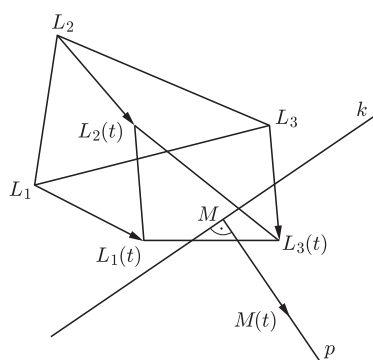


Na łowy!

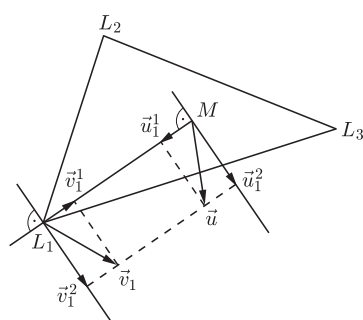
Jarosław GÓRNICKI*

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska

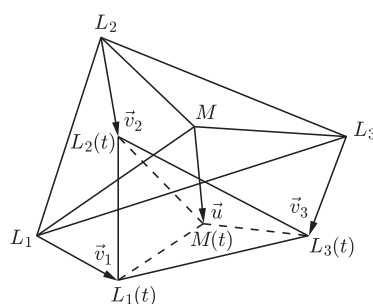
Podobny problem był rozważany w artykule J. Górnickiego *Lew i człowiek* w *Delcie* 2/2013. Wtedy myśliwy był w trochę lepszej sytuacji, ponieważ gonił go tylko jeden lew.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Lemat 1 jest prawdziwy dla dowolnego wielokąta wypukłego.

Epizod 1

Stado lwic L_1, L_2, \dots, L_n , gdzie $n \geq 3$, oraz myśliwy M (rozważani jako punkty płaszczyzny euklidesowej) poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami. Kiedy myśliwy ma skuteczną strategię ucieczki przed grupą lwic? Kiedy lwice mają skuteczną strategię pochycenia myśliwego w skończonym czasie?

Oznaczmy przez $L_j(t), M(t)$ położenia „uczestników” polowania w czasie $t \geq 0$ i niech $\text{conv}\{L_1(0), L_2(0), \dots, L_n(0)\}$ oznacza najmniejszy zbiór wypukły zawierający wszystkie punkty $L_j(0), j = 1, 2, \dots, n$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $M = M(0)$ nie jest punktem wewnętrznym zbioru $C = \text{conv}\{L_1(0), L_2(0), \dots, L_n(0)\}$ i $M \neq L_j$ dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, to istnieje strategia pozwalająca myśliwemu na ucieczkę przed każdą lwicą L_j .*

Dowód. W opisanej sytuacji istnieje taka prosta k przechodząca przez punkt M , że zbiór C leży w jednej półpłaszczyźnie (domkniętej) ograniczonej prostą k . Niech p będzie półprostą o początku w punkcie M prostopadłą do prostej k , leżącą w półpłaszczyźnie niezawierającej zbioru C (rys. 1). Wówczas Czytelnik Wnikliwy łatwo sprawdzi, że myśliwy może uciec przed wszystkimi lwicami, poruszając się z maksymalną prędkością wzdłuż półprostej p . □

Ale może się zdarzyć, że myśliwy wpadnie w pułapkę zastawioną przez lwice...

Twierdzenie 2. *Jeżeli $M = M(0)$ jest punktem wewnętrznym trójkąta $L_1(0)L_2(0)L_3(0)$, to istnieje strategia gwarantująca tym trzem lwicom pochycenie myśliwego w skończonym czasie.*

Dowód. Opracowując strategię polowania dla lwic, będziemy żądali, by:

- lwice natychmiast reagowały na zmiany kierunku ucieczki myśliwego,
- w każdej chwili t myśliwy należał do wnętrza obszaru wyznaczonego przez aktualne pozycje lwic,
- odległość myśliwego od każdej lwicy nie powiększała się,
- lwice nie potrzebowały zewnętrznego koordynatora ani nie traciły czasu na wymianę informacji z otoczeniem.

Uwzględniając te wymagania, wskażemy kierunek pogoni każdej lwicy L_j w zależności od kierunku ucieczki myśliwego.

Załóżmy, że myśliwy M ucieka z prędkością wskazaną przez wektor \vec{u} , a każda lwica L_j ściga go z prędkością wskazaną przez wektor \vec{v}_j , taką, że $|\vec{v}_j| = |\vec{u}|$ (gdzie $|\vec{u}|$ oznacza długość wektora \vec{u}), ponieważ wszyscy poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami (rys. 2). Wyznamy teraz wektor prędkości \vec{v}_j . Niech \vec{u}_j^1 będzie rzutem prostokątnym wektora \vec{u} na prostą L_jM , a \vec{u}_j^2 będzie rzutem prostokątnym wektora \vec{u} na prostą prostokątną do prostej L_jM wystawioną w punkcie M . Następnie w punkcie L_j zaczepiamy wektory składowe: \vec{v}_j^2 , taki, że $\vec{v}_j^2 = \vec{u}_j^2$ i wektor \vec{v}_j^1 o zwrocie w kierunku punktu M , taki, że $|\vec{v}_j^1| = |\vec{u}_j^1|$. Wówczas wektor $\vec{v}_j = \vec{v}_j^1 + \vec{v}_j^2$ wskazuje prędkość poruszania się lwicy L_j .

Po upływie czasu $t > 0$ położenia uczestników polowania ilustruje rysunek 3. Z przedstawionej konstrukcji wynika, że $L_jM \parallel L_j(t)M(t)$ dla $j = 1, 2, 3$, więc punkt $M(t)$ jest punktem wewnętrznym zbioru $\text{conv}\{L_1(t), L_2(t), L_3(t)\}$. Ponadto odległość między punktami $M(t)$ a $L_j(t)$ nie wzrosła.

Ostatnią obserwację można istotnie wzmocnić, korzystając z następującego lematu.

Lemat 1. *Jeżeli M jest punktem wewnętrznym trójkąta $L_1L_2L_3$, to istnieje taki kąt ostry γ , że dla pewnego $j_0, |\angle(\vec{u}, \vec{a}_{j_0})| \leq \gamma$, gdzie $\vec{a}_j = \vec{ML}_j, j = 1, 2, 3$.*



Przedstawioną strategię polowania lwic może wykorzystać grupa $n \geq 3$ okrętów do przechwycenia okrętu wroga na oceanie. Przechwycenie nastąpi szybciej, gdy prędkość okrętów pościgowych będzie większa niż prędkość okrętu uciekającego.

Dowód lematu. Półproste o początku w punkcie M zgodne z wektorami \vec{a}_j rozcinają płaszczyznę na trzy kąty o mierze mniejszej niż π . Jeżeli największy z nich ma miarę β , to $\gamma = \frac{\beta}{2}$ spełnia warunki lematu. \square

Co stąd wynika? Zauważmy, że w każdym momencie trwania pościgu układ wektorów $\vec{a}_j = M(t)L_j(t)$ pozostaje względem siebie niezmienny. Gwarantuje to, że w każdym momencie pościgu istnieje taki wektor \vec{a}_j , że $|\angle(\vec{u}, \vec{a}_j)| \leq \gamma$, gdzie γ jest kątem z lematu 1. Ponieważ

$$|\vec{v}_j^2| = |\vec{u}_j^2| \leq |\vec{u}| \cdot \sin \gamma,$$

więc

$$|\vec{v}_j^1| = \sqrt{|\vec{v}_j|^2 - |\vec{v}_j^2|^2} \geq \sqrt{|\vec{u}|^2 - (|\vec{u}| \cdot \sin \gamma)^2} = |\vec{u}| \cdot \cos \gamma.$$

Skoro wektor \vec{v}_j^1 jest skierowany w stronę punktu M , a wektor \vec{u}_j^1 jest skierowany do punktu L_j , więc odległość między punktami M i L_j maleje z prędkością nie mniejszą niż $|\vec{u}| \cdot \cos \gamma$. Oznacza to, że suma odległości $|ML_1| + |ML_2| + |ML_3|$ maleje z prędkością nie mniejszą niż $|\vec{u}| \cdot \cos \gamma$. Stąd wynika, że lwice złapią myśliwego w skończonym czasie, co kończy dowód twierdzenia. \square

Uwaga. Sytuacja komplikuje się, gdy grupa polujących lwic zostaje zmniejszona. Może się zdarzyć tak, że wyeliminowanie określonej lwicy daje myśliwemu szansę na skuteczną ucieczkę. Jeśli $M \notin \overline{\text{conv}}\{\{L_1, L_2, \dots, L_n\} \setminus \{L_k\}\}$, to na mocy twierdzenia 1 myśliwy może uciec po wyeliminowaniu lwicy L_k . Sytuacja ta wymaga jednak od myśliwego wiedzy na temat wszystkich goniących go lwic w każdej chwili t , a także zastanowienia – spełnienie tego warunku może być trudne...

Epizod 2

Stado ptaków P_1, P_2, \dots, P_n , gdzie $n \geq 4$ oraz mucha M (rozważane jako punkty przestrzeni euklidesowej) poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami. Kiedy mucha ma skuteczną strategię ucieczki przed stadem ptaków? Kiedy ptaki mogą pochwycić muchę w skończonym czasie?

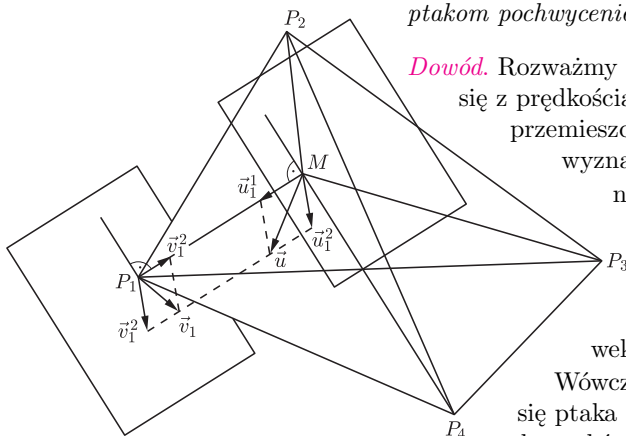
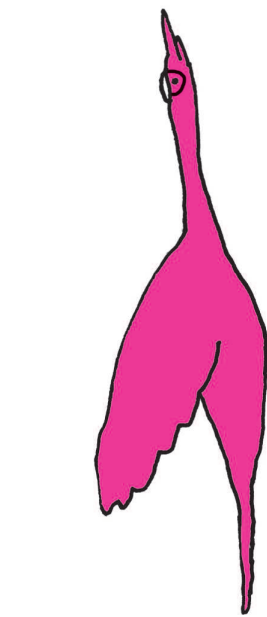
Następującą obserwację możemy uzasadnić, opierając się na tym samym pomysle, co w dowodzie twierdzenia 1.

Twierdzenie 3. Jeżeli $M = M(0)$ nie jest punktem wewnętrznym zbioru $C = \overline{\text{conv}}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ i $M \neq P_j$ dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, to mucha M ma skuteczną strategię ucieczki przed każdym ptakiem P_j .

Dowód kolejnego twierdzenia będzie wymagał więcej pracy.

Twierdzenie 4. Jeżeli $M = M(0)$ jest punktem wewnętrznym czworościanu $P_{j_1}P_{j_2}P_{j_3}P_{j_4}$, gdzie $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1, 2, \dots, n\}$, to istnieje strategia gwarantująca ptakom pochwycenie muchy w skończonym czasie.

Dowód. Rozważmy czworościan $P_1P_2P_3P_4$. Załóżmy, że mucha M porusza się z prędkością wskazaną przez wektor \vec{u} . Wówczas ptak P_j powinien przemieszczać się z prędkością wskazaną przez wektor \vec{v}_j , który teraz wyznaczmy. Niech \vec{u}_j^1 będzie rzutem prostopadłym wektora \vec{u} na prostą MP_j , a \vec{u}_j^2 będzie rzutem prostopadłym wektora \vec{u} na płaszczyznę przechodzącą przez punkt M i prostopadłą do prostej MP_j . Następnie w punkcie P_j zaczepiamy taki wektor \vec{v}_j^2 , że $\vec{v}_j^2 = \vec{u}_j^2$ (leży on w płaszczyźnie prostopadłej do prostej P_jM przechodzącej przez punkt P_j) oraz wektor \vec{v}_j^1 o zwrocie w kierunku punktu M , taki, że $|\vec{v}_j^1| = |\vec{u}_j^1|$. Wówczas wektor $\vec{v}_j = \vec{v}_j^1 + \vec{v}_j^2$ wskazuje prędkość poruszania się ptaka P_j (rys. 4). Konstrukcja ta (nawet dla liczniejszego stada ptaków) nie powiększa żadnej odległości między muchą M a ptakiem P_j oraz nie zmienia wzajemnego położenia wektorów $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$.



Rys. 4

Skuteczność tej strategii wynika z następującego lematu.

Lemat 2 jest prawdziwy dla dowolnego wielościanu wypukłego.

Lemat 2. Jeżeli M jest punktem wewnętrznym czworościanu $P_1P_2P_3P_4$, to istnieje taki kąt ostry β , że dla pewnego j_0 , $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{a}_{j_0})| \leq \beta$, gdzie $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Dowód lematu. Półproste o początku w punkcie M zawierające wektory $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, dzielą przestrzeń na cztery kąty wielościenne (każdy taki kąt wielościenny jest wyznaczony przez trzy kąty płaskie o wspólnym wierzchołku M generowane przez trzy różne półproste). W każdym wielościanie $MP_iP_jP_k$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ i liczby i, j, k są parami różne, rzutujemy prostopadłe punkt M na płaszczyznę trójkąta $P_iP_jP_k$. Rzut ten oznaczamy przez R_h , gdzie $h \in (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j, k\})$. Wówczas każdy z kątów płaskich R_hMP_j , gdzie $j \neq h$ i $j, h \in \{1, 2, 3, 4\}$, jest ostry (bo M jest punktem wewnętrznym czworościanu $P_1P_2P_3P_4$). Niech

$$(1) \quad \max_{j, h \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq h} |\sphericalangle R_hMP_j| = \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Wektor \vec{u} (prędkości muchy M) zawiera się w pewnym kącie trójściennym $MP_iP_jR_h$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to kąt trójścienny $MP_1P_4R_2$ (rys. 5), w którym zgodnie z opisem prosta MR_2 jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty P_1, P_4, R_2 . Niech prosta zawierająca wektor \vec{u} przebija powierzchnię trójkąta $P_1P_4R_2$ w punkcie D . Wówczas

$$(2) \quad |P_1D| + |DP_4| \leq |P_1R_2| + |R_2P_4|.$$

Rzeczywiście, gdy przedłużenie odcinka P_4D przecina bok P_1R_2 w punkcie E (rys. 6), to korzystając z nierówności trójkąta, mamy

$$|P_1D| \leq |P_1E| + |ED| \quad \text{i} \quad |P_4D| + |DE| \leq |ER_2| + |R_2P_4|.$$

Dodajemy te nierówności stronami, a następnie od obu stron nierówności odejmujemy wielkość $|ED|$ i otrzymujemy (2).

$$(3) \quad |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})| + |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})| \leq |\sphericalangle R_2MP_1| + |\sphericalangle R_2MP_4|.$$

Gdy na płaszczyźnie Π wykreślimy trójkąty R_2MP_1, R_2MP_4 tak, że punkty P_1 i P_4 leżą po różnych stronach prostej MR_2 , rys. 7, to punkty P_1, R_2, P_4 leżą na prostej (bo odcinek R_2M jest prostopadły do płaszczyzny trójkąta $P_1R_2P_4$). Następnie na płaszczyźnie Π w kącie P_1MP_4 wykreślamy trójkąt P_1MF podobny do trójkąta P_1MD , gdzie $|\sphericalangle P_1MF| = |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})|$ i $|P_1F| = |P_1D|$ i $|MF| = |MD| \geq |MR_2|$, oraz trójkąt P_4MG podobny do trójkąta P_4MD , gdzie $|\sphericalangle P_4MG| = |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})|$ i $|P_4G| = |P_4D|$ i $|MG| = |MD| \geq |MR_2|$, rys. 7.

Wówczas na podstawie nierówności (2) prawdziwa jest nierówność (3).

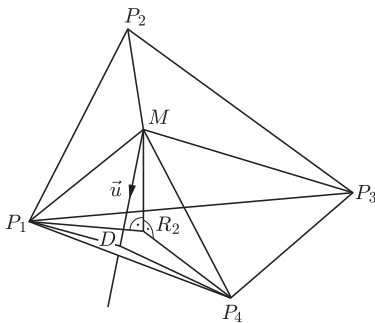
Z nierówności (3) oraz z warunku (1) wynika, że

$$|\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})| + |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})| \leq 2\beta,$$

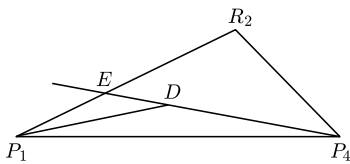
czyli jeden z kątów $(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})$ lub $(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})$ ma miarę nie większą niż β . Oznacza to, że w każdym momencie pościgu istnieje $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, takie, że $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{a}_j)| \leq \beta$.

To kończy dowód lematu; dalej dowód twierdzenia 5 przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2. \square

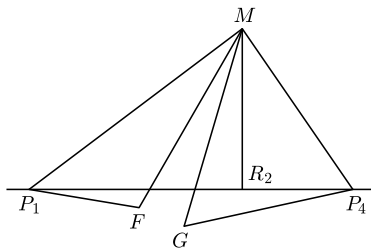
Dla obiektów poruszających się z identycznymi prędkościami maksymalnymi istnieją na płaszczyźnie i w przestrzeni modele *pulapek* i strategii *polowań* o stuprocentowej skuteczności, przynajmniej teoretycznie. Dodatkowo, dzieje się to przy założeniu braku wymiany informacji między goniącymi i nie wymaga koordynatora! Ten ostatni element stwarza jednak pewne ryzyko w praktycznych zastosowaniach tej teorii: uruchomionym pościgiem nie można sterować. Wydaje się, że tego typu strategii mogą być stosowane w programowaniu, grach ekonomicznych i wojennych, a może także na poziomie molekularnym, np. do zwalczania groźnych komórek – to jednak temat na inny artykuł.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

