

# Złoty podział w sortowaniu

Marcin PECZARSKI\*

Złoty podział odcinka, zwany też złotą proporcją, jest doskonale znany. Okazuje się, że podobną własność można sformułować dla problemu sortowania. Niech  $P = (X, \preceq)$  będzie *zbiorem częściowo uporządkowanym*, czyli zbiorem  $X$  wyposażonym w relację częściowego porządku  $\preceq \subseteq X \times X$ , spełniającą warunki:

- (zwrotność)  $x \preceq x$  dla każdego  $x \in X$ ;
- (przechodniość) jeśli  $x \preceq y$  i  $y \preceq z$ , to  $x \preceq z$  dla każdych  $x, y, z \in X$ ;
- (antysymetryczność) jeśli  $x \preceq y$  i  $y \preceq x$ , to  $x = y$  dla każdych  $x, y \in X$ .

Zbiorem *liniowo uporządkowanym* nazywamy zbiór częściowo uporządkowany, w którym każde dwa elementy są porównywalne, czyli spełniony jest dodatkowy warunek:

- (spójność)  $x \preceq y$  lub  $y \preceq x$  dla każdych  $x, y \in X$ .

Rozszerzeniem liniowym zbioru częściowo uporządkowanego  $P = (X, \preceq_P)$  nazywamy każdy zbiór liniowo uporządkowany  $Q = (X, \preceq_Q)$ , który zachowuje relację porządku, czyli  $\preceq_P \subseteq \preceq_Q$ . Rozszerzenie liniowe utożsamiamy z permutacją elementów zbioru  $X$ .

W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko zbiory skończone. Dla przykładu niech  $X = \{a, b, c\}$ . Totalnym nieporządkiem na tym zbiorze jest zbiór częściowo uporządkowany  $P_0 = (X, \preceq_0)$ , taki że nie zachodzi  $x \preceq_0 y$  dla dowolnych różnych  $x, y \in X$ .  $P_0$  ma sześć rozszerzeń liniowych:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Sortowanie zbioru częściowo uporządkowanego polega na zadawaniu pytań o relację między jego elementami w celu wybrania jednego z jego rozszerzeń liniowych. Niech  $P_1 = (X, \preceq_1)$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, który chcemy posortować. Jeśli na pytanie o elementy  $x$  i  $y$  uzyskamy odpowiedź, że  $x \preceq y$ , to rozszerzamy relację  $\preceq_1$  o tę informację. Wynikiem jest nowa relacja  $\preceq_2$  i nowy zbiór częściowo uporządkowany  $P_2 = (X, \preceq_2)$ . Formalnie relacja  $\preceq_2$  jest *domknięciem przechodnim* relacji  $\preceq_1$  uzupełnionej o porównanie  $x \preceq y$ .

*Domknięcie przechodnie* relacji dwuargumentowej  $\varrho$  na zbiorze  $X$  jest to najmniejsza (w sensie inkluzji) relacja przechodnia  $\varrho'$  na zbiorze  $X$ , taka że  $\varrho \subseteq \varrho'$ .

Sortowanie kończy się, gdy w wyniku zadawania kolejnych pytań otrzymamy zbiór liniowo uporządkowany. Oczywiście, nie ma sensu zadawanie pytania, na które znamy odpowiedź, czyli pytania o relację między elementami  $x$  i  $y$ , jeśli  $x \preceq_1 y$  lub  $y \preceq_1 x$ . Dla zachowania ścisłości przyjmujemy, że po zadaniu takiego pytania relacja nie zmienia się.

Wróćmy do naszego przykładu trójelementowego zbioru  $X$  i totalnego nieporządku na nim. Chcąc go posortować, możemy zadać pytanie o relację między elementami  $a$  i  $b$ . Jeśli odpowiedzią jest  $a \preceq b$ , to nadal możliwe są rozszerzenia liniowe

$$(a, b, c), (a, c, b), (c, a, b).$$

Jeśli natomiast odpowiedź brzmi  $b \preceq a$ , to pozostają rozszerzenia liniowe

$$(b, a, c), (b, c, a), (c, b, a).$$

Zauważmy, że wykonanie porównania dzieli zbiór rozszerzeń liniowych na dwa rozłączne podzbiory. Niech  $e(P)$  oznacza liczbę rozszerzeń liniowych zbioru częściowo uporządkowanego. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego  $P$  jeśli  $P'$  i  $P''$  oznaczają rozszerzenie  $P$  odpowiednio o warunek  $x \preceq y$  i  $y \preceq x$ , to  $e(P) = e(P') + e(P'')$  i przynajmniej jedna z wartości  $e(P')$  lub  $e(P'')$  jest nie mniejsza niż  $\frac{1}{2}e(P)$ .

Zastanówmy się, jaka jest minimalna liczba porównań  $C(P)$  potrzebna i zawsze wystarczająca do posortowania danego zbioru częściowo uporządkowanego  $P$ . Gdyby było tak, jak w powyższym przykładzie, że zawsze możemy podzielić zbiór rozszerzeń liniowych na równoliczne podzbiory, to wystarczyłoby  $\lceil \log_2 e(P) \rceil$  porównań. Niestety, nie zawsze jest to możliwe. Rozważany przykład pokazuje, że możemy uzyskać trójelementowy zbiór rozszerzeń liniowych i wtedy najlepszy możliwy do uzyskania podział jest w stosunku 1 : 2. Okazuje się, że najprawdopodobniej jest to przypadek najbardziej pesymistyczny. Mówi o tym hipoteza 1/3-2/3 sformułowana wiele lat temu niezależnie przez Kislicyna, Fredmana i Liniala.

**Hipoteza 1.** *Dla dowolnego skończonego zbioru częściowo uporządkowanego  $P$ , który nie jest liniowo uporządkowany, zawsze możemy wskazać dwa elementy, takie że w wyniku ich porównania (niezależnie od wyniku tego porównania) otrzymujemy rozszerzenie  $R$ , dla którego zachodzi*

$$\frac{1}{3}e(P) \leq e(R) \leq \frac{2}{3}e(P).$$

Powyższą hipotezę udowodniono dla wielu przypadków szczególnych, co pozwala wierzyć w jej prawdziwość. Jednak w ogólnym przypadku nadal pozostaje jednym z ważniejszych problemów otwartych teorii zbiorów częściowo uporządkowanych. Prawdziwość tej hipotezy implikuje możliwość posortowania zbioru częściowo uporządkowanego  $P$  za pomocą maksymalnie  $\lceil \log_{1,5} e(P) \rceil$  porównań (przypomnijmy, że  $\log_{1,5} n > \log_2 n$  dla  $n > 1$ ).

Czy można lepiej? Wydaje się, że tak. Autor tego artykułu sformułował kilka lat temu **hipotezę złotego podziału** dla zbiorów częściowo uporządkowanych.

\*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Hipoteza 2.** Dla dowolnego skończonego zbioru częściowo uporządkowanego  $P$ , który nie jest liniowo uporządkowany, zawsze możemy wskazać dwa kolejne porównania, takie że niezależnie od ich wyniku otrzymujemy kolejno rozszerzenia  $R$  i  $S$ , dla których zachodzi

$$e(P) \geq e(R) + e(S).$$

Hipoteza złotego podziału jest bardziej ogólna od hipotezy 1/3-2/3. Innymi słowy, prawdziwość hipotezy złotego podziału implikuje prawdziwość hipotezy 1/3-2/3, gdyż każdy kontrprzykład dla hipotezy 1/3-2/3 jest również kontrprzykładem dla hipotezy złotego podziału. Załóżmy, że  $P$  jest kontrprzykładem dla hipotezy 1/3-2/3. Wtedy dla każdego porównania na  $P$  jeden z jego wyników daje nierówność  $e(R) > \frac{2}{3}e(P)$ . Oczywiście, dla każdego porównania na  $R$  możemy wskazać jego wynik, taki że  $e(S) \geq \frac{1}{2}e(R)$ . Stąd  $e(R) + e(S) \geq \frac{3}{2}e(R) > e(P)$  i otrzymaliśmy kontrprzykład dla hipotezy złotego podziału.

Jak można się domyślić, hipotezy złotego podziału również nie udało się udowodnić w ogólności, ale dowiedziono jej w tak wielu przypadkach szczególnych, że mamy podstawy, aby wierzyć w jej prawdziwość.

Zmierzając do finału, zobaczymy dwa proste twierdzenia, które uzasadniają nazwę hipotezy. Niech  $F_n$  będzie  $n$ -tą liczbą Fibonacciego, rozpoczynając od  $F_1 = F_2 = 1$ , a  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$  stałą złotej proporcji.

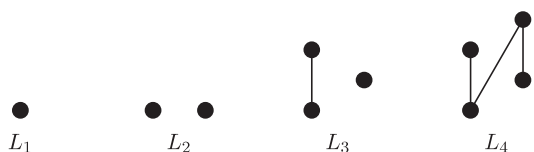
**Twierdzenie 1.** Jeśli hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa i zachodzi  $e(P) < F_{n+3}$ , to  $C(P) \leq n$ .

Dowód prowadzimy przez indukcję. Dla  $n = 0$  z założenia wynika, że  $e(P) < F_3 = 2$ , czyli zbiór  $P$  ma tylko jedno rozszerzenie liniowe, więc jest już posortowany. Dla  $n = 1$  zachodzi  $e(P) < F_4 = 3$ , czyli  $P$  ma co najwyżej dwa rozszerzenia liniowe, które można rozróżnić jednym porównaniem.

Założmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla  $n - 1$  i  $n - 2$ . Niech  $e(P) < F_{n+3}$ . Wybieramy dwa porównania, aby spełnić nierówność  $e(P) \geq e(R) + e(S)$ , gdzie  $R$  i  $S$  oznaczają zbiory częściowo uporządkowane otrzymane odpowiednio po pierwszym i drugim porównaniu. Z własności liczb Fibonacciego wynika, że zachodzi przynajmniej jedna z nierówności  $e(R) < F_{n+2}$  lub  $e(S) < F_{n+1}$ . Z założenia indukcyjnego w pierwszym przypadku możemy posortować  $R$  za pomocą co najwyżej  $n - 1$  porównań, a w drugim posortować  $S$  za pomocą co najwyżej  $n - 2$  porównań. Zatem w obu przypadkach możemy dokończyć sortowanie  $P$  tak, aby nie przekroczyć  $n$  porównań.

**Twierdzenie 2.** Jeśli hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa, to

$$\sup_P \frac{C(P)}{\log_\varphi e(P)} = 1.$$



W powyższym twierdzeniu kres górny jest po wszystkich skończonych zbiorach częściowo uporządkowanych, których dotyczy hipoteza złotego podziału, czyli skończonych i nieuporządkowanych liniowo. Niech  $P$  będzie takim zbiorem częściowo uporządkowanym. Niech  $n$  będzie liczbą porównań wymaganych do jego posortowania ( $n \geq 1$  i nie można go posortować za pomocą  $n - 1$  porównań). Z poprzedniego twierdzenia wynika, że  $e(P) \geq F_{n+2}$ . Wiadomo, że ciąg Fibonacciego spełnia nierówność  $F_{n+2} > \varphi^n$  dla  $n \geq 1$ , zatem

$$\frac{C(P)}{\log_\varphi e(P)} \leq \frac{n}{\log_\varphi F_{n+2}} < 1.$$

Linial wskazał ciąg zbiorów częściowo uporządkowanych  $L_n$ , nazywanych drabinami, takich że  $L_n$  ma  $n$  elementów,  $C(L_n) = n - 1$  oraz  $e(L_n) = F_{n+1}$ . Rysunek u dołu strony pokazuje diagramy Hassego kilku początkowych zbiorów  $L_n$  i pozwala odgadnąć regułę ich konstrukcji oraz genezę ich nazwy.

Diagram Hassego jest to sposób przedstawienia zbioru częściowo uporządkowanego  $(X, \preceq)$  za pomocą grafu nieskierowanego. Elementy przedstawia się jako węzły, a relacje między elementami zaznacza się, łącząc te węzły krawędziami. Przy czym rysuje się tylko niezbędne krawędzie. Jeśli  $x \preceq y$ , to element  $x$  rysuje się niżej niż element  $y$ , a krawędź między nimi rysuje się tylko wtedy, gdy nie istnieje taki element  $z \in X \setminus \{x, y\}$ , że  $x \preceq z \preceq y$ .

Ponieważ

$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

więc mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(L_n)}{\log_\varphi e(L_n)} = 1.$$

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że postulowanego ograniczenia tego  $C(P) \leq \log_\varphi e(P)$  nie da się już poprawić. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $P$  jest liniowo uporządkowany – wtedy  $e(P) = 1$  i  $C(P) = 0$ . Zauważmy też, że  $\log_{1.5} n > \log_\varphi n > \log_2 n$  dla  $n > 1$ . Nieco nieformalnie można powiedzieć, że podczas sortowania każde porównanie może zmniejszyć średnio liczbę rozszerzeń liniowych przynajmniej o współczynnik złotej proporcji. Tak właśnie jest dla drabin. Chcąc posortować drabinę  $L_n$ , należy porównać dwa jej elementy maksymalne. W wyniku zbiór jej rozszerzeń liniowych o licznosci  $F_{n+1}$  zostaje podzielony na dwa podzbiory o licznosci odpowiednio  $F_n$  i  $F_{n-1}$ , a problem redukuje się do posortowania odpowiednio drabiny  $L_{n-1}$  lub  $L_{n-2}$ .

Element maksymalny w zbiorze częściowo uporządkowanym  $(X, \preceq)$  jest to taki element  $x \in X$ , że nie istnieje element  $y \in X \setminus \{x\}$ , dla którego  $x \preceq y$ .

