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 44. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 45. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 46. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 47. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 48. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 49. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 50. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 51. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 52. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 53. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 54. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 55. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 56. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 57. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 58. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 59. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 60. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 61. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 62. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 63. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 64. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 65. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 66. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 67. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 68. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 69. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 70. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 71. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 72. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 73. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 74. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 75. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 76. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 77. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 78. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 79. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 80. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 81. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 82. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 83. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 84. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 85. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 86. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 87. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 88. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 89. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 90. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 91. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 92. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 93. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 94. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 95. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 96. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 97. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 98. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 99. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.
 100. Zauważamy, że $x^k \equiv_n d$ dla $k > 1$.

Zapraszamy na Maraton Wykładowy z okazji 50-lecia Delty!



**7 grudnia, Wydział Fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego**

Więcej informacji na stronie deltami.edu.pl/50-lecie