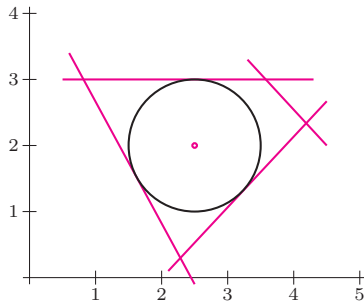


# Programowanie liniowe w geometrii

Anna WÓJCIK\*

\*studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Programowanie liniowe to klasa takich zagadnień optymalizacyjnych, w których wszystkie warunki i funkcja celu mają postać liniową. Istnieją standardowe (ale nie trywialne) efektywne algorytmy rozwiązujące ten problem.



Na rysunku przedstawiony jest największy okrąg mieszczący się w kolorowym czworokącie. Środek tego okręgu jest środkiem Czebyszewa kolorowego czworokąta.

Wielokąt wypukły jest przecięciem półpłaszczyzn o brzegach zawierających boki tego wielokąta.

Proste do zdefiniowania i zrozumienia problemu geometrycznego często są trudne do rozwiązania i wymagają użycia skomplikowanych algorytmów. Weźmy, na przykład, zadanie polegające na znalezieniu największego okręgu, który możemy zmieścić w wielokącie. Środek tego okręgu nazywany jest *środkiem Czebyszewa*. Jeżeli mamy do czynienia z dowolnie wybranym trójkątem bądź wielokątem foremnym, środek Czebyszewa znajduje się w punkcie przecięcia dwusiecznych jego dwóch dowolnych kątów. Zagadnienie staje się o wiele bardziej skomplikowane, gdy weźmiemy pod uwagę dowolny, nieregularny wielokąt.

Zadanie znalezienia największego okręgu, który można wpisać w wielokąt, jest równoważne zadaniu znalezienia punktu o największej odległości od brzegu tego wielokąta. Jeden z algorytmów numerycznych, który wydaje się skuteczny przy rozwiązywaniu tego zagadnienia, nazywany jest *algorytmem sekwencyjnym*. Polega on na wybraniu kandydata na poszukiwany środek Czebyszewa, skonstruowaniu pewnej siatki węzłów dookoła kandydata (w sposób deterministyczny bądź losowy) i wskazaniu węzła o największej odległości od brzegu. Węzeł ten staje się nowym kandydatem na środek Czebyszewa, wokół którego konstruowana jest nowa, odpowiednio „ciaśniejsza” siatka. Procedura ta powtarzana jest aż do osiągnięcia pożądanej precyzji.

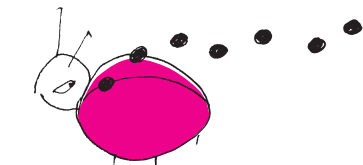
Opisaną metodę można stosować do dowolnie wybranych wielokątów, co jest jej zdecydowaną zaletą, niestety, czasem nie prowadzi ona do znalezienia interesującego nas środka. Jeżeli ograniczymy się tylko do wielokątów wypukłych, zdecydowanie lepszym podejściem jest skorzystanie z *programowania liniowego*. Sprowadzając problem do odpowiedniego układu liniowych nierówności, w prosty sposób możemy dla dowolnego wielokąta wypukłego znaleźć największy okrąg weń wpisany, wykorzystując programowanie liniowe.

Można się teraz zastanowić, czy ten ciekawy problem geometryczny ma swoje zastosowanie w rzeczywistej praktyce. Otóż opisane wyżej metody stosuje się do wyznaczania tak zwanych *biegunów niedostępności*, czyli punktów na Ziemi o pewnych ekstremalnych cechach geograficznych. Na przykład, oceaniczny biegun niedostępności to punkt na oceanie najbardziej oddalony od lądu. Punkt ten został wyznaczony w 1992 roku, nazywa się „Nemo” i znajduje się na Oceanie Spokojnym, 2688 km od najbliższych wysp. Północny biegun niedostępności to niezwykle trudno dostępne miejsce na Oceanie Arktycznym, znajdujące się na paku lodowym (wieloletnim, dryfującym lodzie morskim), najbardziej oddalone od stałego lądu. Kontynentalnym biegunem niedostępności dla Eurazji jest oddalone o 2645 km od najbliższego wybrzeża miejsce w Chinach.

Przyjrzyjmy się temu zagadnieniu na przykładzie Polski. Jeśli kontur kraju przybliżymy wielokątem wypukłym, to posługując się metodami programowania liniowego, możemy odnaleźć środek Czebyszewa tego wielokąta, a zatem przybliżenie punktu najbardziej oddalonego od każdej z granic lądowych oraz wybrzeża. Wielokąt został wybrany jak na ilustracji obok. Pora na wyprowadzenie interesującego nas problemu liniowego.

Wybrany wielokąt ma siedem wierzchołków. Znajdujemy jego odzwierciedlenie w układzie kartezjańskim za pomocą kalkulatora geograficznego, dostępnego, na przykład na stronie [www.piastr.edu.pl](http://www.piastr.edu.pl) (jednostką są metry). Teraz wyprowadźmy siedem nierówności, które opisują zadany wielokąt. Rozpatrzmy prostą, która przechodzi przez ten najbardziej wysunięty na północ z wybranych punktów:  $54^{\circ}75' N$ ,  $18^{\circ}3' E$  oraz ten na północnym zachodzie  $53^{\circ}50' N$ ,  $14^{\circ}14' E$ . W układzie kartezjańskim będą to punkty  $(934076,97; 6061855,94)$ ,  $(1155571,89; 6220125,62)$ . Rozwiązując elementarny układ równań, otrzymujemy wzór szukanej prostej:

$$158269,68x - 221494,92y + 1194834233344,56 = 0.$$



Oczywiście, interesujący nas obszar znajduje się „pod” powyższą prostą, a zatem pierwsza z opisujących go nierówności powstaje poprzez zamianę znaku „=” w powyższej równości na „≥”. To samo robimy dla kolejnych sześciu boków wybranego wielokąta.

Gdy już znajdziemy siedem półpłaszczyzn, których przecięcie tworzy interesujący nas wielokąt, możemy w prosty sposób sprowadzić zadanie do programowania liniowego. Najpierw nierówności, które uzyskaliśmy w poprzednim kroku, przedstawiamy w postaci

$$A_i x + B_i y \leq C_i,$$

gdzie  $i \in \{1, \dots, 7\}$ . Wybrany wielokąt wypukły można więc zapisać jako:

$$W = \{(x, y) : A_i x + B_i y \leq C_i, i = 1, \dots, 7\}.$$

Zadanie polega, jak pamiętamy, na znalezieniu środka Czebyszewa  $(x_c, y_c)$  oraz promienia  $r$  koła  $K$  o środku w  $(x_c, y_c)$  – największego koła mieszczącego się w naszym wielokącie. Mamy zatem trzy nieujemne zmienne  $(x_c, y_c, r)$  oraz funkcję celu równą  $r$ , którą będziemy maksymalizować na pewnym ograniczonym zbiorze.

Zwróćmy uwagę, że nierówność  $A_i x + B_i y \leq C_i$  dla każdego punktu  $(x, y)$  w kole  $K$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność:

$$(*) \sup_{(x,y)} \{A_i(x_c + x) + B_i(y_c + y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\} \leq C_i.$$

Na mocy nierówności Cauchy’ego–Schwarza dostajemy  $A_i x + B_i y \leq \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \sqrt{x^2 + y^2}$ . W tej sytuacji nierówność (\*) może zostać zapisana jako

$$A_i x_c + B_i y_c + \sqrt{A_i^2 + B_i^2} r \leq C_i,$$

a nasz problem można sformułować w prostej do rozwiązania przez program postaci: „Znajdź trójkę  $(x_c, y_c, r)$  w zbiorze

$$\{A_i x_c + B_i y_c + \sqrt{A_i^2 + B_i^2} r \leq C_i : i = 1, \dots, 7\},$$

dla której wartość  $r$  jest możliwie największa”.

Powyższe zagadnienie można łatwo zaimplementować i szybko obliczyć w programie Sage (<http://sagecell.sagemath.org/?q=egjobr>). Okazuje się, że obliczając w ten sposób, miejsce w Polsce najbardziej oddalone od wszystkich granic jest położone we wsi Jackowice w województwie łódzkim, w odległości 24 km od uważanego za geometryczny środek Polski punktu w miejscowości Piątek.

Programowanie liniowe okazuje się skuteczną i prostą w użyciu metodą rozwiązywania wielu zagadnień. Tutaj pokazaliśmy, jak można stosować tę metodę do rozwiązywania ciekawych zadań geometrycznych, a pośrednio również problemów geograficznych.



## Wpisywanie w przestrzeni

W poprzednim numerze przedstawiliśmy cykl wzajemnie wpisanych trójkątów i dwa wzajemnie wpisane pięciokąty. To było na płaszczyźnie. A teraz będzie przykład wzajemnego wpisania w przestrzeni trójwymiarowej.

Jeśli kartkę z widocznym obok rysunkiem zegnijemy wzdłuż poziomej prostej, to zobaczymy dwa wzajemnie wpisane czworokąty – ten z kolorowymi wierzchołkami i ten z szarymi. Sprawdźmy to.

To, że  $S'$  leży na płaszczyźnie  $PQR$  jest oczywiste – są na tej samej części kartki.

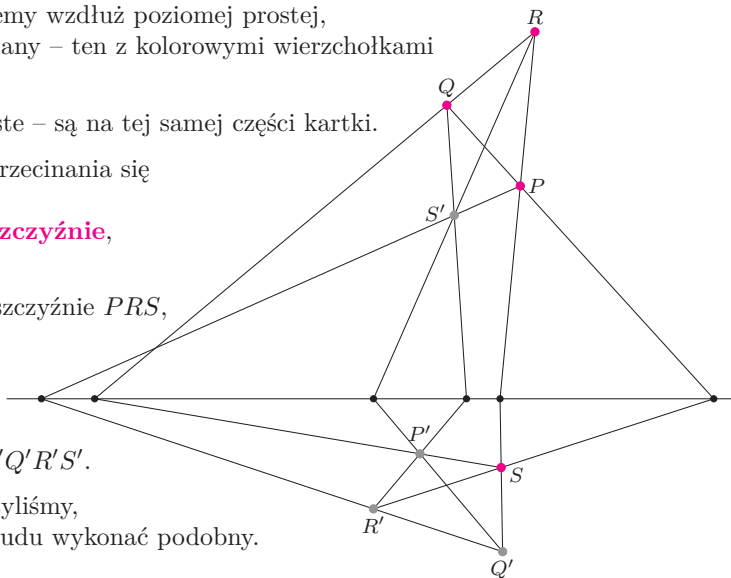
To, że  $P'$  leży na płaszczyźnie  $QRS$ , wynika z przecinania się prostych  $P'S$  i  $QR$ , bowiem **przecinające się proste leżą na jednej płaszczyźnie**, zresztą tak samo jest z prostymi równoległymi.

Ten sam argument uzasadnia, że  $Q'$  leży na płaszczyźnie  $PRS$ , a  $R'$  na płaszczyźnie  $PQS$ .

Tak więc czworokąt  $P'Q'R'S'$  jest wpisany w czworokąt  $PQRS$ .

Analogicznie uzasadniamy wpisanie  $PQRS$  w  $P'Q'R'S'$ .

Wypada też zauważyć, że w rysunku, którego użyliśmy, nie ma nic nadzwyczajnego – każdy może bez trudu wykonać podobny.



Oto przepis:

Rysujemy poziomą prostą, a nad nią byle jaki czworokąt, którego ani żaden bok, ani przekątna nie są poziome. I te boki, i przekątne przecinamy poziomą prostą. Następnie dowolnie nazywamy wierzchołki czworokąta literami  $P, Q, R, S'$ .

Teraz po drugiej stronie poziomej prostej wybieramy dowolnie punkt  $P'$  i łączymy go prostymi z jej punktami przecięcia z prostymi  $QR, RS'$  i  $S'Q$ . Na ostatniej z tak powstałych prostych wybieramy dowolnie punkt  $R'$  i łączymy go prostą z punktem przecięcia prostej poziomej z prostą  $PS'$ . „Przy okazji” powstał punkt  $Q'$ . Gdy połączymy go z punktem przecięcia prostej poziomej z prostą  $PR$ , powstanie punkt  $S$ . Ku naszemu zaskoczeniu prosta  $R'S$  trafi tam, gdzie należy.

M. K.

