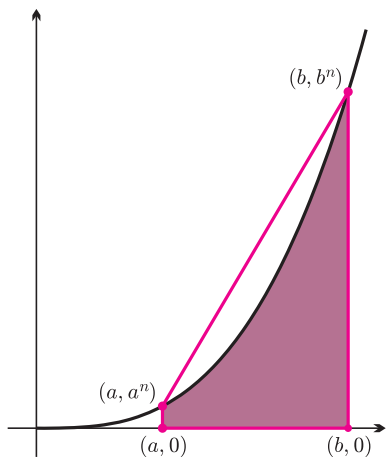


W Delcie nr 9 z 2012 r. pojawiło się zadanie: Udowodnić, że dla różnych liczb dodatnich a, b i liczby całkowitej $n > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Jest też tam dowód nierówności. Chciałbym dodać uzasadnienie geometryczne, czy też wyjaśnić jej znaczenie geometryczne.



Rys. 1

Przepiszmy nierówność w postaci

$$\frac{1}{n+1} \cdot (b^{n+1} - a^{n+1}) < \frac{1}{2} \cdot (b-a)(a^n + b^n).$$

Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że $a < b$. Otóż prawa strona to pole trapezu o podstawach a^n, b^n i wysokości $b-a$. Lewa to (zaciemnione) pole pod wykresem funkcji x^n ograniczonej do przedziału $[a, b]$. Ponieważ funkcja x^n jest ściśle wypukła na półprostej $[0, \infty)$, więc jej wykres znajduje się pod dowolną cięciwą. Oznacza to, że obszar pod wykresem jest zawarty w trapezie o wierzchołkach $(a, 0)$, $(b, 0)$, (b, b^n) i (a, a^n) . No i czego tu dowodzić?

Po rozwiązaniu podanym w miesięczniku jest uwaga o nierówności

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt[n]{\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}}$$

równoważnej

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} > (b-a) \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Niech $c = \frac{a+b}{2}$. Tym razem pole pod wykresem funkcji x^n ma okazać się większe od pola prostokąta o podstawie $b-a$ i wysokości $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n = c^n$. Wynika to z tego, że jeśli $0 < h < c$, to

$$(W) \quad c^n - (c-h)^n < (c+h)^n - c^n,$$

co jest równoważne nierówności

$$c^n < \frac{1}{2}((c+h)^n + (c-h)^n),$$

więc wynikającej natychmiast ze ściślej wypukłości funkcji x^n . Z nierówności (W) wynika od razu, że symetria względem punktu (c, c^n) przekształca obszar szary na zbiór zawarty, ale niewypełniający obszaru kolorowego, więc nierówność jest prawdziwa.

Wypukłość funkcji x^n na półprostej $[0, \infty)$ można wywnioskować z tego, że jej pochodna, czyli nx^{n-1} , jest ściśle rosnąca na $[0, \infty)$ lub – jeśli ktoś nie lubi pochodnych – z ciągłości funkcji x^n i nierówności

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

prawdziwej dla różnych liczb dodatnich x, y . Można jej dowieść indukcyjnie. Krok indukcyjny polega na pomnożeniu obu stron nierówności

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

przez liczbę dodatnią

$$\frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{x^n + y^n}$$

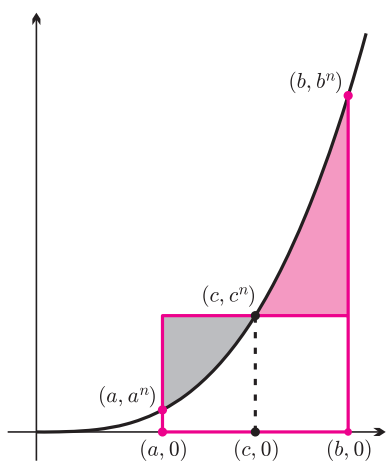
i stwierdzeniu, że

$$(x^{n+1} + y^{n+1}) \left(\frac{x+y}{2}\right)^n > (x^n + y^n) \left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1},$$

czyli

$$2(x^{n+1} + y^{n+1}) > (x^n + y^n)(x+y).$$

Ostatnia nierówność jest równoważna takiej $(x^n - y^n)(x-y) > 0$ prawdziwej w oczywisty sposób.



Rys. 2

*Instytut Matematyki,
Uniwersytet Warszawski