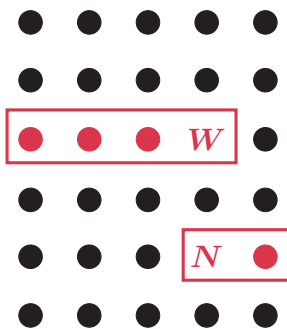




Więcej o zasadzie szufladkowej znaleźć można m.in. w *deltoïdach* 2 i 3/2009.

z tej strony najwyższy w rzędach



z tej strony najwyższy w kolumnach

Rys. 1. Kolorowe ramki oznaczają żołnierzy wysokich i niskich.

O ustawianiu

Joanna JASZUŃSKA

Zasada szufladkowa Dirichleta głosi, iż jeśli rozmieszczamy pewną liczbę obiektów w mniejszej liczbie szufladek, to któreś dwa z nich trafią do tej samej szufladki. Podobnie, jeśli liczba obiektów jest większa niż dwukrotność liczby szufladek, któreś trzy trafią razem do szufladki itd.

1. Podczas defilady żołnierze mają być ustawieni w prostokąt, przy czym w każdej kolumnie i w każdym rzędzie mają stać od najwyższego do najniższego (żadni dwaj z nich nie są równego wzrostu). Dowódca ustawia ich w prostokącie jakkolwiek, po czym porządkuje według wzrostu w każdej kolumnie osobno, następnie zaś w każdym rzędzie (psując być może porządek w kolumnach), potem, jeśli trzeba, znów w kolumnach, znowu w rzędach etc. Czy ten sposób działania ma sens, tzn. czy niezależnie od początkowego ustawienia żołnierzy ta procedura zawsze po skończeniu wielu takich przestawieniach da żądany efekt? A jeśli tak, to po ilu?

2. W szeregu stoi, w przypadkowej kolejności, 50 żołnierzy. Żadnych dwóch nie jest tego samego wzrostu. Wykaż, że można wybrać ośmiu z nich tak, aby, gdy wystąpią oni krok naprzód, byli ustawieni według wzrostu (rosnąco lub malejąco).

3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ istnieje taka liczba całkowita $k > 0$, że liczbę kn można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

4. Na okręgu umieszczono 101 dodatnich liczb całkowitych o sumie równej 300. Wykaż, że istnieje taki łuk okręgu, na którym suma liczb równa jest 200.

Rozwiązania

R1. Tak; co więcej, wystarczy ustawić żołnierzy raz w kolumnach i raz w rzędach. Przypuśćmy, że potem w pewnej kolumnie wyższy żołnierz W stoi za niższym N , wbrew żądaniu, że mają stać według wzrostu (rys. 1). Rozważmy żołnierzy stojących w rzędzie z W i przed nim (są oni wyżsi od niego, ich wraz z W nazwiemy *wysokimi*) oraz żołnierzy stojących w rzędzie z N i za nim (są niżsi od N , ich wraz z N nazwiemy *niskimi*). Zauważmy, że każdy żołnierz wysoki jest wyższy od każdego z żołnierzy niskich (bo jest wyższy od W , a W – od N). Wysokich i niskich żołnierzy jest łącznie o 1 więcej niż kolumn, więc zanim uporządkowano rzędy, pewnych dwóch z nich stało w tej samej kolumnie. Wysocy stali w różnych kolumnach, niski też w różnych, stąd w jednej kolumnie musiał stać jakiś żołnierz wysoki za niskim – sprzeczność, bo kolumny były już wtedy uporządkowane. \square

R2. Każdego żołnierza utożsamiamy z jego wzrostem, a następnie dajemy mu numer – długość najdłuższego rosnącego podciągu w danym szeregu, którego jest on ostatnim elementem. Jeśli któryś żołnierz ma numer 8, mamy szukany podciąg rosnący.

W przeciwnym przypadku każdy z 50 żołnierzy ma numer najwyżej 7. Gdyby każdy z numerów od 1 do 7 występował najwyżej 7-krotnie, łącznie mielibyśmy najwyżej 49 żołnierzy. Stąd któraś liczba powtarza się co najmniej 8 razy. Żołnierze o tych właśnie numerach tworzą szukany podciąg malejący, gdyż każdy kolejny z nich jest niższy od poprzednika o tym samym numerze (gdyby bowiem był wyższy, byłby następnym elementem rosnącego podciągu i miałby numer o jeden większy). \square

R3. Rozważmy liczby $1, 11, 111, \dots$. Wśród pierwszych $n + 1$ z nich pewne dwie dają tę samą resztę z dzielenia

przez n . Ich różnica jest liczbą postaci $11 \dots 100 \dots 0$ podzielną przez n , co kończy dowód. \square

R4. Oznaczmy liczby wokół okręgu kolejno przez a_1, a_2, \dots, a_{101} i rozważmy sumy $a_1 + a_2 + \dots + a_i$ dla $i = 1, 2, \dots, 100$. Są to dodatnie liczby całkowite mniejsze od 300. Jeśli któraś z tych sum jest równa 200, zadanie jest rozwiązane, podobnie dla sumy 100 (wtedy wszystkie pozostałe a_i wyznaczają szukany łuk).

Jeśli żadna z sum nie jest równa 200 ani 100, to każda z nich przy dzieleniu przez 100 daje jedną z 99 niezerowych reszt. Wówczas pewne dwie sumy $a_1 + \dots + a_j$ oraz $a_1 + \dots + a_k$ dla $j < k$ dają taką samą resztę, więc ich różnica $a_{j+1} + \dots + a_k$ dzieli się przez 100, czyli jest równa 200 lub 100. Podobnie jak powyżej wyznacza ona wobec tego poszukiwany łuk lub jego dopełnienie. \square

Zadania domowe

5. Wykaż, że wśród dowolnych 1111 parami różnych podzbiorów zbioru 11-elementowego zawsze znajdują się dwa rozłączne.

6. Udowodnij, że w dowolnym ciągu 2018 liczb całkowitych zawsze można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez 2018.