

# Czy $\frac{dy}{dx}$ to iloraz $dy$ i $dx$ ?

Michał MIŚKIEWICZ

If you have built castles in the air,  
your work need not be lost; that is  
where they should be. Now put the  
foundations under them.

Henry David Thoreau

\*Zgodnie z regułą, że odpowiedź na tytułowe pytanie zawsze jest przecząca.

Z mojego skromnego doświadczenia dydaktycznego wynika, że na pytanie postawione w tytule najbezpieczniej jest odpowiedzieć **nie**\*. Pochodna funkcji  $y(x)$  definiowana jest jako granica ilorazów

$$(*) \quad \frac{dy}{dx}(x) := \lim_{x' \rightarrow x} \frac{y(x') - y(x)}{x' - x},$$

ale sama ilorazem nie jest. A przynajmniej nie w taki sposób, że jest ilorazem granic licznika i mianownika. Przypomnijmy – wzór na granicę ilorazu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

zachodzi, gdy ciągi  $a_n$  i  $b_n$  są zbieżne, przy czym granica  $b_n$  nie jest zerowa. To ostatnie zastrzeżenie służy wykluczeniu dzielenia przez zero, a z takim właśnie przypadkiem mamy do czynienia w definicji pochodnej. Gdyby  $dy$  było granicą  $y(x') - y(x)$ , a  $dx$  granicą  $x' - x$ , to jedno i drugie byłoby po prostu zerem.

Nie zmienia to faktu, że pochodna jako granica ilorazów dziedziczy wiele ich własności. Prawdziwe są m.in. wzory na pochodną złożenia i na pochodną funkcji odwrotnej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

które sugerują, że w wielu przypadkach  $\frac{dy}{dx}$  zachowuje się jak iloraz. Uzasadnia to na przykład metodę rozwiązywania równań różniczkowych o *zmiennych rozdzielonych*, czyli równań postaci  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ , gdzie funkcje  $f$  i  $g$  są z góry zadane. Symbolicznie często zapisuje się ją jako ciąg przejść:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \implies \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx \implies \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

Użyta w tym zapisie pośrednia forma  $\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$  może budzić kontrowersje, ponieważ sugeruje, że  $dx$  i  $dy$  są bytami, które można porównywać. Najprościej jest jednak uznać, że to tylko mnemotechnika, użyteczna zarówno w rozwiązywaniu równań różniczkowych, jak i w zapamiętaniu wspomnianych wyżej wzorów na pochodne, a przy tym zawierająca cenną intuicję dotyczącą samej definicji pochodnej. Równocześnie niech napisy  $\frac{dy}{dx}$  i  $\int f(x) dx$  pozostaną właśnie *napisami*, oznaczającymi odpowiednio pochodną  $y'(x)$  i funkcję pierwotną (funkcję  $F(x)$  spełniającą  $F'(x) = f(x)$ ) – nic nas nie zmusza do przypisywania sensu pojedynczym składowym tych napisów.

I na tym można spokojnie zakończyć lekturę niniejszego tekstu... chyba, że chce się zobaczyć drugie dno.

## Tło historyczne

Pojęcie pochodnej pojawiło się w XVII wieku za sprawą Isaaca Newtona (1642–1727) i Gottfrieda Leibniza (1646–1716). Do zapisu pochodnej stosowano (i stosuje się nadal) różne symbole, m.in.  $y'$ ,  $\dot{y}$ ,  $\frac{dy}{dx}$ . To ostatnie oznaczenie pochodzi od Leibniza i oddaje jego rozumienie pochodnej jako ilorazu nieskończenie małych wielkości  $dy$  i  $dx$ . Leibniz wprowadził bowiem liczby dodatnie nieskończenie małe, to znaczy mniejsze od odwrotności wszystkich liczb naturalnych. Zauważmy, że gdyby  $\varepsilon > 0$  było taką właśnie liczbą spełniającą  $\varepsilon < \frac{1}{n}$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ , to jej odwrotność  $\frac{1}{\varepsilon}$  byłaby górnym ograniczeniem zbioru liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ . Tymczasem tzw. *aksjomat Archimedes*a, o którym jeszcze napiszę w dalszej części, mówi dokładnie tyle, że takie ograniczenie nie istnieje, więc w *naszej* matematyce nie ma miejsca na liczby nieskończenie małe.

Przykład zastosowania tej metody:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2xy, \\ \frac{dy}{y} &= -2x dx, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int (-2x) dx, \\ \ln |y| &= -x^2 + A, \\ y &= B e^{-x^2}. \end{aligned}$$



Dalszy rozwój matematyki nie potoczył się torem wytyczonym przez Leibniza. Chociaż wprowadzona przez niego notacja się utrzymała, to w XIX wieku ściśle pojęcie pochodnej oparto na granicy, tak jak w (\*). Samą granicę z kolei zdefiniowano poprzez znany uczniom warunek z epsilon i delta ( $\varepsilon$  i  $\delta$ ), co ostatecznie odarło tę dziedzinę z magii wielkości infinitezymalnych.

Ale nie jest to koniec historii – w latach 60. ubiegłego wieku Abraham Robinson (1918–1974) ugruntował idee Leibniza, budując teorię liczb i funkcji hiperrzeczywistych uwzględniającą liczby nieskończenie małe. Stworzoną w ten sposób teorię nazywa się *analizą niestandardową*, dla odróżnienia od analizy – no cóż – standardowej. Aksjomat Archimedesesa jest w tej teorii niespełniony, ale za to pochodną można ściśle definiować jako iloraz wielkości nieskończenie małych. Mianowicie liczbę  $S$  nazwiemy pochodną  $y(x)$  w  $x$ , jeśli  $S$  jest *zaokrągleniem do najbliższej liczby rzeczywistej (standard part)* wartości  $\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$  dla każdej infinitezymalnej liczby  $\Delta x \neq 0$ . Przykładowo, dla  $y = x^2$  mamy

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

a zaokrągleniem do liczby rzeczywistej jest  $2x$  (niezależnie od  $\Delta x$ ). Historię i obecny stan tego fragmentu matematyki można lepiej poznać dzięki źródłom podanym na marginesie.

### Różniczka na ratunek

A czy w standardowej analizie można jakoś usprawiedliwić  $\frac{dy}{dx}$  jako iloraz? W duchu stawiania fundamentów pod wiszącymi w powietrzu zamkami moglibyśmy to zrobić, definiując  $dy$  i  $dx$  jako liczby równe odpowiednio  $y'(x)$  i 1. Skoro do tej pory nie przypisaliśmy tym obiektom żadnego innego znaczenia, to wolno. I nikt nie zaprzeczy, że wówczas iloraz  $\frac{dy}{dx}$  jest równy pochodnej, tyle że takie podejście jest zupełnie jałowe. Przekonamy się jednak, że nie jest ono dalekie od formalizmu *form różniczkowych*.

### Meandry wielu wymiarów

W tym celu dodajmy jeden wymiar i rozważmy funkcję  $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy wtedy o funkcji *dwóch zmiennych*, gdyż punkt w  $\mathbb{R}^2$  możemy reprezentować jako parę liczb rzeczywistych  $(x_1, x_2)$ . Jeśli ustalimy wartość  $x_1$ , to pozostaje nam funkcja jednej zmiennej  $x_2 \mapsto y(x_1, x_2)$  – jej pochodną nazywamy *pochodną cząstkową* funkcji  $y$  względem zmiennej  $x_2$ :

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \lim_{x'_2 \rightarrow x_2} \frac{y(x_1, x'_2) - y(x_1, x_2)}{x'_2 - x_2}.$$

Istnieją też inne sposoby reprezentacji punktów  $\mathbb{R}^2$ . Czytelnik na pewno spotkał się ze *współzrędnymi biegunowymi*  $(r, \alpha)$ , w których  $r$  mierzy długość promienia wodzącego poprowadzonego z początku układu współrzędnych, a  $\alpha$  odchylenie tego promienia od dodatniej półosi  $OX_1$  (zob. wzory na marginesie). Z wyjątkiem początku układu i ewentualnej niejednoznaczności doboru  $\alpha$ , współrzędne  $(r, \alpha)$  w niczym nie ustępują współrzędnym  $(x_1, x_2)$ . Możemy więc myśleć o  $y$  jako o funkcji  $y(r, \alpha)$  i definiować jej pochodne cząstkowe  $\frac{\partial y}{\partial r}$  i  $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$  wszędzie poza początkiem układu.

Skupmy teraz uwagę na dwóch funkcjach,  $x_2$  oraz  $\alpha$ , przyporządkowujących każdemu punktowi jego drugą współrzędną, odpowiednio kartezjańską lub biegunową. Postępując jak poprzednio, obliczamy pochodne cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(r \sin \alpha) = r \cos \alpha, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}(\arctg(x_2/x_1)) = \frac{1}{1 + (x_2/x_1)^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Drugi wynik można przedstawić w formie  $\frac{\cos \alpha}{r}$  i widać wtedy, że  $\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}$  nie jest równe  $(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha})^{-1}$ . Intuicja – przynajmniej w tak naiwnym wydaniu – nas zawiodła.

Adepci studiów matematycznych i technicznych znają rozwiązanie tego problemu – *różniczkę*. Różniczka  $y$  w punkcie  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  jest przekształceniem

Literatura:

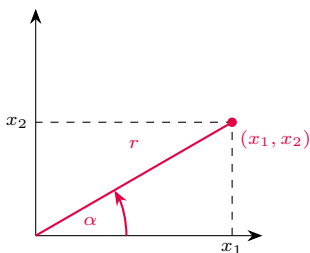
M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*.

L. Arkeryd, *Analiza niestandardowa*,  $\Delta_{04}^7$ .

T. Tao, *Nonstandard analysis as a completion of standard analysis*, artykuł dostępny online.

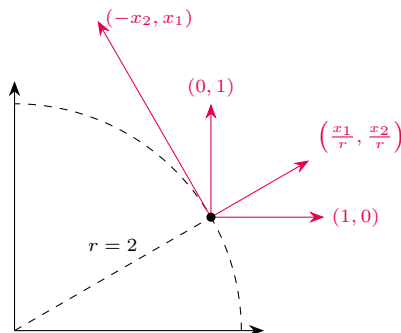
H. J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, książka dostępna online.

Przykładowo, dla  $y = x_1 x_2^2$  mamy  $\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1 x_2$  – na potrzeby obliczania pochodnej cząstkowej po  $x_2$  zmienną  $x_1$  niejako *zamrażamy*.



$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha \\ x_2 &= r \sin \alpha \\ r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \alpha &= \arctg(x_2/x_1) \text{ (nie zawsze)} \end{aligned}$$

Uwaga terminologiczna: wzór (\*\*) nie jest definicją różniczki, tylko *pochoďnej kierunkowej*. Wiadomo jednak, że jeśli funkcja  $y$  posiada różniczkę, to (\*\*) jest w mocy.



liniowym  $dy_{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , które na wektorze  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  przyjmuje wartość

$$(**) \quad dy_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - y(\mathbf{p})}{t}.$$

Wspomniane wcześniej pochodne cząstkowe dają się wyrazić jako szczególne przypadki powyższych pochodnych kierunkowych:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = dy(1, 0), \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = dy(0, 1), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = dy\left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = dy(-x_2, x_1),$$

choć w dwóch ostatnich przypadkach nie jest to takie oczywiste. Warto jednak odnotować, że pojawiające się tu wektory odpowiadają kierunkom, w których porusza się punkt, gdy ustali się jedną współrzędną, a zaburzy drugą.

Różniczki są przekształceniami liniowymi, więc jako takie można je dodawać, mnożyć przez skalary, a przy odpowiednich warunkach również składać – to ostatnie jest odpowiednikiem mnożenia i pojawia się naturalnie przy obliczaniu różniczki złożenia. A czy można dzielić, jak w napisie  $\frac{dy}{dx}$ ?

Może się zdarzyć na przykład, że w danym punkcie  $dz_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = 2dy_{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$  dla wszystkich  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ , powiedzielibyśmy wtedy, że  $\frac{dz_{\mathbf{p}}}{dy_{\mathbf{p}}} = 2$ . To jednak rzadki przypadek – we wcześniej rozważonym przykładzie mamy

$$dx_2(v_1, v_2) = v_2, \quad d\alpha(v_1, v_2) = \frac{x_1 v_2 - x_2 v_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

różniczki te nie są więc proporcjonalne (poza osią  $OX_1$ ).

### Dzielenie różniczek w jednym wymiarze

Dobra wiadomość! W przypadku jednowymiarowym wszystkie przekształcenia liniowe  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są proporcjonalne, więc zawsze można je dzielić (chyba że dzielimy przez zero, to wtedy nie). W szczególności z definicji (\*\*) wynika

$$dy_x(v) = y'(x)v, \quad dx_x(v) = v, \quad \frac{dy_x(v)}{dx_x(v)} = y'(x) \quad \text{dla } x, v \in \mathbb{R}, v \neq 0.$$

Różniczka pozwala zatem zarówno przypisać sens symbolom  $dx$ ,  $dy$ , jak i nadać  $\frac{dy}{dx}$  walory ilorazu. Jest nawet lepiej – po wykonaniu pewnej pracy (nadaniu  $\mathbb{R}^2$  struktury *rozmaitości gładkiej*) można pozbyć się zależności definicji (\*\*) od współrzędnych  $(x_1, x_2)$ , zależności kryjącej się w dodawaniu wektorów w  $\mathbb{R}^2$ .

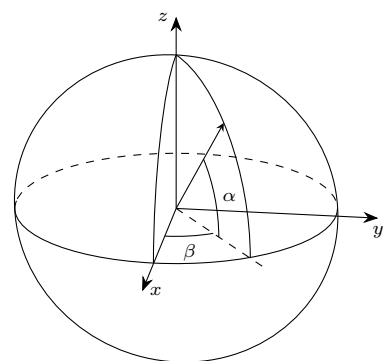
Tak samo w  $\mathbb{R}$ ! Jeśli funkcja  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ma niezerującą się różniczkę, to można ją przyjąć jako współrzędną w miejsce  $x$ , tak samo jak współrzędne kartezjańskie można zamienić na biegunowe. Wtedy z konieczności porównanie różniczek  $dy$  i  $dz$  daje  $dy = \frac{dy}{dz} dz$ , przy czym  $\frac{dy}{dz}$  jest pochodną  $y$  po  $z$ . W rezultacie

$$dy = \frac{dy}{dz} dz, \quad dz = \frac{dz}{dx} dx \implies dy = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} dx,$$

i wzór na pochodną złożenia okazał się faktem arytmetycznym. Czytelnik może się czuć oszukany, i słusznie – tak naprawdę wzór na pochodną złożenia jest już zakodowany we wspomnianej strukturze rozmaitości, która pozwoliła nam *oderwać różniczkę od współrzędnych*. Jeśli udało mi się Czytelnika zaciekawić, to polecam zagłębić się w geometrię różniczkową – dziedzinę zajmującą się wolnym od współrzędnych (przynajmniej w większości) opisem obiektów geometrycznych. A na początek proponuję zastanowić się nad poniższymi problemami:

**Zadanie 1.** Punkty na sferze jednostkowej  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  można opisywać przez geograficzną szerokość  $\alpha$  i długość  $\beta$  (wzorami jak na marginesie). O funkcji  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  można wtedy myśleć jako o funkcji  $f(\alpha, \beta)$  i obliczać jej pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ . Z drugiej strony,  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  zadaje opis sfery (lub przynajmniej jej połowy) parą  $(x, y)$ , możemy więc też liczyć pochodne cząstkowe  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Jak opisać zależność między jednym a drugim zestawem pochodnych?

**Zadanie 2.** Jak zmodyfikować definicję (\*\*), by miała sens dla  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ? Jak wyrazić pochodne cząstkowe z poprzedniego zadania w terminach różniczek? *Wskazówka:* ograniczyć się do wektorów  $\mathbf{v}$  stycznych do  $\mathbb{S}^2$  w  $\mathbf{p}$ , a następnie poprawić  $\mathbf{p} + t\mathbf{v}$ , by punkt ten leżał na sferze.



Współrzędne sferyczne:  
 $x = \cos \alpha \cos \beta$   
 $y = \cos \alpha \sin \beta$   
 $z = \sin \alpha$