

Kącik przestrzenny (6) Czworosciany ortocentryczne

Tym razem, zgodnie z obietnicą, kącik poświęcimy czworoscianom ortocentrycznym. Jak wiadomo, nie w każdym czworoscianie istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości. Czworosciany mające taki punkt nazywane są *ortocentrycznymi*. Spróbujmy opisać je dokładniej.

Twierdzenie 1. Dla każdego czworoscianu następujące warunki są równoważne:

- istnieje punkt przecięcia wszystkich wysokości,
- przeciwnieległe krawędzie są prostopadłe,
- sumy kwadratów długości przeciwnieległych krawędzi są równe,
- równoległoscian opisany na czworoscianie jest rombościanem,
- środki krawędzi leżą na jednej sferze,
- biśrodkowe są równej długości,
- kwadrat długości każdego odcinka łączącego środki przeciwnieległych krawędzi jest równy sumie kwadratów ich długości podzielonej przez 4,
- iloczyn sinusów przeciwnieległych kątów dwuściennych są równe.

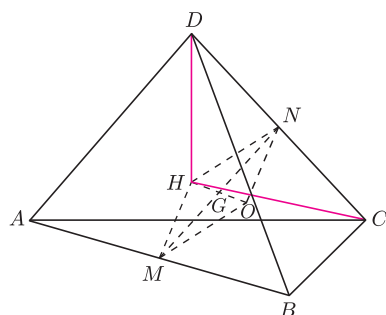
Biśrodkowe, czyli odcinki łączące środki przeciwnieległych krawędzi czworoscianu, pojawiły się w trzecim odcinku kącika przestrzennego (*Delta* 5/2010).

Dowód równoważności tych własności warto potraktować jako zadanie; rozwiązanie można znaleźć na internetowej stronie *Delt*y.

O prostej Eulera pisaliśmy ostatnio w numerze 1/2009.

Udowodnimy teraz pewną własność czworoscianów ortocentrycznych analogiczną do prostej Eulera na płaszczyźnie, czyli prostej przechodzącej przez środek okręgu opisanego, środek ciężkości i ortocentrum danego trójkąta.

1. Środek ciężkości czworoscianu ortocentrycznego, jego ortocentrum i środek sfery na nim opisanej leżą na jednej prostej, a ponadto środek ciężkości jest środkiem odcinka łączącego pozostałe dwa wymienione punkty.



Rozwiązanie. W czworoscianie ortocentrycznym $ABCD$ niech O będzie środkiem sfery opisanej, a M i N – środkami krawędzi AB i CD . Przez G oznaczmy środek odcinka MN , czyli środek ciężkości czworoscianu $ABCD$. Niech H będzie punktem symetrycznym do O względem G (rysunek). Punkty O, G, H leżą wtedy na jednej prostej, a G jest środkiem odcinka OH . Wobec tego chcemy wykazać, że H jest ortocentrum czworoscianu $ABCD$.

Zauważmy, że czworokąt $MONH$ jest równoległobokiem. W szczególności proste OM i HN są równoległe. Z definicji punktów O i M wynika, że odcinki OM i AB są prostopadłe, więc również $HN \perp AB$. Stąd i z prostopadłości prostych AB i CD ($ABCD$ jest ortocentryczny!) wynika, że płaszczyzna CDH jest prostopadła do prostej AB . W takim razie prosta DH jest prostopadła do prostej AB . Analogicznie dowodzimy, że DH jest prostopadła również do prostej BC .

To zaś oznacza, że jest prostopadła do całej płaszczyzny ABC , czyli stanowi wysokość czworoscianu $ABCD$. Podobnie dowodzimy, że proste AH, BH, CH są wysokościami rozpatrywanego czworoscianu, co kończy dowód.

Na koniec zadanie dla Czytelników.

2. Wykazać, że w czworoscianie ortocentrycznym środki ciężkości ścian, spodki wysokości czworoscianu oraz punkty dzielące odcinki łączące ortocentrum czworoscianu z jego wierzchołkami w stosunku $2 : 1$ (licząc od wierzchołków) leżą na jednej sferze.

Wskazówka: jaka jest średnica tej sfery?

O okręgu dziewięciu punktów i sferze dwunastu punktów można przeczytać w *Delcie* 3/1999.

Jest to *sfera dwunastu punktów* – przestrzenny odpowiednik okręgu dziewięciu punktów, czyli okręgu przechodzącego przez środki boków danego trójkąta, spodki jego wysokości i środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum.

Więcej zadań o czworoscianach ortocentrycznych można znaleźć na internetowej stronie *Delt*y.

Michał KIEZA