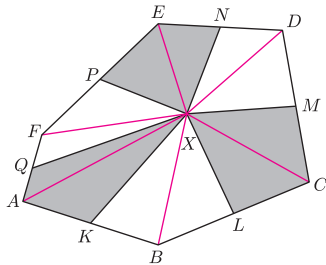


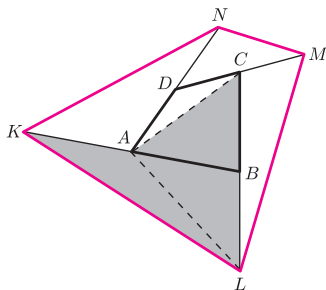
$$P = \frac{1}{2}ah$$

Najpopularniejszy wzór na pole trójkąta to jedna druga podstawa razy wysokość. Proste wnioski z tego wzoru pozwalają rozwiązać niełatwe czasem zadania.

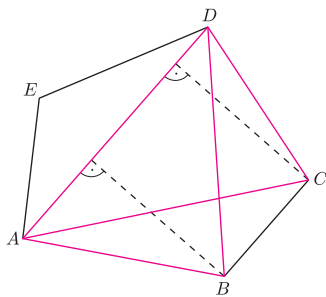
Nawias kwadratowy oznacza pole figury.



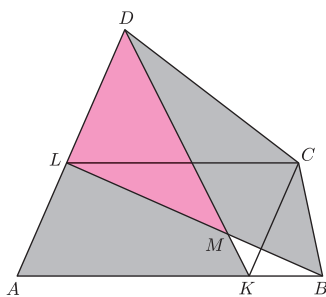
Rys. 1



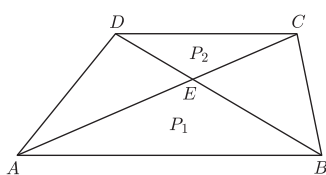
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

### Trójkąty o równych podstawach i wspólnej wysokości mają równe pola

1. Punkt  $X$  leży wewnątrz sześciokąta wypukłego  $ABCDEF$ . Punkty  $K, L, M, N, P, Q$  są odpowiednio środkami boków  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ . Wykaż, że  $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX]$  nie zależy od wyboru punktu  $X$ .

2. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$  o polu 1. Punkt  $K$  jest symetryczny do punktu  $B$  względem punktu  $A$ , punkt  $L$  jest symetryczny do punktu  $C$  względem punktu  $B$ , punkt  $M$  jest symetryczny do punktu  $D$  względem punktu  $C$ , punkt  $N$  jest symetryczny do punktu  $A$  względem punktu  $D$ . Oblicz  $[KLMN]$ .

3. Udowodnij, że środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o równych polach.

4. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ . Punkty  $K$  i  $L$  należą do boku  $AB$ , przy czym  $AK = KL = LB$ , a punkty  $M$  i  $N$  należą do boku  $CD$ , przy czym  $CM = MN = ND$ . Wykaż, że  $[KLMN] = \frac{1}{3}[ABCD]$ .

### Trójkąty o wspólnej podstawie i równych polach mają równe wysokości

5. Dany jest taki pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym pola trójkątów  $ABD, BCE, CDA, DEB$  i  $EAC$  są równe. Udowodnij, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

6. Każda z przekątnych  $AD, BE, CF$  sześciokąta wypukłego  $ABCDEF$  dzieli go na dwa czworokąty o równych polach. Wykaż, że trójkąty  $ACE$  i  $BDF$  są podobne.

### Trójkąty o wspólnej podstawie i równych wysokościach mają równe pola

7. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ . Punkty  $K$  i  $L$  należą odpowiednio do odcinków  $AB$  i  $AD$ , przy czym czworokąt  $AKCL$  jest równoległobokiem. Odcinki  $KD$  i  $BL$  przecinają się w punkcie  $M$ . Wykaż, że  $[AKML] = [BCDM]$ .

### Trójkąty o wspólnej wysokości mają stosunek pól równy stosunkowi podstaw

8. Przekątne czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $E$ . Wyznacz  $[ABE]$ , jeśli  $[BCE] = 4, [CDE] = 2, [DAE] = 3$ .

9. Przekątne trapezu  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $E$ . Dane są  $[ABE] = P_1$  i  $[CDE] = P_2$ . Wyznacz  $[ADE], [BCE]$  oraz  $[ABCD]$ .

Zadania 1 i 5 pochodzą z VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, zadanie 2 – z III OMG ([www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl)).

### Rozwiązania niektórych zadań

**R1.** Skoro  $AK = BK$ , to  $[AKX] = [BKX]$  (rys. 1). Podobnie  $[CLX] = [BLX], [CMX] = [DMX], [ENX] = [DNX], [EPX] = [FPX], [AQX] = [FQX]$ . Dodając stronami, uzyskujemy  $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX] = [KBLX] + [MDNX] + [PFQX]$ , czyli  $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX] = \frac{1}{2}[ABCDEF]$ .  $\square$

**R2.** Zauważmy, że  $[LAK] = [LAB]$ , bo trójkąty te mają równe podstawy  $KA = AB$  i wspólną wysokość z  $L$  (rys. 2). Ponadto  $[LAB] = [CAB]$  (ponieważ  $LB = BC$ ). Analogicznie  $[NCM] = [NCD] = [ACD]$ . Stąd  $[LBK] + [NDM] = 2[ABCD] = 2$ . Podobnie  $[MCL] + [KAN] = 2$  i ostatecznie  $[KLMN] = 5$ .  $\square$

**R5.** Trójkąty  $ABD$  i  $CDA$  mają wspólną podstawę  $AD$  i równe pola, więc też równe wysokości (rys. 3). Punkty  $B, C$  są po tej samej stronie prostej  $AD$ , stąd  $AD \parallel BC$ . Dla pozostałych przekątnych dowód jest analogiczny.  $\square$

**R7.** Zachodzą kolejno (rys. 4) równości  $[AKML] + [DLM] = [AKD] \stackrel{(*)}{=} [ACD] = [LCD] + [ACL] \stackrel{(**)}{=} [LCD] + [BCL] = [BCDL] = [BCDM] + [DLM]$ , przy czym  $(*)$  wynika z równoległości  $KC \parallel AD$ , a  $(**)$  z  $AB \parallel LC$ .  $\square$

**R9.** Trójkąty  $ABD$  i  $ABC$  mają wspólną podstawę i równe wysokości, więc też równe pola (rys. 5). Stąd  $[ADE] + [ABE] = [BCE] + [ABE]$ , czyli  $[ADE] = [BCE]$ .

Trójkąty  $ADE$  i  $CDE$  mają wspólną wysokość z  $D$ , więc  $[ADE]/[CDE] = AE/CE$ . Podobnie  $[ABE]/[BCE] = AE/CE$ . Stąd  $[ADE]/P_2 = P_1/[ADE]$ , czyli  $[ADE] = [BCE] = \sqrt{P_1 P_2}$ . Wobec tego  $[ABCD] = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$ .  $\square$

O podobnych zastosowaniach pojęcia objętości brył można przeczytać w *Delcie 9/2010*.