

Stała Eulera w trójkącie Pascala

Karol GRYSZKA*

*Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Stała Eulera może być wprowadzona jako granica operacji kapitalizacji odsetek w coraz krótszych okresach. Jeśli w danym roku złożyliśmy na 100% (stopa roczna) kwotę równą 1zł i w ciągu roku następuje n okresów kapitalizacji, to po roku będziemy mieć na lokacie $(1 + 1/n)^n$ złotych.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
 \end{array}$$

Pierwszych sześć wierszy trójkąta Pascala

W poszukiwaniu stałych matematycznych często sięgamy po interesujące wzory lub ciekawe zależności liczbowe. Na pierwszy plan zwykle wysuwa się liczba π – stosunek obwodu okręgu do jego średnicy. W tym artykule zajmiemy się jednak inną ważną stałą – liczbą Eulera e . Jest ona definiowana na dwa równoważne sposoby:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad e := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Jest to liczba niewymierna, w przybliżeniu równa 2,7183.

Okazuje się, że liczbę e możemy odnaleźć w trójkącie Pascala. Jest to trójkątny układ liczb, taki że każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących bezpośrednio nad nią (z wyłączeniem wierzchołka trójkąta oraz jego prawego i lewego boku, gdzie znajdują się jedynki). Na marginesie przedstawiono sześć pierwszych wierszy tego trójkąta. Jeśli przez $P(n, k)$ oznaczymy k -ty wyraz n -tego wiersza, to zachodzi dobrze znany wzór $P(n, k) = \binom{n}{k}$. Przypomnijmy, symbol Newtona $\binom{n}{k}$ definiujemy na przykład następująco: jeśli $n \geq 0$ i $0 \leq k \leq n$, to

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Rozważmy teraz iloczyny a_n wyrazów w kolejnych wierszach trójkąta Pascala:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 96, \quad a_5 = 2500, \quad \dots$$

Ciąg ten sam w sobie nie jest szczególnie interesujący – jego wyrazy bardzo szybko rosną do nieskończoności.

Niech teraz $b_n = a_{n+1}/a_n$. Ciąg ten również nie wygląda specjalnie zachęcająco:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 4,5, \quad b_3 \approx 10,7, \quad b_4 \approx 26, \quad b_5 = 64,8, \quad \dots$$

Ponownie można pokazać, że wyrazy ciągu b_n rosną do nieskończoności.

Ostatni krok odkrywa jednak coś interesującego. Niech $c_n = b_{n+1}/b_n$. Wtedy

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 2,25, \quad c_2 \approx 2,37, \quad c_3 \approx 2,441, \quad \dots, \quad c_{500} \approx 2,715, \quad \dots, \quad c_{10000} \approx 2,718.$$

Okazuje się, że ciąg c_n zbiega do e (!).

Nietrudno powyższy fakt udowodnić i to właśnie teraz zrobimy. Zauważmy najpierw, że

$$\binom{n+1}{k} / \binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} / \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k},$$

a zatem

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}}{\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}} = \binom{n+1}{n+1} \prod_{k=0}^n \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \\
 &= \prod_{k=0}^n \frac{n+1}{n+1-k} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy

$$c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n!} / \frac{n^n}{n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jest to nic innego jak ciąg definiujący stałą e .

Czytelnik zakłopotany powyższymi ciągami może łatwo zapamiętać regułę otrzymania wyrazów ciągu c_n dążącego do liczby e . Należy wziąć trzy kolejne wiersze, a następnie iloczyn liczb w wierszach skrajnych podzielić przez kwadrat iloczynu liczb z wiersza środkowego.

Nasza przygoda z poszukiwaniem stałej Eulera dopiero się rozpoczyna. Za miesiąc zobaczymy niezwykle fakt z teorii liczb, związany z liczbą e .

