

Informatyczny kącik olimpijski (67): Karty

W tym kąciku zmierzmy się z zadaniem *Karty* z Potyczek Algorytmicznych 2013. Oryginalne sformułowanie zadania dotyczyło kart perforowanych, my jednak przedstawimy je nieco inaczej, przy okazji wprowadzając niejawnie kilka nieznaczących uproszczeń.

Dana jest kartka w kratkę rozmiaru $n \times n$, której część pól jest dozwolonych, a część zabronionych. Będziemy chcieli pokryć wszystkie pola dozwolone, używając do tego celu prostokątnej pieczątki o jak największym polu. Każde pole dozwolone możemy pokryć wielokrotnie, natomiast nie możemy nigdy położyć pieczątki na żadnym polu zabronionym. Pieczątki nie może w żadnym momencie wyjść poza obręb kartki – możemy założyć, że kartka jest otoczona kwadratową obwódką złożoną z pól zabronionych. Pieczątki nie można też obracać.

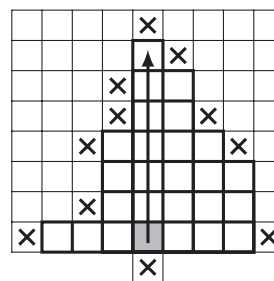
Zacznijmy od rozwiązania siłowego. Chcemy dla każdego prostokąta $a \times b$ sprawdzić, czy opisuje on poprawną pieczątkę. W tym celu na wszystkie możliwe sposoby spróbujemy przyłożyć ten prostokąt do kartki. Tak więc dla każdego pola (i, j) kartki sprawdzimy, czy prostokąt $a \times b$ o lewym górnym rogu w tym polu zawiera tylko pola dozwolone, a jeśli tak, zaznaczymy wszystkie te pola jako pokryte. Wszystkich prostokątów jest $O(n^2)$, możliwych przyłożeń prostokąta również $O(n^2)$, wreszcie sprawdzenie poprawności przyłożenia i pokrycie przypieczetowanych pól zajmuje czas $O(n^2)$. Łącznie rozwiązanie to działa w niezbyt ciekawej złożoności czasowej $O(n^6)$.

Za pomocą dosyć standardowych technik można takie rozwiązanie przyspieszyć nawet o kilka rzędów złożoności. Zacniemy od tzw. *dwuwymiarowych sum prefiksowych*, czyli metody znanej z zadania *Mapy gęstości* z VIII Olimpiady Informatycznej. W metodzie tej dla każdego prostokąta „prefiksowego”, czyli prostokąta zawierającego lewy górny róg kartki, zapamiętujemy liczbę pól zabronionych w tym prostokącie. Prostokątów prefiksowych jest, rzecz jasna, $O(n^2)$, a żądane wartości możemy wyznaczyć, traktując pola dozwolone jako 1, zabronione jako 0 i dwukrotnie obliczając sumy prefiksowe, najpierw w wierszach, a potem w kolumnach kartki. Teraz sumę pól w dowolnym prostokącie wyraża się jako sumę i różnicę co najwyżej czterech wartości dla prostokątów prefiksowych. W ten sposób sprawdzenie poprawności przyłożenia pieczątki można zrealizować w czasie stałym. Podobnie można poradzić sobie z pokryciem przypieczetowanych pól (jak?). To pozwala zredukować złożoność czasową rozwiązania do $O(n^4)$.

Pocznijmy teraz jedno proste spostrzeżenie dotyczące monotoniczności pieczątek. Otóż jeżeli kartkę można pokryć pieczątką $a \times b$, to można ją też pokryć dowolną pieczątką $a' \times b'$, gdzie $a' \leq a$ oraz $b' \leq b$. Dla każdego a możemy więc za pomocą wyszukiwania binarnego wyznaczyć maksymalne b , takie że pieczątką $a \times b$ da się pokryć całą kartkę. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie o złożoności $O(n^3 \log n)$. Jeśli zamiast wyszukiwania binarnego wykonamy nieco bardziej finezyjne przeglądanie zbioru pieczątek, tzn. wraz z rosnącymi wartościami a będziemy rozważać coraz mniejsze wartości b , możemy obniżyć złożoność czasową rozwiązania do $O(n^3)$.

Istnieje jednak rozwiązanie działające w czasie liniowym względem rozmiaru planszy, czyli w czasie $O(n^2)$. Kluczem do otrzymania takiego rozwiązania jest przyjrzenie się polom „brzegowym”, czyli polom dozwolonym sąsiadującym z jakimś polem zabronionym. Oczywiście, każde takie pole musi zostać pokryte pieczątką. Chcielibyśmy w zwarty sposób opisać zbiór wszystkich rozmiarów pieczątek, którymi można to zrobić.

Spójrzmy na poniższy rysunek, na którym zamalowano jedno z pól brzegowych. Do pokrycia tego pola można użyć dowolnej pieczątki o wysokości 1 i szerokości co najwyżej 7, podobnie – dowolnej pieczątki o wysokości 2 i szerokości co najwyżej 5, dowolnej pieczątki o wysokości 3 i szerokości co najwyżej 5 itd.



Inaczej można na to spojrzeć tak: mamy pewien zbiór *złych* pieczątek – w powyższym przykładzie są to 1×8 , 2×6 , 3×6 , 4×5 , 5×3 , 6×3 , 7×2 i 8×1 – i szukamy pieczątki, która nie zawiera żadnej złej pieczątki (jako podprostokąta). Podobnie możemy wyznaczyć złe pieczątki dla każdego innego pola brzegowego, pamiętając, że pole brzegowe może sąsiadować z odpowiadającym mu polem zabronionym w jednym z czterech kierunków. Pieczątki, której szukamy, będzie pieczątką o maksymalnym polu niezawierającą żadnej złej pieczątki.

Zajmijmy się teraz implementacją algorytmu. Przede wszystkim dla każdego dozwolonego pola planszy będziemy pamiętały odległość do najbliższego pola zabronionego w każdym z czterech kierunków. To pozwoli nam wyznaczać kolejne złe pieczątki o coraz większych wysokościach w czasie stałym. Dalej, na zbiorze rozmiarów złych pieczątek zbudujemy dwuwymiarowe sumy prefiksowe, co pozwoli nam łatwo określać, jakie pieczątki nie zawierają w sobie żadnej z nich. Wszystkie wymienione operacje można bez problemu wykonać w czasie $O(n^2)$. Złożoność rozwiązania zależy jeszcze od liczby wyznaczonych złych pieczątek. Liczba ta jest równa sumie długości odcinków przebytych przez nasz algorytm (strzałka na rysunku). Jednak każde pole dozwolone znajduje się na dokładnie czterech takich odcinkach, po jednym w każdym kierunku. Stąd suma długości odcinków to co najwyżej $4n^2$ i całe rozwiązanie ma złożoność $O(n^2)$.

Wiemy, że wynikową pieczątką można pokryć wszystkie pola brzegowe. Należałoby jeszcze wykazać, że tak skonstruowaną pieczątką można pokryć także pozostałe pola dozwolone. Dowód tego faktu pozostawiamy do przemyślenia Czytelnikom. Można także obejrzeć film z omówieniem: <http://youtu.be/glryefmxzZw>.

Jakub RADOSZEWSKI