Rozwiązania zadań z numeru 4/2018

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

759. Ciąg nieskończony $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = 2^{2-x_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$; wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(3/2, 2)$. Wyznaczyć wszystkie liczby, będące granicami zbieżnych podciągów ciągu (x_n).

760. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x, dla których każda z liczb $x^{1/2}+x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3}+x^{-1/3}$ jest całkowita.

759. Ciąg (x_n) powstaje przez iterowanie funkcji $f(x) = 2^{2-x}$, którą będziemy badać na przedziale $[1,2]$. Ponieważ f maleje od wartości $f(1) = 2$ do wartości $f(2) = 1$, zatem odwzorowuje przedział $[1,2]$ na siebie i ma w tym przedziale dokładnie jeden punkt stały ξ (tj. taki, że $f(\xi) = \xi$). Obrazem przedziału $(1,\xi)$ jest przedział $(\xi, 2)$, i na odwrót. Stąd wniosek, że wyrazy ciągu (x_n) o numerach parzystych należą do jednego z tych przedziałów, a te o nieparzystych – do drugiego.

Równość $f(\xi) = \xi$ przepisujemy jako $\xi \cdot 2^{\xi} = 4$. Funkcja $\psi(t) = t \cdot 2^t$ jest rosnąca; przy tym $\psi(1/\ln 2) = \mathrm{e}/\ln 2 < 4$, $\psi(\xi) = 4$, $\psi(3/2) = 3\sqrt{2} > 4$, wobec czego

$$(1) \qquad \frac{1}{\ln 2} < \xi < \frac{3}{2}.$$

Ponieważ (z założenia) $x_0 > 3/2$, zatem $x_0, x_2, x_4, \ldots \in (\xi, 2)$, zaś $x_1, x_3, x_5, \ldots \in (1, \xi)$.

Użyjemy rachunku pochodnych. Oznaczmy (dla krótkości): $c = \ln 2$ i zauważmy, że $f' = -cf$. Niech $g = f \circ f$. Wówczas

$$g' = (f' \circ f) \cdot f' = -c \cdot (f \circ f) \cdot (-cf) = c^2 \cdot f \cdot g$$

i dalej:

$$(2) \quad g'' = c^2 \cdot (f' \cdot g + f \cdot g') = \\ = c^2 \cdot \big((-cf) \cdot g + f \cdot c^2 \cdot f \cdot g\big) = c^3 \cdot f \cdot g \cdot (-1 + cf).$$

Dla $x \in [1, \xi]$ mamy nierówność $f(x) \geqslant \xi > 1/c$ (por. (1)), więc wyrażenie w nawiasie po prawej stronie (2) ma w tych punktach wartość dodatnią. To znaczy, że funkcja g jest ściśle wypukła w przedziale $[1, \xi]$; a ponieważ $g(1) = 1$, $g(\xi) = \xi$, zatem

$$(3) \qquad g(x) < x \quad \text{dla } x \in (1, \xi).$$

Ciąg $x_1, x_3, x_5, \ldots$ leży w przedziale $(1, \xi)$ i jest generowany rekurencyjnie wzorem $x_{n+2} = g(x_n)$. Nierówność (3) pokazuje, że jest to ciąg malejący, i w konsekwencji zbieżny. Jego granica musi być punktem stałym funkcji g; jednak nie ma takiego punktu w przedziale otwartym $(1, \xi)$ (nierówność (3)). W takim razie granicą tego ciągu musi być liczba 1.

Funkcja ciągła f przeprowadza ten ciąg na ciąg rosnący $x_2, x_4, x_6, \ldots$, którego granicą jest wobec tego liczba $f(1) = 2$. To dowodzi, że niezależnie od wyboru wyrazu początkowego $x_0 \in (\xi, 2)$, ciąg (x_n) ma podciągi zbieżne do dwóch różnych granic: 1 oraz 2 (i do żadnej innej, bo dowolny podciąg ma nieskończenie wiele wspólnych wyrazów z jednym ze znalezionych podciągów, zbieżnych do 1 lub 2).

---

760. Przy oznaczeniach

$$(4) \qquad a = x^{1/2} + x^{-1/2}, \qquad b = x^{1/3} + x^{-1/3}$$

mamy związki: $a^2 = x + x^{-1} + 2$, $b^3 = x + x^{-1} + 3b$, z których wynika tożsamość

$$(5) \qquad a^2 = (b+2)(b-1)^2.$$

Gdy liczby a, b są naturalne, czynnik $b+2$ musi być kwadratem liczby naturalnej; więc $b = c^2 - 2$ $(c \in \mathbb{N})$. Zgodnie z (4), jest to suma liczb $x^{1/3}$, $x^{-1/3}$, których iloczyn wynosi 1. Zatem $x^{1/3}$, $x^{-1/3}$ to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$(6) \qquad t^2 - (c^2-2)t + 1 \quad (\text{zmiennej } t \in \mathbb{R});$$

istnieją (w $\mathbb{R}$) gdy $c \geqslant 2$; i są wówczas dodatnie. Wyznaczamy je zwykłą metodą, podnosimy do trzeciej potęgi, i dostajemy wniosek:

$$(7) \qquad x \text{ oraz } x^{-1} \ \text{ to liczby } \ \frac{1}{8}\Big(c^2 - 2 \pm \sqrt{c^4 - 4c^2}\Big)^3.$$

Rozumowanie można odwrócić. Dla dowolnej liczby naturalnej $c \geqslant 2$ określamy wzorami (7) parę liczb rzeczywistych, wzajemnie odwrotnych: x oraz x^{-1} (jedna ze znakiem plus w nawiasie, druga ze znakiem minus). Wówczas $x^{1/3}$, $x^{-1/3}$ są pierwiastkami trójmianu (6); ich suma wynosi $c^2 - 2$. Liczby a, b, zdefiniowane wzorami (4), spełniają równość (5); a ponieważ $b = x^{1/3} + x^{-1/3} = c^2 - 2$, zatem prawa strona wzoru (5) jest kwadratem liczby całkowitej, więc liczba a jest całkowita (liczba b oczywiście też).

Wzór (7), z parametrem $c = 2, 3, 4, \ldots$, przedstawia ogólną postać liczb $x \in \mathbb{R}$ o rozważanej w zadaniu własności.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 753 ($WT = 3{,}24$) i 754 ($WT = 1{,}22$) z numeru 1/2018

Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,86
Tomasz Choczewski	Szczecin	37,31
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,72
Michał Miodek	Warszawa	32,78
Michał Koźlik	Gliwice	32,23
Krzysztof Kamiński	Pabianice	31,60