Pole i objętość

Marek KORDOS

W numerze poświęconym mierze nie sposób pominąć tych pierwszych, czyli zwykłych miar geometrycznych (zważmy, że geometria ma miarę w swojej nazwie). Wydaje się, że wiemy o nich wszystko, bo przecież stykaliśmy się z nimi niemal od zerówki. Okazuje się jednak, że i na ich temat można postawić pytania o nieoczywistych odpowiedziach.

Rozważymy tu dwa takie pytania. Pierwsze z nich to: *czy polem prostokąta musi być iloczyn długości jego boków?*
Pisząc szerzej: czy można byłoby, bez rezygnacji z naturalnych własności miary, tak zdefiniować pole, by przyjmowało ono jakieś inne wartości? W oczywisty sposób to samo pytanie można postawić odnośnie objętości prostopadłościanu.

Może od razu spiszmy te naturalne własności miary.

I. Figury przystające mają równe miary.
II. Jeśli dwie figury mają wspólny co najwyżej brzeg, to miara ich sumy jest równa sumie ich miar.
III. Miara kostki jednostkowej (kwadratu, sześcianu) jest równa 1.
IV. Miara każdej figury jest nieujemna.

W szkole poznajemy wzory na miary różnych figur płaskich i przestrzennych. Drugie pytanie to: *czy do ścisłego obliczania pól wielokątów i objętości wielościanów konieczna jest jakaś wyższa matematyka?*
Wyrażając się precyzyjniej: czy odpowiednie wzory można uzyskać elementarnie, to jest bez użycia jakichś pojęć związanych z nieskończonością (ciągu, szeregu, granicy itp.)?

Dla niedoceniających tych pytań dodajmy, że pełne odpowiedzi na nie matematycy uzyskali na początku XX wieku, czyli dopiero sto lat temu. Droga wiodła przez równania funkcyjne.

Znakomity artykuł o równaniach funkcyjnych autorstwa Marka Kuczmy zamieściliśmy w *Delcie* 1(37)1977; w tym tekście jest wiele zapożyczeń z tego artykułu.

Równanie Cauchy'ego

W badaniu problemów związanych z miarą kluczową rolę odgrywa równanie funkcyjne, zwane *równaniem Cauchy'ego*. Równanie funkcyjne to problem, w którym poszukujemy nie liczby, ale funkcji spełniającej określone warunki. W przypadku równania Cauchy'ego chodzi o następujący warunek:

(1) $$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

dla dowolnych rzeczywistych x i y.

Oczywiście, każdy bez trudu wskaże rozwiązanie tego równania: są to funkcje postaci $f(x) = \alpha \cdot x$ dla dowolnej stałej α. Augustyn Cauchy, który odkrył znaczenie tego równania w teorii miary, zauważył, iż nie umie odpowiedzieć na pytanie, czy jest to rozwiązanie jedyne. Odpowiedź na takie pytanie przyszła dopiero w 1903 roku, a do jej sformułowania potrzebne były nieistniejące w czasach Cauchy'ego (pierwsza połowa XIX wieku) pojęcia matematyczne.

Zacznijmy rozwiązywać to równanie. Bez trudu stwierdzamy, że

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0), \quad \text{czyli} \quad f(0) = 0.$$

Podobnie, indukcyjnie dowodzimy dla dowolnego a, że $f(a \cdot n) = n \cdot f(a)$, bo

$$f(a \cdot (k+1)) = f(a \cdot k) + f(a) = k \cdot f(a) + f(a) = \\ = (k+1) \cdot f(a).$$

Dalej $f\left(\frac{a}{m}\right) = \frac{1}{m} \cdot f(a)$, bo

$$f(a) = f\left(m \cdot \frac{a}{m}\right) = m \cdot f\left(\frac{a}{m}\right),$$

Wreszcie $f(-a) = -f(a)$, bo

$$f(a) + f(-a) = f(a-a) = f(0) = 0.$$

Podsumowując, dla dowolnej liczby wymiernej w (i dowolnej liczby rzeczywistej a) mamy więc

(2) $$f(w \cdot a) = w \cdot f(a).$$

Oznaczając $f(1) = \alpha$, mamy

(3) $$f(w) = \alpha \cdot w.$$

Okazuje się jednak, że w tym miejscu trop się kończy – nie ma sposobu, by na tej podstawie określić konkretną wartość $f(x)$ dla niewymiernego x.

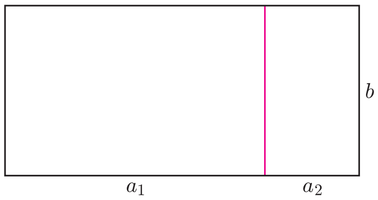
Możemy jednak myśleć tak: oznaczmy $f(\sqrt{2}) = \beta$. Wówczas na mocy (2) otrzymamy $f(w\sqrt{2}) = w \cdot \beta$, co więcej – wobec (1) – dla dowolnych wymiernych w i v

$$f(w + v\sqrt{2}) = f(w) + f(v\sqrt{2}) = \alpha \cdot w + \beta \cdot v.$$

Oczywiście, dla $\alpha = \beta$ otrzymamy zwykłą funkcję liniową, ale nie musimy czynić takiego założenia – $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, więc nie nastąpi kolizja w warunkiem (3). Co więcej, postępowanie to możemy kontynuować, deklarując kolejno wartości funkcji f dla nowych wartości – nowych, to znaczy takich, których nie da się uzyskać przez kombinację liniową liczb, dla których wartości funkcji zadeklarowaliśmy już wcześniej (w powyższym przypadku kolejną liczbą, dla której obierzemy dowolnie wartość funkcji f, musi być liczba niedająca się przedstawić w postaci $w + v\sqrt{2}$ dla wymiernych w i v, np. π).

Powstaje pytanie, czy postępowanie to daje się rozszerzyć tak, by określić wartości f dla wszystkich liczb rzeczywistych. Odpowiedź nie jest oczywista, bo przez kolejne przyłączanie coraz nowych liczb nie da się dojechać „do końca" (liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalnie wiele). Jednak silne środki teorii mnogości (np. pewnik wyboru) pozwalają na taką operację – wykonał ją jako pierwszy Georg Hamel (ciekawych odsyłam do hasła *baza Hamela*). Nam jednak dalej wystarczą rozwiązania równania (1) uzyskane taką metodą, jak dla liczb postaci $w + v\sqrt{2}$, użytą tylko skończoną liczbę razy, czyli określone tylko dla niektórych liczb. Wspomnijmy, iż okazało się, że wszystkie rozwiązania równania Cauchy'ego, poza liniowym, są bardzo paskudnymi funkcjami: nie są ciągłe, ani w żadnym przedziale monotoniczne itd.

Pole prostokąta



Rys. 1

Z podanej na początku własności I miary wynika, że pole prostokąta jest funkcją długości jego boków (bo gdy dwa prostokąty mają równe boki, to są przystające). Oznaczmy tę funkcję przez $m(a,b)$, gdzie a i b to długości boków. Ponieważ podział prostokąta odcinkiem równoległym do jego boków (rys. 1) daje nam dwa prostokąty, więc mamy – na mocy II – równanie funkcyjne

$$m(a,b) = m(a_1,b) + m(a_2,b).$$

Ustalmy na pewien czas b i oznaczmy $m(p,b) =: g_b(p)$. Mamy zatem

$$g_b(a_1+a_2) = g_b(a) = g_b(a_1) + g_b(a_2)$$

– funkcja g_b spełnia równanie Cauchy'ego. Wobec tego możemy skorzystać z uzyskanych wyżej wzorów: mamy dla wymiernego a

$$g_b(a) = \alpha(b)\cdot a, \quad \text{przy czym na mocy III} \quad \alpha(1) = 1.$$

Powtarzając rozumowanie ze wspomnianego artykułu Marka Kuczmy, rozważmy funkcję $h(x) := g_b(x) - \alpha(b)\cdot x$ – wykażemy, że jest ona stała i dla każdego x równa 0.

1° *h spełnia równanie Cauchy'ego*:

$$h(x+y) = g_b(x+y) - \alpha(b)\cdot(x+y) = g_b(x) + g_b(y) - \alpha(b)\cdot x - \alpha(b)\cdot y =$$
$$= g_b(x) - \alpha(b)\cdot x + g_b(y) - \alpha(b)\cdot y = h(x) + h(y).$$

2° *h jest okresowa z okresem* 1:

$$h(x+1) = h(x) + h(1) = h(x) + g_b(1) - g_b(1)\cdot 1 = h(x).$$

3° *h jest ograniczona z dołu*; tu skorzystamy z niewykorzystanej dotąd własności IV – w naszych oznaczeniach głosi ona, że dla $x \geqslant 0$ mamy $g_b(x) \geqslant 0$, w szczególności $\alpha(b) \geqslant 0$. Na mocy 2° wystarczy rozpatrzyć wartości przyjmowane przez funkcję w przedziale $\langle 0; 1\rangle$:

$$h(x) = g_b(x) - \alpha(b)\cdot x \geqslant 0 - \alpha(b)\cdot x \geqslant -\alpha(b).$$

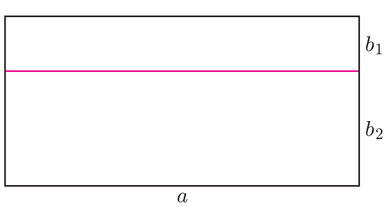
4° *Dla każdego x jest $h(x) = 0$.* Przypuśćmy, że znaleźliśmy w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ taką liczbę p, że $h(p) \neq 0$. Zatem $h(p) < 0$ lub $h(p) > 0$. W pierwszym przypadku zauważamy, że wobec 1° i (3) mamy $h(n\cdot p) = n\cdot h(p)$, co pozwala przez dobór odpowiednio dużego n uczynić tę liczbę dowolnie małą, co jest sprzeczne z 3°. W drugim przypadku zauważmy, że wówczas $h(1-p)$ jest mniejsze od zera, bowiem, wobec 1°,

$$h(p) + h(1-p) = h(p+1-p) = h(1) = 0.$$

Powtarzając poprzednie rozumowanie, stwierdzamy, że teraz $h(n(1-p))$ może być dowolnie małe. Zatem w każdej sytuacji dochodzimy do sprzeczności, czyli nasze przypuszczenie było błędne – funkcja h jest stale zerem, skąd mamy wniosek, że

$$\text{dla dowolnego } x \quad g_b(x) - \alpha(b)\cdot x = h(x) = 0,$$

czyli dla dowolnego x mamy $g_b(x) = \alpha(b)\cdot x$.



Rys. 2

Powróćmy do prostokąta. Wiemy teraz, że jego pole to

$$m(a,b) = g_b(a) = \alpha(b)\cdot a, \quad \text{gdzie} \quad \alpha(1) = 1.$$

Skorzystajmy z tego, że prostokąt można podzielić na dwa prostokąty również odcinkiem równoległym do drugiej pary boków (rys. 2). Wtedy będzie

$$m(a, b_1+b_2) = m(a,b_1) + m(a,b_2),$$

czyli

$$\alpha(b_1+b_2)\cdot a = \alpha(b_1)\cdot a + \alpha(b_2)\cdot a.$$

Biorąc np. $a = 1$, otrzymujemy

$$\alpha(b_1+b_2) = \alpha(b_1) + \alpha(b_2)$$

– funkcja α spełnia równanie Cauchy'ego! Wobec tego stosuje się do niej przeprowadzone przed chwilą rozumowanie, co daje, dla pewnej stałej λ

$$\alpha(x) = \lambda\cdot x, \quad \text{a wobec } \alpha(1) = 1 \text{ mamy } \alpha(x) = x.$$

Ostatecznie więc wykazaliśmy, że musi być

$$m(a,b) = \alpha(b)\cdot a = ab.$$

Nie wątpię, że Czytelnik bez większych kłopotów rozszerzy to rozumowanie tak, by okazało się, że jedyna możliwość dla objętości prostopadłościanu to $m(a,b,c) = abc$.

Pole wielokąta, objętość wielościanu

W *Małej Delcie* jest dowód, że dowolny wielokąt można pociąć na części, z których ułoży się prostokąt (a nawet kwadrat) – mówimy, że dowolny wielokąt jest *równoważny przez pocięcie* z prostokątem. Stąd sposób obliczania pola dowolnego wielokąta jest wyznaczony jednoznacznie. Powstaje pytanie, czy można dowolny wielościan pociąć na skończoną liczbę mniejszych wielościanów, z których ułoży się prostopadłościan. Metody takiej nie przekazali nam Starożytni, ale i potem nie umieliśmy jej znaleźć, aż w 1900 roku David Hilbert umieścił pytanie, czy to w ogóle da się zawsze wykonać, w rzędzie 23 najważniejszych problemów na nadchodzący wiek XX. Odpowiedź przyszła szybko – jeszcze w tym samym 1900 roku Max Dehn udowodnił, że nie jest to możliwe.

Dokładniej, Dehn wskazał, które pary wielościanów nie są równoważne przez pocięcie. Pięćdziesiąt dziewięć lat później Jean Paul Sydler uzupełnił ten dowód, wskazując, że wszystkie inne pary już są równoważne przez pocięcie. Okazuje się, że również w tej sprawie interweniuje równanie Cauchy'ego.

Kluczem do sprawy jest *niezmiennik Dehna*. Dla dowolnego wielościanu W obliczamy go tak. Numerujemy wszystkie jego krawędzie l_i (od 1 do n) i tym samym numerem oznaczamy kąty dwuścienne α_i przy tych ścianach. Bierzemy następnie jakąś funkcję f spełniającą równanie Cauchy'ego i na dodatek spełniającą warunek $f(\pi) = 0$ (a więc także $f(w \cdot \pi) = 0$ dla dowolnej liczby wymiernej w) – taką funkcję nazywamy *funkcją Dehna*. Niezmiennik Dehna dla funkcji f to liczba

$$D_f(W) = l_1 \cdot f(\alpha_1) + l_2 \cdot f(\alpha_2) + \ldots + l_n \cdot f(\alpha_n).$$

Twierdzenie Dehna orzeka:
Jeśli wielościany są równoważne przez pocięcie, to ich wszystkie niezmienniki Dehna są równe (wszystkie, to znaczy dla dowolnej funkcji Dehna).

Na pomysł takiego niezmiennika wpaść jest trudno, natomiast udowodnić twierdzenie Dehna już trudno nie jest.

Wystarczy wykazać, że wartość dowolnie ustalonego niezmiennika Dehna dla wielościanu W jest równa sumie tych samych niezmienników wielościanów, na które go potniemy. W tym celu rozważmy wszystkie krawędzie wszystkich wielościanów uzyskanych z pocięcia. Niektóre z nich (niech taka będzie np. krawędź k z wielościanów $W_1, \ldots, W_m$, gdzie kąty dwuścienne przy niej to odpowiednio $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$) znajdowały się we wnętrzu wielościanu W – jeśli tak, to teraz w sumie niezmienników k nie wystąpi, bo

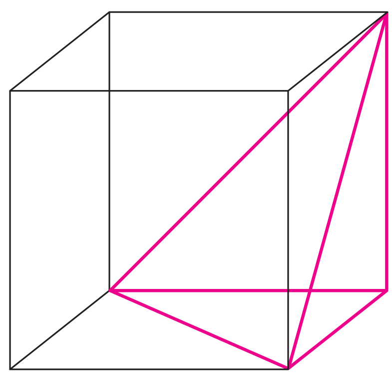
$$k \cdot f(\alpha_1) + \ldots + k \cdot f(\alpha_m) = k \cdot (f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_m)) =$$
$$= k \cdot f(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) = k \cdot f(2\pi) = 0$$

– przecież ta krawędź była „otoczona” wielościanem W. Podobnie nie wystąpi w sumie niezmienników żadna nowa krawędź, która leżała we wnętrzu ścian wielościanu W – tutaj kąty zsumują się do π. Tak więc w sumie niezmienników Dehna wielościanów, na jakie pocięliśmy wielościan W, wystąpią tylko fragmenty krawędzi wielościanu W, przy czym (rozumujemy podobnie jak poprzednio) przy każdym takim fragmencie l_{i_j} (gdzie, powiedzmy, $j = 1, 2, \ldots, m$) krawędzi l_i wystąpi po zsumowaniu funkcja całego kąta α_i. Będziemy więc mieli

$$l_{i_1} \cdot f(\alpha_i) + \ldots + l_{i_m} \cdot f(\alpha_i) = (l_{i_1} + \ldots + l_{i_m}) \cdot f(\alpha_i) = l_i \cdot f(\alpha_i).$$

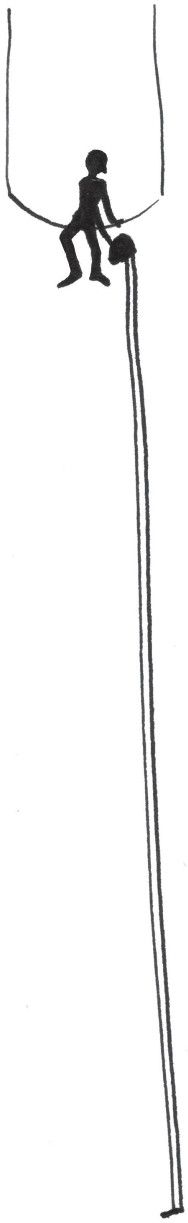
Ale przecież niezmiennik Dehna wielościanu W to właśnie suma takich wyrażeń.

Tak więc, jeśli znajdziemy taki niezmiennik Dehna, który przyjmuje inną wartość dla wielościanu W_1 niż dla wielościanu W_2, będzie to dowód, że nie są one równoważne przez pocięcie. A oto przykład: czworościan Q z rysunku 3 (naroże sześcianu) nie jest równoważny przez pocięcie z żadnym prostopadłościanem. Udowodnimy to.



Rys. 3

Najpierw zauważmy, że wszystkie niezmienniki Dehna dla prostopadłościanu są równe 0 – istotnie, wszystkie kąty dwuścienne prostopadłościanu są proste,



czyli równe $\frac{\pi}{2}$, a dla każdej funkcji Dehna f mamy $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Wystarczy więc wskazać taki niezmiennik, który dla Q przyjmuje wartość niezerową. Niezmienniki Q mają postać

$$3 \cdot 1 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot f(\varphi) = 3\sqrt{2} \cdot f(\varphi),$$

gdzie φ to kąt dwuścienny przy dłuższych krawędziach czworościanu. Powstaje wobec tego pytanie, czy istnieje taka funkcja Dehna, która dla φ jest różna od zera.

W części poświęconej równaniu Cauchy'ego stwierdziliśmy, że wartość funkcji f możemy obrać dowolnie wtedy i tylko wtedy, gdy φ nie jest wymierną wielokrotnością π (bo na razie tylko dla wymiernych wielokrotności π mamy zadane wartości f).

Okazuje się, że spostrzeżenie (które zapewne nie sprawi kłopotu Czytelnikowi), iż $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, wystarcza, aby to udowodnić. Najpierw zauważmy, że:

$\cos n\varphi = \frac{a_n}{\sqrt{3^n}}$, *gdzie* a_n *jest liczbą całkowitą niepodzielną przez* 3.

Dowód jest indukcyjny. Dla $n = 1$ zgadza się: $a_1 = 1$. Dla $n = 2$ mamy

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{-1}{3},$$

czyli też dobrze: $a_2 = -1$. Teraz krok indukcyjny: ze znanego wzoru mamy

$$\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi \cdot \cos n\varphi,$$

a wobec tego

$$\cos(n+1)\varphi = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a_n}{\sqrt{3^n}} - \frac{a_{n-1}}{\sqrt{3^{n-1}}} = \frac{2a_n - 3a_{n-1}}{\sqrt{3^{n+1}}},$$

a więc też dobrze – mianownik się zgadza, a liczba $2a_n - 3a_{n-1}$ nie dzieli się przez 3, skoro a_n się nie dzieli.

Teraz już łatwo dowodzimy, że φ nie jest wymierną wielokrotnością π. Gdyby bowiem było przeciwnie, to znaczy gdyby dla całkowitych p i q było

$$\varphi = \frac{p}{q}\pi, \quad \text{czyli} \quad 2p\pi = 2q\varphi,$$

to mielibyśmy

$$1 = \cos 2p\pi = \cos 2q\varphi = \frac{a_{2q}}{3^q},$$

co jest niemożliwe, bo a_{2q} przez 3 się nie dzieli.

Zatem możemy wybrać sobie funkcję Dehna $\bar{f}$ przyjmującą dowolnie obraną przez nas wartość dla φ, np. 1. Otrzymamy wówczas $D_{\bar{f}}(Q) = 3\sqrt{2}$, co wobec twierdzenia Dehna dowodzi, że nie da się pociąć Q na takie wielościany, z których da się uskładać prostopadłościan.

Morał z tego taki, że jeśli ktoś nam pokazuje sposób na uzyskanie wzoru na objętość czworościanu $\frac{1}{3}hP$ bez jakiegoś przejścia graniczmego, to nas oszukuje (choć, być może, robi to bardzo sprytnie).

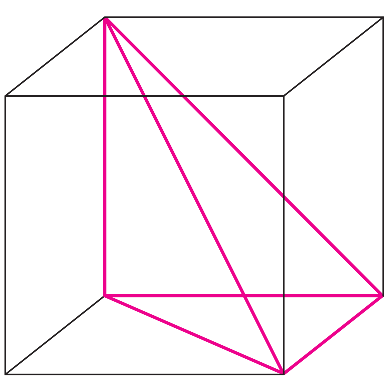
Twierdzenie Sydlera z kolei głosi, że
Jeśli wielościany mają wszystkie niezmienniki Dehna równe, to są równoważne przez pocięcie.

Nie będziemy go dowodzili, ale proponujemy Czytelnikowi wynikające z niego zadania.

1. Wykazać, że czworościan z rysunku 4 jest równoważny przez pocięcie z prostopadłościanem.

2. Znaleźć odpowiedni rozkład.

3. Wykazać, że każdy graniastosłup jest równoważny przez pocięcie z prostopadłościanem (można analitycznie, ale można też sprytnie wykorzystać twierdzenie Bolyaia–Gerwiena z *Małej Delty*).



Rys. 4