

Płaszczyznę rzutową można sobie wyobrażać np. na jeden z poniższych sposobów.

Sposób fizyczny. Na nieważkiej, sztywnej (zwykłej, szkolnej) płaszczyźnie obieramy trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z nich wyposażamy w ciężar lub wypór (wypór to też ciężar, tylko ujemny – to on utrzymuje statki na powierzchni wody i unosi balony). Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt, w którym można podeprzeć tę płaszczyznę, aby nie zmieniała położenia – ten punkt to *środek ciężkości* tak obciążonej płaszczyzny. Można sprawdzić, że każdy punkt płaszczyzny jest – przy pewnym obciążeniu – jej środkiem ciężkości. Ale pewne obciążenia nie mają środka ciężkości na (zwykłej) płaszczyźnie: np. obciążenie, odpowiednio, ciężarem 1, wyporem 1 i ciężarem/wyporem 0 (czasami fizycy nazywają to parą sił). Jeśli do płaszczyzny dołączymy (idealne) punkty pełniące rolę środków ciężkości dla takich obciążeń, to otrzymana wzbogacona płaszczyzna będzie płaszczyzną rzutową.

Sposób malarski. Patrząc na realne proste równoległe (np. szyny prostego toru kolejowego), mamy wrażenie, że na horyzoncie spotykają się. To spostrzeżenie stało się podstawą odkrytej przez malarzy Odrodzenia metody przedstawiania przestrzeni na płaszczyźnie obrazu zwanej *perspektywą zbieżną*. Jeśli do (zwykłej) płaszczyzny dołączymy wszystkie punkty horyzontu i jeszcze uznamy horyzont za prostą (pewnie taki by był, gdyby Ziemia była płaska, a nie kulista), otrzymamy płaszczyznę rzutową.

Sposób algebraiczny. Jeśli będziemy utożsamiali proporcjonalne trójki liczb (z wyłączeniem trójki zer), to możemy jeden egzemplarz ich zbioru uznać za zbiór punktów, a drugi egzemplarz za zbiór prostych. Te dwa zbiory będą płaszczyzną rzutową, jeśli umówimy się, że punkt $[x_1, x_2, x_3]_{\sim}$ leży na prostej $[y_1, y_2, y_3]_{\sim}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = 0$.

Sposób astronomiczny. Najkrótsze drogi na sferze (czyli powierzchni kuli) to okręgi wielkie. Uznając je za proste, otrzymamy *płaszczyznę sferyczną* – była ona badana przez astronomów już w zamierzchłej Starożytności jako sfera niebieska. Utożsamienie na płaszczyźnie sferycznej punktów antypodycznych (czyli leżących na końcach tej samej średnicy sfery) czyni z niej płaszczyznę rzutową.

Sposób topologiczny. Zarówno koło, jak i wstęga Möbiusa mają brzeg będący jedną krzywą zamkniętą. Gdy jest to **ta sama** krzywa, to tak połączone tworzą płaszczyznę rzutową.

Sposób aksjomatyczny. Płaszczyzną rzutową jest każdy obiekt złożony z punktów i prostych spełniających następujące trzy aksjomaty:

- A1** Przez każde dwa punkty przechodzi prosta.
- A2** Każde dwie różne proste mają dokładnie jeden wspólny punkt.
- A3** Istnieje czworokąt.

Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?

Maria DONTEN-BURY

Obejrzeć płaszczyznę rzutową wcale nie jest łatwo. Z bliska, kiedy widzimy tylko mały fragment, wygląda całkiem jak zwykła płaszczyzna, więc to nic ciekawego. A gdybyśmy chcieli widzieć całą naraz, to musielibyśmy umieć widzieć w przestrzeni przynajmniej czterowymiarowej, bo w naszych trzech wymiarach po prostu nie da się jej porządnie ułożyć. Jeśli nie wierzysz, Czytelniku, wykonaj dający się wziąć w rękę, **krawiecki model** płaszczyzny rzutowej. Jest to płócienna realizacja wymienionego wyżej topologicznego sposobu wyobrażania sobie płaszczyzny rzutowej. Bierzymy okrągły kawałek materiału – dalej piszemy o nim *kółko* – i suwak od kurtki (lepiej od śpiwora), którego długość jest równa obwodowi kółka. Przyszywamy jedną ze stron tego suwaka do brzegu kółka. Następnie z dwa razy krótszego paska materiału robimy wstęgę Möbiusa i do jej brzegu (równego wtedy obwodowi kółka) przyszywamy drugą stronę suwaka. Zapinamy suwak i widzimy, że... naprawdę nie da się zapiąć do końca! Proszę spróbować i to najlepiej kilka razy!

Jak to możliwe? W końcu płaszczyzna rzutowa to powierzchnia (będziemy też używali zwrotu: *powierzchnia rzutowa*), więc można by się spodziewać, że będzie zachowywać się podobnie jak sfera lub torus. A tymczasem w świecie rzeczywistym widzimy mnóstwo różnych piłek i obwarzanków, ale nie ma niczego o kształcie powierzchni rzutowej.

Zamiast martwić się tym stanem rzeczy, spróbujmy zrozumieć, dlaczego tak jest. Zrozumieć, czyli nie tylko podać *dowód*, ale również coś, co można nazwać *powodem* tej sytuacji. Tutaj za powód można uznać bardzo mały obiekt: graf pełny o zaledwie sześciu wierzchołkach, oznaczany K_6 . Okaże się, że gdybyśmy umieli porządnie zanurzyć powierzchnię rzutową w trzy wymiary, to zaplątałibyśmy ten graf w taki sposób, który nie ma prawa się pojawić!

Pewnie wydaje się zaskakujące, że taka niewielka, dyskretna struktura zawiera istotną informację o położeniu powierzchni w przestrzeni. A jednak tak jest,



Rozwiązanie zadania M 1316.

Szacujemy lewą stronę:

$$\begin{aligned} x(1-y)^2 + y(1-x)^2 &< \\ < x(1-y)(1-xy) + \\ &+ y(1-x)(1-xy) = \\ &= (x+y-2xy)(1-xy). \end{aligned}$$

Dla liczb z przedziału $(0, 1)$ zachodzi nierówność $(x-1)(1-y) < 0$, równoważna $x+y < 1+xy$. Zatem $x+y-2xy < 1-xy$, co daje tezę.

i wcale nie jest to nowa myśl w matematyce. Kiedy w 1872 roku Felix Klein wygłosił w Erlangen odczyt o nowych drogach badania geometrii, proponował właśnie, żeby zamiast na przestrzeń z nieskończonością punktów i kształtów patrzeć na przypisaną jej niedużą strukturę. Ta struktura – grupa – obejmuje zbiór przekształceń zachowujących badane własności i możliwość składania tych przekształceń. Bardzo często, dla złożonych geometrii, jest ona dobrze opisywana przez pewien skończony zbiór przekształceń. To oznacza, że możemy dowiedzieć się bardzo dużo o geometrii olbrzymiej przestrzeni, badając mały, dyskretny obiekt.

Pewien graf

Wracając do powierzchni rzutowej, spróbujmy najpierw zlokalizować na niej ten graf, który będzie najważniejszym elementem dowodu. W tym celu musimy przedstawić powierzchnię rzutową jako kwadrat z naprzeciwległymi bokami sklejonymi zgodnie z kierunkiem strzałek (rys. 1). Zauważmy, że gdybyśmy zaokrąglili rogi kwadratu na rysunku 1, to otrzymalibyśmy dokładnie projekt modelu z suwakiem. Odcinając z tego kwadratu dwa trójkąty, z góry po prawej stronie i z dołu po lewej, otrzymamy równoległobok, który na powierzchni rzutowej staje się wstęgą Möbiusa (rys. 2).

A co zostaje? Na rysunku 3 widać, że dwa trójkąty, które odcięliśmy, na powierzchni rzutowej stają się kołem. Wobec tego powierzchnia rzutowa to nic innego, jak wstęga Möbiusa z doklejonym do jej brzegu (pamiętamy, że ma tylko jeden) kołem. Cały problem polega na tym, że tego koła nie można dokleić tak, żeby łączyło się ze wstęgą tylko na brzegu.

Teraz już mamy gdzie narysować graf: umieścimy go na wstędze Möbiusa. Wykonamy rysunek na pasku papieru, pamiętając, że po sklejeniu końców paska odpowiednie elementy rysunku muszą się zgadzać (rys. 4). O tym rysunku należy myśleć tak, jakby był wykonany na cienkim papierze flamastem, który przebija na drugą stronę (można zresztą wykonać odpowiedni model) – tylko wtedy otrzymamy dobry graf na wstędze Möbiusa. Litery przy krawędziach paska pomogą szybko sprawdzić, jak będą krawędzie grafu w miejscu połączenia.

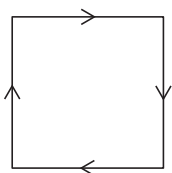
Sploty

Przedstawmy narzędzie potrzebne do dalszej pracy: sploty, czyli układy dwóch rozłącznych okręgów w przestrzeni trójwymiarowej. Interesuje nas, czy takie dwa okręgi są zaplątane tak, jak na przykład sąsiednie ogniwa łańcucha – to jest nie da się ich rozdzielić bez przzerwania jednego z nich (rys. 5). O takim splocie powiemy, że jest nietrywialny. Dokładniej, powiemy, że splot jest trywialny, jeśli w przestrzeni istnieje dysk (membrana, może być powyginana), którego brzegiem jest jeden z okręgów splotu i który nie ma punktów wspólnych z drugim okręgiem. Spróbuj przekonać się, Czytelniku, że splot ogniwa łańcucha nie spełnia tej definicji. Łatwo zgadnąć, że sploty nietrywialne to te, które nie są trywialne.

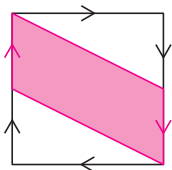
Jeśli popatrzymy na rysunek grafu w przestrzeni trójwymiarowej, czyli *reprezentację* tego grafu w \mathbb{R}^3 , to zwykle zobaczymy wiele splotów. Najpierw szukamy cykli prostych, czyli zamkniętych dróg po krawędziach grafu, które nie przechodzą dwa razy przez żaden wierzchołek. Taki cykl to w istocie okrąg, co najwyżej trochę wygięty. Sploty w grafie to pary cykli, które nie mają wspólnych wierzchołków. Widać, że jeśli graf ma dostatecznie dużo krawędzi, to jest w nim wiele możliwości utworzenia splotu. Informacja, ile jest splotów trywialnych, a ile nietrywialnych, to ważna cecha charakterystyczna rysunku grafu.

My, rzecz jasna, przyjrzymy się splotom w reprezentacjach grafu K_6 . W cyklu prostym muszą wystąpić przynajmniej trzy wierzchołki, czyli w naszej sytuacji splot może powstać jedynie przez podział zbioru wierzchołków na połowy i utworzenie cyklu z każdej połowy. Takich podziałów jest 10 – tyle będzie różnych splotów.

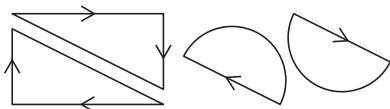
5



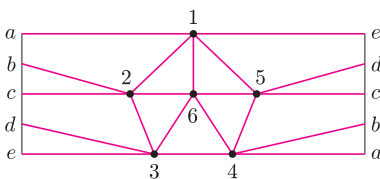
Rys. 1



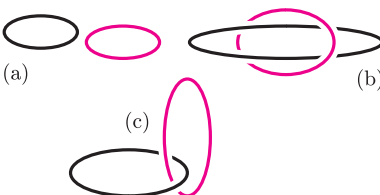
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5. (a), (b) sploty trywialne; (c) splot nietrywialny.

Potrzebujemy też własności reprezentacji grafu K_6 , którą wyraża następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Każda reprezentacja grafu K_6 w przestrzeni trójwymiarowej ma przynajmniej jeden nietrywialny splot.

Dowód tej własności opiera się na obliczaniu przypisanych splotom liczb, które moglibyśmy nazwać *współczynnikami zaplątania*. Nie jest dla nas istotne, jak to dokładnie przebiega, z wyjątkiem jednego bardzo ważnego szczegółu, wspomnianego już na początku. Powiedzieliśmy, że powierzchni rzutowej nie da się zanurzyć w trzech wymiarach w sposób *porządny* i tylko takie zanurzenia nas interesują. Porządne zanurzenie to, na przykład, zanurzenie za pomocą funkcji kawałkami liniowej albo dające się do takiego przekształcić za pomocą homeomorfizmu przestrzeni. To ograniczenie klasy rozpatrywanych zanurzeń jest konieczne właśnie po to, żeby działał dowód podanego twierdzenia.

Wszystko widać na rysunku

Teraz możemy wrócić do grafu K_6 narysowanego na wstędze Möbiusa (rys. 4). Umieszczając wstęgę w przestrzeni, otrzymujemy reprezentację grafu, w której będziemy badać sploty. O niektórych bardzo łatwo stwierdzić, że są trywialne. Spójrzmy, na przykład, na splot zadany przez podział wierzchołków na zbiory 1, 2, 3 i 4, 5, 6. Cykl odpowiadający wierzchołkom 1, 2 i 3 będzie dobrze widoczny dopiero po sklejeniu paska. Na rysunku są krawędzie od 1 do 2 i od 2 do 3, ale ostatnia krawędź powstaje przez sklejenie fragmentu od 3 do punktu oznaczonego literą e na lewym brzegu oraz fragmentu od litery e na prawym brzegu do wierzchołka 1. Natomiast cykl wierzchołków 4, 5 i 6 widać w całości już na pasku, na którym wykonaliśmy rysunek. Można zobaczyć nawet więcej – trójkąt ograniczony przez cykl 4, 5, 6 nie przecina się z krawędziami cyklu 1, 2, 3, więc po zanurzeniu wstęgi w przestrzeń tworzy dysk (mocno powyginany), rozpięty na cyklu 4, 5, 6, który świadczy o trywialności rozpatrywanego splotu.

Okazuje się, że zdecydowana większość splotów na tym rysunku zachowuje się podobnie. Czytelnik Skrupulatny prześledzi zapewne, że sploty dla wypisanych poniżej podziałów składają się z cyklu, który ogranicza pewną powierzchnię na wstędze (podkreślony cykl), i cyklu, który tej powierzchni nie przecina. Powierzchnię trzeba czasami skleić z dwóch kawałków, jak w przypadku cyklu 1, 2, 4, który ogranicza obszar będący sumą czworokąta $12ba$ i trójkąta $4ab$. Można zauważyć, że drugi cykl zawsze biegnie dookoła wstęgi.

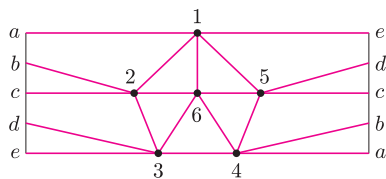
$$\begin{array}{cccccc} (123, \underline{456}) & (\underline{124}, 356) & (125, \underline{346}) & (126, 345) & & \\ (\underline{135}, 246) & (136, \underline{245}) & (145, \underline{236}) & (146, \underline{235}) & (\underline{156}, 234) & \end{array}$$

Wypisaliśmy 9 splotów – brakuje ostatniego, którym jest $(134, 256)$. Przypomnijmy, że podane wcześniej twierdzenie mówi, iż w naszej reprezentacji K_6 istnieje przynajmniej jeden nietrywialny splot. Ponieważ wszystkie inne są trywialne, więc $(134, 256)$ musi być nietrywialny. Zauważmy, że jego cykle to brzeg wstęgi (134) i okrąg biegnący przez jej środek (256) .

Załóżmy teraz, że udało nam się porządnie zanurzyć powierzchnię rzutową w przestrzeń. Zamiast powierzchni zobaczmy wstęgę Möbiusa i dysk doklejony do jej brzegu. Wiemy, że splot złożony z brzegu wstęgi i jej środkowego okręgu jest nietrywialny. To oznacza, że doklejony dysk, którego brzegiem jest brzeg wstęgi, musi przecinać środkowy okrąg wstęgi. Czyli doklejony dysk i wstęga stykają się w jakimś punkcie oprócz brzegu!

Wobec tego wcale nie zanurzyliśmy powierzchni rzutowej w przestrzeń, ponieważ pewne dwa punkty powierzchni – jeden z dysku, drugi z okręgu środkowego wstęgi – zostały umieszczone w tym samym punkcie przestrzeni. A to właśnie jest ten punkt, w którym okazuje się, że w krawieckim modelu powierzchni rzutowej nie można dalej przesunąć suwaka.

Homeomorfizm, mówiąc intuicyjnie, to przekształcenie, które punktom bliskim przypisuje punkty bliskie, a dalekim – dalekie.



Rysunek 4 jeszcze raz.



Rozwiązanie zadania F 789.

Jeśli pionowe siły działające na kulkę równoważą się, mamy

$$mg + 2N \sin \alpha = 2kN \cos \alpha,$$

gdzie N jest siłą nacisku deski na kulkę. Warunkiem równoważenia się momentów sił działających na zawias łączący deski jest

$$\frac{1}{2}Mgl \sin \alpha = \frac{1}{2}Nl,$$

gdzie l jest długością desek. Stąd:

$$k \geq \frac{m + 2M \sin^2 \alpha}{M \sin 2\alpha}.$$