Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2018

Zadania z matematyki nr 755, 756

Redaguje Marcin E. KUCZMA

755. Niech $P(x)$ będzie takim wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, że

$$P(x) + P''(x) \geqslant 2P'(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dowieść, że $P(x) \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

756. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wykazać, że dla każdego układu dodatnich liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \mathrm{NWW}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Scharakteryzować (dla ustalonego n) te układy $a_1, \ldots, a_n$ (dodatnich liczb całkowitych), dla których napisana nierówność staje się równością.

Zadanie 756 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2017

Przypominamy treść zadań:

747. Funkcja f, o wartościach rzeczywistych, jest określona, wypukła i różniczkowalna na zbiorze wszystkich liczb dodatnich; przy tym $|f'(n^2)| \geqslant 1/n^2$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Udowodnić, że funkcja f jest nieograniczona.

748. Czy można w pola tablicy o rozmiarach 8×8 wpisać liczby -1, 0, 1 (w każde pole jedną liczbę) tak, by sumy liczb w wierszach oraz sumy liczb w kolumnach utworzyły układ 16 różnych wartości? Czy odpowiedź zmieni się, gdy będziemy rozważali tablicę 14×14 (i wymagali 28 różnych wartości)?

747. Z wypukłości funkcji f wynika, że dla każdej pary liczb dodatnich x_0, x zachodzi nierówność

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Jeśli $f'(x_0) > 0$ w jakimkolwiek punkcie x_0, to prawa strona (1) przedstawia funkcję nieograniczoną z góry i mamy tezę.

Dalej zakładamy, że $f' \leqslant 0$ (na całym przedziale $(0, \infty)$). Warunek dany w założeniach mówi więc, że dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ mamy $f'(n^2) \leqslant -1/n^2$. W nierówności (1) podstawiamy $x_0 = n^2$, $x = (n-1)^2$, i otrzymujemy

$$f\big((n-1)^2\big) \geqslant f\big(n^2\big) + f'\big(n^2\big)(-2n+1);$$

stąd

$$f\big(n^2\big) - f\big((n-1)^2\big) \leqslant f'\big(n^2\big)(2n-1) \leqslant \leqslant \Big(-\frac{1}{n^2}\Big)(2n-1) \leqslant -\frac{1}{n}.$$

Wystarczy teraz przesumować te związki po $n = 1, \ldots, N$:

$$f\big(N^2\big) - f\big(0\big) \leqslant -\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}\Big).$$

Wyrażenie w nawiasie przybiera wartości dowolnie wielkie, zatem funkcja f jest (w rozważanym przypadku) nieograniczona z dołu.

748. Macierz (tabelkę) o wymaganej własności, rozmiaru $n \times n$, można utworzyć dla każdej liczby parzystej n (więc i dla 8, i dla 14). Przykładowa konstrukcja:

Niech $n = 2m$ i niech J oznacza macierz $m \times m$, złożoną z samych jedynek, zaś K – macierz $m \times m$, mającą jedynki na głównej przekątnej i nad nią, a poniżej przekątnej zera. Tworzymy macierz M rozmiaru $n \times n$ (o wyrazach $-1, 0, 1$):

$$M = \begin{bmatrix} K & J \\ -J & K{-}J \end{bmatrix} \qquad \text{(postać blokowa).}$$

Nietrudno sprawdzić, że sumy liczb w kolejnych kolumnach macierzy M tworzą ciąg rosnący wszystkich liczb całkowitych od $-m{+}1$ do m, natomiast sumy liczb w kolejnych wierszach tworzą ciąg malejący wszystkich liczb całkowitych od $2m$ do $-2m{+}1$, z pominięciem tych uzyskanych już jako sumy kolumn. Macierz M ma więc żądaną własność.

* * *

Liga matematyczna żyje pełnią życia. Zamykamy jej trzydziesty szósty sezon. Pojawiło się w niej 766 uczestników. Najstarszy (stażem) wystartował przed trzydziestu sześciu laty, wraz ze startem ligi. Lider zaliczył 18 czterdziestoczteropunktowych rund; wiceliderzy – po 13. Lider łącznej (nieoficjalnej) klasyfikacji M+F: 11 + 12 (!). Wszyscy oni wciąż w świetnej formie.

Liga żyje. Nie wszyscy jej uczestnicy żyją. Chwila smutnej zadumy nad tymi, którzy odeszli...

* * *

Teraz wybrane zadania (w skrótowym omówieniu). Wyjaśnienie skrótów: *WT* – współczynnik trudności; *LPR* – liczba poprawnych rozwiązań.

Zadanie **727.** [Trójkąt foremny (bok $n \geqslant 2$) podzielony na n^2 trójkącików; wierzchołki siatki białe/czarne. Ruch: zmiana koloru punktów na prostej zawierającej bok jakiegoś trójkącika. Można od stanu: *wszystkie białe* dojść do stanu: *dokładnie jeden czarny*?] (WT=3,22; LPR=4). Jest to możliwe dla $n = 2$, 3, niemożliwe dla $n \geqslant 4$. Argumentację z rozwiązania firmowego (przez analizę sytuacji na wybranych sześciokątach o boku 1) przedstawili **Piotr Kumor** i **Janusz Olszewski**. Dwa pozostałe dobre rozwiązania (**Szymon Kitowski**

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2016/17

Marcin Kasperski	–	3–43,83
Adam Dzedzej	–	2–43,22
Roksana Słowik	–	1–41,91
Franciszek S. Sikorski	–	1–39,71
Marek Gałecki	–	5–37,76
Jędrzej Garnek	–	2–37,64
Krzysztof Maziarz	–	37,45
Michał Koźlik	–	30,59
Michał Miodek	–	2–30,30
Krzysztof Kamiński	–	2–28,37
Marek Spychała	–	2–27,55
Paweł Najman	–	7–27,41
Piotr Kumor	–	13–24,90
Bartłomiej Pawlik	–	24,60
Paweł Duch	–	1–24,10
Tomasz Wietecha	–	11–22,21
Piotr Lipiński	–	1–20,58
Paweł Kubit	–	6–20,54
Janusz Wojtal	–	18,58
Jędrzej Biedrzycki	–	17,62
Jakub Węgrecki	–	16,27
Szymon Kitowski	–	15,89
Andrzej Kurach	–	15,88
Stanisław Bednarek	–	14,78

Legenda (przykładowo): stan konta 6–20,54 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 20,54 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 14 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2015, 2016 lub 2017.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

i **Adam Dzedzej**) były oparte na formalnych rachunkach w $\mathbf{Z}_2^3$ i prowadziły do tezy poprzez wykazanie, że jeśli zostaje jedyny punkt czarny, to musi on być albo środkiem wyjściowego trójkąta, albo środkiem jego boku. Były ponadto próby dowodów indukcyjnych, jednak z problemem logicznym: przy mechanicznym stosowaniu przesłanki indukcyjnej (do trójkąta zanurzonego w wyjściowym) zmienia się zbiór ruchów zabronionych – chodzi o proste przechodzące przez dokładnie jeden wierzchołek.

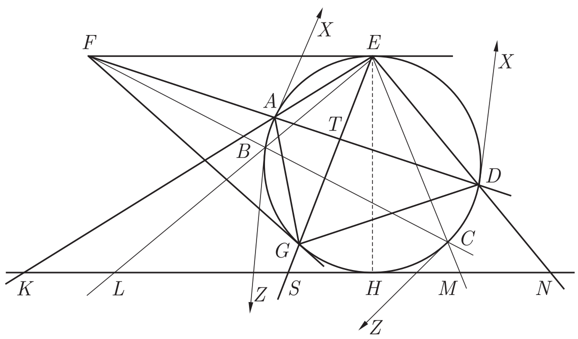
Zadanie **731.** [$f\colon\ \mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}\setminus\{0\};\ \ f(xyf(x+y))=f(x)+f(y)\Rightarrow f=?$] ($WT$=3,13; LPR=5 (7?)). Wychodzi $f(x)=1/x$. Dobre rozwiązania (jak firmowe): **J. Cisło**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**, **M. Spychała**; zaś z niewielkimi usterkami – **R. Borkowski** (czy f jest „na”?), **J. Węgrecki** (zero pojawia się w przeciwdziedzinie). **Z. Skalik** rozpoznał zadanie jako pochodzące z konkursu Nordic Math. Competition.

Zadanie **735.** [$0<a<1$; $\sup\{a^{\operatorname{tg}\alpha}+a^{\operatorname{ctg}\alpha}\colon\ \alpha\in(0,\pi/2)\}=?$] ($WT$=2,82; LPR=5 (6?)). Wszyscy rozpoczynali od pozbycia się zbędnej „trygonometrii”: chodzi o kres górny funkcji $f(x)=a^x+a^{1/x}$ po $x\in(0,\infty)$; równoważnie: po $x\in(0,1]$ (bowiem $f(x)=f(1/x)$). Dalej – mniej lub bardziej zgrabnie – rachunkiem różniczkowym. Kandydatem na wartość $\sup f$ jest większa z liczb $f(1)=2a$ oraz $\lim_{x\to0}f(x)=1$. Wystarczy wykazać, że $f(x)$ nie przekracza tej wartości, gdy $x\in(0,1)$. **Janusz Olszewski** – króciutko: jeśli punkt $c\in(0,1)$ jest taki, że $f'(c)=0$, wówczas $a^{1/c}=c^2a^c$; a ponieważ $2^c-c^2>1$ (co wynika z wklęsłości funkcji 2^t-t^2 w $[0,1]$), zatem

$$f(c)=a^c(1+c^2)<a^c\cdot2^c\leqslant\begin{cases}1 & \text{gdy } 0<a<1/2,\\ 2a & \text{gdy } 1/2\leqslant a<1,\end{cases}$$

i gotowe! Autorzy dobrych rozwiązań: **W. Bednarek**, **P. Kumor**, **J. Olszewski** (drugi sposób), **M. Spychała**, **T. Wietecha** oraz (z małą luką) **J. Cisło**.

Zadanie **737.** [Pięciokąt $ABCDE$ wpisany w okrąg; $F=BC\cap AD$, EF styczna do okręgu; druga równoległa styczna przecina EA, EB, EC, ED w punktach $K,L,M,N\Rightarrow|KL|=|MN|$] ($WT$=2,89; LPR=6). Kilka ładnych metod. **Jakub Węgrecki**: wystarczy pokazać, że środkowe (z E) w trójkątach ELM i EKN pokrywają się; a to są symediany w $\triangle ECB$ ($\sim\triangle ELM$) i $\triangle EDA$ ($\sim\triangle EKN$). Jeśli styczne w punktach A,D przecinają się w X, a styczne w punktach B,C przecinają się w Z, wówczas owe symediany to EZ oraz EX; zaś współliniowość X,E,Z wynika stąd, że punkt F leży na biegunowej AD punktu X oraz na biegunowej BC punktu Z, więc (przez dualność) X i Z leżą na biegunowej punktu F; a ona przechodzi przez E.



Podobne rozumowanie z użyciem symedian przeprowadził **Janusz Olszewski**, który ponadto przedstawił rozwiązanie firmowe oraz jeszcze trzeci dowód, chyba najcelniej ukazujący istotę zadania: jeśli biegunowa EG punktu F przecina proste KN i AD w punktach S i T, to punkty F,T,A,D tworzą czwórkę harmoniczną – więc punkty F_∞,S,K,N też (F_∞ to „punkt przecięcia” EF i KN, czyli punkt w nieskończoności); a to znaczy, że S jest środkiem KN – oraz, przez analogię, także środkiem LM; teza.

Rozwiązania zbliżone do firmowego podali także **Marek Spychała** oraz (z pomocą inwersji względem E) **Adam Dzedzej**. Rozwiązania rachunkowe: **Jerzy Cisło** i **Paweł Najman**.

Zadanie **739.** [$f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$; $\forall x\in\mathbf{R}\colon\ (x,f(x),f(f(x)),\ldots)$ ciąg arytmetyczny; $f=?$] (WT=1,55; LPR=9). Odpowiedź: $f(x)=x+\mathrm{const}$. Zadanie nietrudne, sporo dobrych rozwiązań, większość jak firmowe. Inne rozumowanie przedstawił **Tomasz Wietecha**, uzyskując bardzo znaczne wzmocnienie rezultatu: *Jeśli $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą oraz $\forall x\in\mathbf{R}\colon\ (x,f(x),f(f(x)))$ jest trójwyrazowym ciągiem arytmetycznym, to funkcja $g(x)=f(x)-x$ jest stała.*

Dowód: założeniem jest równanie funkcyjne $x+f(f(x))=2f(x)$; nietrudno z niego wynika, że f jest bijekcją $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}$; równanie przepisuje się jako $f(x)+f^{-1}(x)=2x$; zatem f jest rosnąca oraz $f^{-1}(x)=x-g(x)$, co po obłożeniu

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (13), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (18), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (11), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (6), J. Cisło (13), W. Bednarek (7), D. Kurpiel, P. Najman (7), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, A. Dzedzej, J. Fiett, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, M. Małogrosz, J. Małopolski, J. Mikuta, M. Miodek, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, M. Spychała, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

obu stron funkcją f i krótkim przekształceniu daje równanie dla funkcji g:

(1) $$g(x-g(x)) = g(x) \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}.$$

Stąd przez indukcję

(2) $$g(x-ng(x)) = g(x) \quad \text{dla } x \in \mathbf{R}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

Przypuśćmy, że $g \neq \mathrm{const}$; wówczas (dzięki ciągłości) można znaleźć takie liczby $a, b \in \mathbf{R}$, że wartości $u = g(a)$, $v = g(b)$ są niezerowe, niewspółmierne i jednakowego znaku. Przyjmijmy, że $u < v$ (przypadek $u > v$ jest analogiczny); weźmy przedział $(b-a, b-a+v-u)$. Dla pewnych $m, n \in \mathbf{N}$ liczba $nv - mu$ wpada do tego przedziału; to daje nierówność podwójną

(3) $$b - nv < a - mu < b - nv + (v-u).$$

Funkcja $f(x) = x + g(x)$ jest rosnąca, więc z lewej nierówności (3) wynika, że

(4) $$g(b-nv) - g(a-mu) < a - mu - b + nv;$$

teraz związek (2) pokazuje, że lewa strona (4) ma wartość $v - u$; zaś z prawej nierówności (3) widać, że prawa strona (4) na wartość mniejszą. To oczekiwana sprzeczność. Ciekawe równanie funkcyjne, efektowny dowód!

Zadanie **740.** $[F(x,y,z) = \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2};\ x,y,z > 0;\ x+y+z = 1;$ $\inf F = ?\,]$ (WT=2,72; LPR=4 (5?)). Niewielka liczba przysłanych prac była zaskoczeniem – ta funkcja wygląda tak prosto… no i rzeczywiście, wynik ($\inf F = 4$) można było uzyskać na wiele sposobów. Firmowe rozwiązanie (autor: **Witold Bednarek**) było ładnym zastosowaniem nierówności Jensena – tak nie rozumował jednak nikt. **Janusz Olszewski**, swoim zwyczajem, zaprezentował dwa sposoby: jeden to średnie, geometryczna i harmoniczna, liczb $1, \frac{x}{y^2+z^2}$ (i pozostałych dwóch takich par), skombinowane z nierównością CS (Cauchy–Schwarz); a drugi – to znów CS (jak (5) – niżej) i dokończenie przy użyciu nierówności Schura $\sum x^3 + 3xyz \geqslant \sum xy(x+y)$ w rozwinięciu $(x+y+z)^3$; ten drugi sposób znalazł również **Mikołaj Pater** (dowodząc oszacowania $F \geqslant 4$, jednak bez uzasadnienia, że 4 to kres dolny). **Tomasz Wietecha** użył rachunku różniczkowego w $\mathbf{R}^3$ (minimizacja przy warunku $x+y+z=1$); zaś **Paweł Kubit** znalazł zadanie w sieci.

Prosta postać funkcji F wręcz zapraszała do uogólnień; najbardziej oczywiste to funkcja symetryczna zmiennych $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, z których co najmniej dwie są dodatnie. **Piotr Kumor** pokazał, że i wówczas liczba 4 jest kresem dolnym wyrażenia

$$F_n = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{r^2 - x_k^2}\right), \qquad \text{gdzie } r^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

(dla $n = 3$ to nasze zadanie); a dowód zadziwia prostotą:

(5) $$F_n \geqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\sqrt{r^2 - x_k^2}}\right)^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^n \frac{2x_k^2}{r^2}\right)^2 = 4;$$

pierwsza z nierówności (5) to CS dla ciągów $\left(\sqrt{x_k/(r^2 - x_k^2)}\right)$, $\left(\sqrt{x_k}\right)$; w drugiej nierówności (5) każdy kolejny składnik sumy w lewym nawiasie jest niemniejszy niż odpowiedni składnik w prawym nawiasie (co się prosto sprowadza do $x_k^2(2x_k^2 - r^2)^2 \geqslant 0$); stąd również widać, że (5) staje się równością jedynie, gdy dwie zmienne są dodatnie i równe, a pozostałe są zerami.

Autor tej pracy zasygnalizował także możliwość uogólnienia na sumy cykliczne (n zmiennych), tworzone podobnie jak w problemie Shapiro:

$$X(n) :\ = \inf_{x_1,\ldots,x_n > 0} \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2}\right).$$

Przyjmując dodatkowo oznaczenia

$$Q(n) :\ = \inf_{x_1,\ldots,x_n > 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2}}\,, \qquad S(n) :\ = \inf_{x_1,\ldots,x_n > 0} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}}\,,$$

wykazał, że $\sqrt{X(n)} \geqslant Q(n) \geqslant S(n)$ – co w połączeniu ze znanymi faktami o ciągu $S(n)$ (`http://mathworld.wolfram.com/ShapirosCyclicSumConstant.html`) daje jakąś informację o ciągu $X(n)$ – oraz postawił hipotezę, że $\sqrt{X(n)} = Q(n) = \lceil n/2 \rceil$ dla wszystkich $n \geqslant 3$.

Zadanie **742.** [$p = 4k + 1$ liczba pierwsza $\Rightarrow$ $\exists\, s, m \in \mathbf{Z}\colon\ 0 < s < p,\ sp - \lfloor \sqrt{sp}\, \rfloor^2 = m^2$] ($WT$=1,55; LPR=9). Rozwiązanie firmowe (w którym Czytelnicy niechybnie dostrzegli literówkę: brak symbolu $\lfloor\ \rfloor$ w przedostatnim zdaniu) było oparte na twierdzeniu Fermata (przedstawienie $p = a^2 + b^2$) i pokazywało, że można wręcz uzyskać $m = 1$. **Marcin Kasperski** i **Tomasz Wietecha** zauważyli, że do uzyskania tej tezy wystarczy własność nieco prostsza niż twierdzenie Fermata: -1 jest resztą kwadratową (mod p); piszemy $t^2 + 1 = sp$, $t \in \{1, \ldots, p-1\}$; liczba s (wraz z $m = 1$) spełnia wówczas zadane warunki.

Natomiast używając twierdzenia Fermata ($p = a^2 + b^2$), kilku uczestników znalazło rozwiązanie $s = p - 2a + 1$, $m = b$; dla takich liczb zachodzi bowiem równość $sp = (p - a)^2 + b^2$, z której łatwo wynikają wymagane własności (oczywiście zamieniając a i b, dostaniemy kolejne rozwiązanie).

Jeden z uczestników postawił pytanie (motywowane próbami numerycznymi), czy nie wystarczy ograniczać poszukiwań do wartości $s \leqslant 5$. Otóż nie; na przykład dla $p = 1237$ najmniejszy czynnik s, dla którego $sp - \lfloor \sqrt{sp}\, \rfloor^2$ jest kwadratem, to $s = 10$.

Zadanie **744.** [$k \in \mathbf{N}$, $k > 1$; $M \subset \mathbf{N}$; $\forall\, m, n \in M\colon\ mn \leqslant k^2|m - n| \Rightarrow |M| \leqslant 2k - 1$; czy $\forall\, k > 1\, \exists\, M$(j.w.), $|M| = 2k - 1$?] (WT=2,74; LPR=5). **M. Miodek**, **J. Olszewski**, **M. Spychała**, **T. Wietecha** – bez zastrzeżeń; **J. Cisło**: bezbłędny dowód pierwszej tezy oraz prawidłowa odpowiedź na końcowe pytanie (nie dla wszystkich k istnieje taki M; kontrprzykład np. dla $k = 9$) – uzasadnienie przez algorytm wrzucania do M kolejnych najmniejszych możliwych liczb, bez wyraźnego uzasadnienia (zresztą nietrudnego), że jeśli ten algorytm wymusza $|M| < 2k - 1$, to każdy inny też. Jeszcze kilka prac z dobrym dowodem w pierwszej części, ale bez poprawnego rozwiązania w drugiej.

Za rok – kolejne omówienie wybranych zadań.

Niebo w lutym

Zima jest właśnie na półmetku i okres roku z najkrótszymi dniami i najdłuższymi nocami już minął. Słońce wędruje szybko na północ, zwiększając swoją wysokość w południe o prawie 10°, stąd w trakcie miesiąca dnia przybywa o prawie dwie godziny. W lutym Słońce przejdzie z gwiazdozbioru Koziorożca do gwiazdozbioru Wodnika, w którym znajduje się planeta Neptun, w związku z czym można ją obserwować tylko na początku miesiąca, lecz obserwacje są trudne, gdyż zanim zrobi się wystarczająco ciemno, planeta zbliży się mocno do linii widnokręgu. Neptun spotka się ze Słońcem 4 marca, a potem przejdzie na niebo poranne. Ale ze względu na małe nachylenie ekliptyki do porannego widnokręgu na przełomie zimy i wiosny planeta pozostanie niewidoczna z dużych północnych szerokości geograficznych do drugiej połowy czerwca. W lutym blask Neptuna wyniesie $+8^m$.

W przeciwieństwie do nieba porannego na niebie wieczornym ekliptyka o tej porze roku jest nachylona pod dużym kątem. Dlatego kreśląca swoją pętlę na niebie nieco ponad 40° na północny wschód od Neptuna planeta Uran jest nadal dobrze widoczna. Uran spotka się ze Słońcem w drugiej połowie kwietnia, a w lutym Słońcu braknie do niego jeszcze około 60° i na początku nocy astronomicznej (ok. 18:30 na początku miesiąca i ok. 19:15 pod jego koniec) planeta zajmie pozycję na wysokości odpowiednio ponad 40 i 20 stopni nad zachodnim widnokręgiem. 20 lutego z Uranem spotka się Księżyc w fazie 22%. W trakcie miesiąca jasność Urana spadnie z +5,8 do $+5{,}9^m$. W lutym planeta utworzy prawie idealny prostokąt z gwiazdami o, μ i ν Psc, przy czym Uran zajmie północno-zachodni róg tej figury. Krótko po koniunkcji ze Słońcem pod koniec kwietnia planeta przejdzie do gwiazdozbioru Barana. Po opozycji, przypadającej w tym roku 24 października, Uran odwiedzi jeszcze gwiazdozbiór Ryb, w którym spędzi koniec tego i początek przyszłego roku, ale już w lutym 2019 r. planeta wejdzie do Barana na dłużej i spędzi tam kolejnych 6 lat.

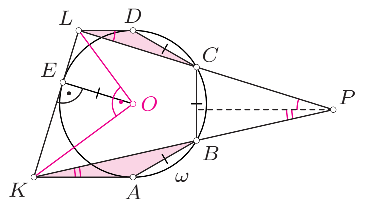
Z bliżej nas krążących planet Układu Słonecznego tylko planety zewnętrzne są widoczne dość dobrze, wszystkie w drugiej połowie nocy. Najlepsze warunki obserwacyjne są dla Jowisza, będącego 3 miesiące przed opozycją i wschodzącego wciąż grubo po północy, wędrującego przez środek gwiazdozbioru Wagi. Przez cały luty planeta porusza się ruchem prostym, zmieni ten kierunek dopiero na początku marca i do końca miesiąca zwiększy dystans do gwiazdy Zuben Elgenubi do prawie 8°. W lutym blask Jowisza zwiększy się z -2 do $-2{,}1^m$, zaś jego tarcza urośnie z 36 do 39″. Księżyc spotka się z Jowiszem 8 lutego, przy fazie 45%.

Drugi na nieboskłonie pojawia się Mars, wschodzący przed godziną 3. Czerwona Planeta zacznie miesiąc od spotkania ze świecącą blaskiem $+2{,}5^m$ gwiazdą

Rozwiązanie zadania M 1556.
Do rozwiązania zadania wystarczy wykazać, że $\sphericalangle KPL = 30^\circ$, gdyż czworokąt $ABCD$ jest połową sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg ω, a zatem krótszy łuk BC stanowi $\frac{1}{6}$ tego okręgu. Równoważnie wystarczy dowieść, że

$$\sphericalangle AKB + \sphericalangle DLC = 30^\circ.$$

Wobec równości $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CDL = 150^\circ$ powyższy warunek jest równoważny podobieństwu trójkątów ABK i DCL.



Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na okręgu ω. Ponieważ $\sphericalangle AKO = \sphericalangle EKO$ oraz $\sphericalangle DLO = \sphericalangle ELO$, więc

$$\sphericalangle KOL = 180^\circ - \sphericalangle OKL - \sphericalangle OLK = \\ = 180^\circ - \frac{\sphericalangle AKL + \sphericalangle DLK}{2} = 90^\circ.$$

Skoro E jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego w trójkącie OKL, to $EK \cdot EL = OE^2$. W połączeniu z równościami $EK = AK$, $EL = DL$ oraz $OE = AB = DC$, uzyskujemy

$$AK \cdot DL = AB \cdot DC, \quad \text{czyli} \quad \frac{AK}{AB} = \frac{DC}{DL}.$$

Tym samym, wobec $\sphericalangle BAK = \sphericalangle CDL$, otrzymujemy podobieństwo trójkątów ABK i DCL, które jest równoznaczne z tezą zadania.