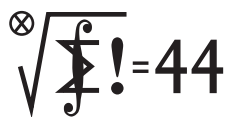


Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2020

Zadania z matematyki nr 793, 794

Redaguje Marcin E. KUCZMA

793. Okręgi Ω i ω przecinają się w punktach A i B . Środek S okręgu ω leży na okręgu Ω i jest końcem jego średnicy NS . Cięciwa CS okręgu Ω , niebędąca średnicą, przecina okrąg ω oraz odcinek AB odpowiednio w punktach I oraz J . Prosta przechodząca przez I , równoległa do NS , przecina odcinek NC w punkcie K . Dowieść, że prosta IN przechodzi przez środek odcinka JK .

794. Dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geq 0$ przyjmijmy: $R(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $Q(x, y, z) = \sqrt{xy + xz + yz}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\frac{1}{R(a, b, c)Q(b, c, d)} + \frac{1}{R(b, c, d)Q(a, c, d)} + \frac{1}{R(a, c, d)Q(a, b, c)}$$

dla liczb $a, b, c, d \geq 0$ spełniających warunek $2a + 2b + 3c + 2d \leq 6$ oraz wyznaczyć wszystkie czwórki (a, b, c, d) , dla których to minimum jest osiąganе.

Zadanie 794 zaproponował pan Mikołaj Pater.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2019

Przypominamy treść zadań:

785. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg o środku O ; przy tym $|BC| = |CD|$. Przekątne AD i CE są prostopadłe, zaś przekątne AD i BE przecinają się w takim punkcie P , że $|AP| = |AO|$. Wykazać, że trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele czwórek różnych liczb naturalnych (a, b, c, d) o tej własności, że każdy z iloczynów ab, bc, ac, bd, cd jest o 1 większy od kwadratu pewnej liczby naturalnej.

785. Skoro $|BC| = |CD|$, punkt C jest środkiem łuku BD ; zatem prosta EC jest dwusieczną kąta wpisanego BED . Przy tym jest prostopadła do prostej AD ; jest więc symetralną odcinka PD . Stąd wynika, że

$$|EP| = |ED| \quad \text{oraz} \quad |CP| = |CD| = |CB|.$$

Cięciwy AD i BE , przecinające się w punkcie P , wyznaczają trójkąty podobne: $\triangle PAB \sim \triangle PED$; a ponieważ $|ED| = |EP|$, zatem $|AB| = |AP| = |AO|$ (ostatnia równość jest dana w założeniach). To pokazuje, że trójkąt OAB jest równoboczny, wobec czego $\sphericalangle AOB = 60^\circ$. W takim razie $\sphericalangle ACB = 30^\circ$.

Czworokąt $ABCP$ to deltoid ($|AB| = |AP|$, $|CB| = |CP|$); stąd $\sphericalangle BCP = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 60^\circ$. Wobec wcześniejszego spostrzeżenia, że $|CP| = |CB|$, dostajemy tezę zadania: trójkąt BCP jest równoboczny.

786. Przykład Autora zadania (W. Bednarek): gdy $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ jest dowolną czwórką kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, wówczas czwórka $(a, b, c, d) = (F_\alpha, F_\beta, F_\gamma, F_\delta)$ jest dobra; jak zwykle, F_n oznacza n -tą liczbę Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 2$).

Uzasadnienie: Dopełniamy taką czwórkę trzema kolejnymi liczbami parzystymi k, l, m do pełnego bloku siedmiu kolejnych liczb naturalnych $(\alpha, k, \beta, l, \gamma, m, \delta)$ i korzystamy ze znanych tożsamości

$$F_n^2 + 1 = \begin{cases} F_{n-1}F_{n+1} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ F_{n-2}F_{n+2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} ab &= F_\alpha F_\beta = F_k^2 + 1, & bc &= F_\beta F_\gamma = F_l^2 + 1, \\ cd &= F_\gamma F_\delta = F_m^2 + 1, & ac &= F_\alpha F_\gamma = F_\beta^2 + 1, \\ & & bd &= F_\beta F_\delta = F_\gamma^2 + 1. \end{aligned}$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 783 ($WT = 3,76$) i 784 ($WT = 1,18$) z numeru 6/2019

Janusz Olszewski	Warszawa	45,91
Paweł Kubit	Kraków	44,25
Krzysztof Kamiński	Pabianice	42,48
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Michał Koźlik	Gliwice	35,73
Janusz Fiett	Warszawa	33,09
Mikołaj Pater	Opole	31,50

Dwaj uczestnicy przekraczają próg 44p., i to dalece nie pierwszy raz – tu chodzą duże liczby: pan Kubit – po raz siódmy! pan Olszewski – po raz dwudziesty!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.