

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



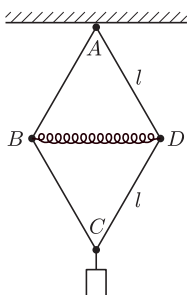
### Rozwiązania zadań z numeru 4/2012

Redaguje Ewa CZUCHRY

Przypominamy treść zadań:

**536.** Na pionowej, obracającej się ze stałą prędkością  $\omega$  osi zamocowany jest poziomo sztywny, nieważki pręt. Wzdłuż niego mogą poruszać się bez tarcia dwie kuleczki, każda o masie  $m$ , połączone sprężyną o stałej sprężystości  $k$  – obie leżą po tej samej stronie osi obrotu. Taka sama sprężyna łączy kulkę bliższą osi z punktem zamocowania osi i pręta. Nierozciągnięte sprężyny mają długość  $l_0$  każda. Znaleźć długości obu sprężyn podczas ruchu. Dla jakich parametrów uzyskane rozwiązanie ma sens fizyczny?

**537.** Cztery nieważkie pręty o długości  $l$ , połączone przegubami w romb, zostały za przegub  $A$  podwieszony na suficie (rys. 1). Przeciwległy przegub  $C$  obciążono ciężarkiem  $N$ , a pozostałe przeguby  $B$  i  $D$  rozparto sprężyną o długości  $\frac{3}{2}l$  i stałej sprężystości  $k$ . W położeniu równowagi okazało się, że pręty są nachylone do pionu pod kątem  $\alpha = 30^\circ$ . Znaleźć okres małych drgań ciężarka.



**536.** Oznaczmy przez  $l_1$  i  $l_2$  szukane długości sprężyn. Dla kulek poruszających się ruchem harmonicznym o częstotliwości  $\omega$  spełnione są równania:

$$m\omega^2 l_1 = k(l_1 - l_0) - k(l_2 - l_0), \quad m\omega^2(l_1 + l_2) = k(l_2 - l_0).$$

Stąd wyznaczamy:

$$l_1 = \frac{l_0}{1 - 3\beta + \beta^2}, \quad l_2 = l_1(1 - \beta),$$

gdzie  $\beta = \frac{m\omega^2}{k} > 0$ . Rozwiązanie to ma sens fizyczny, gdy obliczone wartości  $l_1$  i  $l_2$  są dodatnie, czyli

$$1 - 3\beta + \beta^2 > 0, \quad 1 - \beta \geq 0.$$

Z drugiego warunku wynika  $\beta \leq 1$ , a z drugiego  $\beta > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \approx 2,6$  lub  $\beta < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ . Ostatecznie otrzymujemy  $0 < \beta < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ , czyli

$$\omega < \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}}.$$

**537.** Dla dowolnego odchylenia prętów od pionu o kąt  $\tilde{\alpha}$  pręty działają na ciężarek siłą  $F_1 = 2N \cos \tilde{\alpha}$ , a na sprężynę siłą  $F_2 = 2N \sin \tilde{\alpha}$ . Z prawa Hooke'a mamy  $F_2 = (\frac{3}{2}l - 2l \sin \tilde{\alpha})k$ , gdzie  $k$  jest stałą sprężyny. Zatem  $F_1 = \frac{3}{2}kl / \operatorname{tg} \tilde{\alpha} - 2kl \cos \tilde{\alpha}$ . Przy małej zmianie wysokości  $\Delta h$  ciężarka wokół położenia równowagi  $h_0 = 2l \cos \alpha$ , siła nań działająca zmienia się o

$$\Delta F = \frac{3}{2}kl \Delta(1 / \operatorname{tg} \tilde{\alpha}) - 2kl \Delta(\cos \tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha},$$

gdzie  $\Delta(1 / \operatorname{tg} \tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha} = \frac{d(1 / \operatorname{tg} \tilde{\alpha})}{d\tilde{\alpha}}|_{\tilde{\alpha}=\alpha} \Delta\alpha = -\Delta\alpha / \sin^2 \alpha$  oraz  $\Delta(\cos \tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha} = -\sin \alpha \Delta\alpha$ . Z drugiej strony  $\Delta h = -2l \sin \alpha \Delta\alpha$ , zatem

$$\Delta F = -5kl \Delta\alpha = -5k \Delta h,$$

przy czym uwzględniliśmy to, że  $\alpha = 30^\circ$ . Zatem okres małych drgań wynosi  $T = 2\pi \sqrt{m/5k}$ . Masę  $m$  znajdujemy z warunku równowagi:

$$\frac{3}{2} \frac{kl}{\operatorname{tg} \alpha} - 2kl \cos \alpha = mg.$$

Stąd  $m = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{kl}{g}$ . Ostatecznie, szukany okres drgań ciężarka wynosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{10g}}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 532 ( $WT = 3,55$ ) i 533 ( $WT = 2,50$ ) z numeru 2/2012

Jacek Piotrowski	Rzeszów	44,06
Michał Koźlik	Gliwice	42,72
Marian Łupieżowicz	Gliwice	41,85
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	36,71
Krzysztof Magiera	Łosiów	22,60

Pan Piotrowski zdobył 44 punkty po raz drugi.