



Każda jedynek prócz  $\binom{0}{0}$  też spełnia warunek (\*): jest sumą jedynki nad nią i umownego zera na zewnątrz trójkąta.

## Trójkątne dowody

Joanna JASZUŃSKA

Symbol Newtona  $\binom{n}{k}$  dla liczb całkowitych  $n, k \geq 0$  oznacza liczbę sposobów wybrania zbioru  $k$  elementów spośród  $n$ . W szczególności  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .

Ze zbioru  $(n+1)$ -elementowego z jednym elementem wyróżnionym  $k+1$  elementów można wybrać, biorąc wyróżniony element i  $k$  z pozostałych  $n$ , albo wybierając wszystkie  $k+1$  spośród  $n$  niewyróżnionych. Stąd  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ .

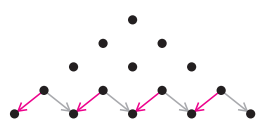
Z symboli Newtona można zbudować *trójkąt Pascala* (rys. 1), w którym w  $n$ -tym wierszu (numerując od 0) stoją kolejno wartości  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ . Na mocy powyższych wzorów liczby wzdłuż ramion trójkąta są równe 1, a wewnątrz *każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących nad nią (\*)*.

Korzystając z trójkąta Pascala i własności (\*) można udowodnić wiele tożsamości.

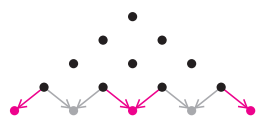
$$\begin{array}{cccccccc} \binom{0}{0} & = & 1 & & & & & & \\ \binom{1}{0} & = & 1 & \binom{1}{1} & = & 1 & & & \\ \binom{2}{0} & = & 1 & \binom{2}{1} & = & 2 & \binom{2}{2} & = & 1 \\ \binom{3}{0} & = & 1 & \binom{3}{1} & = & 3 & \binom{3}{2} & = & 3 & \binom{3}{3} & = & 1 \\ \binom{4}{0} & = & 1 & \binom{4}{1} & = & 4 & \binom{4}{2} & = & 6 & \binom{4}{3} & = & 4 & \binom{4}{4} & = & 1 \\ \binom{5}{0} & = & 1 & \binom{5}{1} & = & 5 & \binom{5}{2} & = & 10 & \binom{5}{3} & = & 10 & \binom{5}{4} & = & 5 & \binom{5}{5} & = & 1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Rys. 1. Na dalszych rysunkach liczby oznaczamy kropkami.

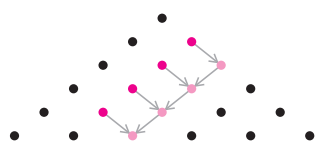
1.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  oraz  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$  dla  $n > 0$ .
2.  $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ .
3.  $T_n \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2}$  oraz  $\sum_{k=1}^n T_k = \binom{n+2}{3}$ .
4.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .



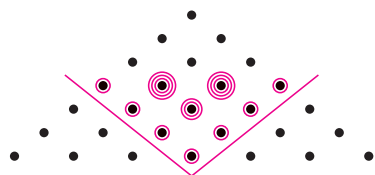
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

### Rozwiązania

**R1.** Dla  $n=0$  suma  $\binom{n}{k}$  równa jest  $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$ . W kolejnych wierszach, na mocy (\*), suma liczb jest dwukrotnością sumy poprzedniego wiersza (rys. 2), uzyskujemy więc kolejne potęgi dwójki.

Suma  $\binom{n}{k}$  dla  $k$  parzystych równa jest sumie  $\binom{n}{k}$  dla  $k$  nieparzystych (i równa sumie wyrazów poprzedniego wiersza, rys. 3). Stąd różnica tych dwóch sum daje zero.  $\square$

**R2.** Sumujemy wyrazy jak na rysunku 4, od góry, korzystając z (\*).  $\square$

**R3.** Z rysunku 4 i z poprzedniego zadania  $T_n = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$  oraz

$$\sum_{k=1}^n T_k = \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}. \square$$

**R4.** Element  $\binom{2n}{n}$  jest środkowym wyrazem wiersza numer  $2n$ . Na mocy (\*) jest on sumą dwóch wyrazów nad nim, a więc też sumą trzech wyrazów o dwa wiersze wyżej, przy czym środkowy z nich liczymy dwukrotnie. Stąd jest także sumą czterech środkowych wyrazów jeszcze wyższego wiersza, liczonych z krotnościami odpowiednio 1, 3, 3, 1, itd. Na rysunku 5 zilustrowano uzyskane w ten sposób dwa „przenikające się” trójkąty Pascala — wyjściowy oraz drugi „do góry nogami”, oznaczający krotności, z jakimi liczyć należy wyrazy z coraz wyższych wierszy.

Trójkąty te mają wspólny  $n$ -ty wiersz i stąd  $\binom{2n}{n}$  jest sumą wyrazów tego wiersza, liczonych z krotnościami odpowiadającymi im samym, co kończy dowód.  $\square$

### Zadania domowe

5. Wykaż, że  $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} (n-k+1) = \binom{n+2}{m+2}$ .

6. Niech  $0 \leq a, b \in \mathbb{N}$ . Wyznacz sumę tych  $\binom{n}{k}$ , dla których  $n-k \leq a$  oraz  $k \leq b$ .

Wskazówka 5 i 6. Zinterpretuj szukane sumy na trójkącie Pascala i skorzystaj z zadania 2.

7. Niech  $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$ . Wykaż, że  $S_{n+1} = 3 \cdot 2^{3n} - S_n$ .

Wskazówka 7. Przyda się zadanie 1 oraz rozumowanie jak w rozwiązaniu zadania 4.