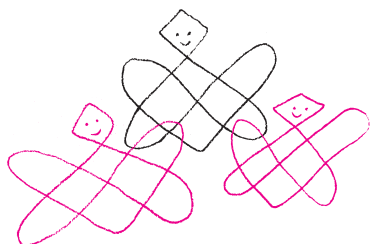


Fibonacci prawie wszędzie

Miroslaw LACHOWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.



Paweł Domański, *Uogólnione ciągi
Fibonacciego*, Δ_{79}^{01} .

Jarosław Górnicki, *Fibonacci spotyka
Banacha*, Δ_{20}^{06} .

Iłja Erenburg, *Burzliwe życie Lejzorka
Rojtswana*, Warszawa, Czytelnik, 1957.



Rozwiązanie zadania M 1707.

Załóżmy, że $m = 4n^2 + 4r + 1$ nie jest
równe 1 ani nie jest liczbą pierwszą.
Wówczas posiada nieparzysty dzielnik
pierwszy $p = 2k + 1$ taki, że $p \leq \sqrt{m}$.
Mamy zatem dwa przypadki: 1) $p < \sqrt{m}$.
Wtedy

$$n^2 + r - k(k + 1) = \frac{m - p^2}{4}$$

jest liczbą całkowitą dodatnią podzielną
przez p , skąd z warunków zadania jest
równa p . Zatem

$$n^2 + r - k(k + 1) = p = 2k + 1,$$

czyli

$$n^2 + r - (k + 1)(k + 2) = 2k + 1 - 2(k + 1) = -1$$

– wbrew założeniu zadania.

2) $p = \sqrt{m}$. Wtedy

$$4n^2 + 4r + 1 = p^2 = (2k + 1)^2,$$

skąd

$$n^2 + r - (k - 1)k = 2k$$

– sprzeczność z założeniem, o ile $k \neq 1$.
Zatem $k = 1$ i

$$4n^2 + 4r + 1 = 3^2 = 9.$$

Leonardo Pisano (ok. 1170 – ok. 1242) znany jest powszechnie pod pseudonimem Fibonacci. Pisano także nie jest jego nazwiskiem – oznacza jedynie, że urodził się w Pizie. Fibonacci to syn Bonacciego. Był synem zapewne bardzo spokojnego człowieka, skoro jego ojciec miał pseudonim Bonacci. Fibonacci był prawdopodobnie jednym z najwybitniejszych matematyków w historii. Jako główną jego zasługę uznałbym przeniesienie na grunt bardzo wówczas oszałamiającej matematycznie (i nie tylko) Europy – idei matematyków hinduskich i arabskich. To on połączył je z ideami matematyków greckich, a w szczególności z ideami geometrii euklidesowej. Wprowadził i pokazał zaletę systemu liczb arabskich (które nazywał, i słusznie, hinduskimi) z układem pozycyjnym. Upowszechnił liczbę 0, której nie znał system rzymski. Trudno sobie wyobrazić rozsądną matematykę bez 0. Trudno sobie wyobrazić opis świata bez 0. Nazwa 0 – zero – ma też ciekawą historię. Po łacinie było nazywane *zephyrus*, co pochodziło od arabskiego *sifr*, to z kolei pochodziło z sanskrytu *śūnya* oznaczającego pustkę. *Zephyrus* poprzez dialekt wenecki (veneziano) stało się *zevero*, a stąd już tylko krok do naszego *zera*. Naszego i w wielu innych językach. Czy można powiedzieć, że jeżeli coś ludzkość łączy, to właśnie 0?

Rzymianie do liczenia używali abakusa (liczydła). W swoim dziele *Liber abaci* nasz Leonardo, wbrew tytułowi, pokazał, że to nie abakus, lecz system arabski (hinduski) ułatwia i wręcz umożliwia rachunki. Warto zauważyć, że Leonardowi udało się to, co nie powiodło się 200 lat wcześniej papieżowi Sylwestrowi II. Choć łatwo nie było – prawie 80 lat po dziele Leonarda miasto Florencja zabroniło bankierom używania cyfr (hindusko-) arabskich (bo mogliby oszukiwać, szczególnie ci z Pizy).

Leonardo najbardziej znany jest z ciągu Fibonacciego, omawianego już w *Delcie* (artykuły P. Domańskiego i J. Górnickiego). Najczęściej ciąg ten wiąże się z populacją królików. Może być traktowany jako prosty model populacji ze strukturą wieku. Oczywiście model nie jest zbyt realistyczny („para rodzi parę”) i dość szybko zakrólikowalibyśmy cały świat, niczym Lejzorek Rojtszwaniac w książce I. Erenburga.

Rozważamy pary różnopłciowe królików młodych („króliczków”), które się nie mogą rozmnażać, i dojrzałych („królików”), które mogą i to czynią. Zakładamy, że ani króliczki, ani króliki nie umierają. Czas liczymy sezonami. Nowo urodzone króliczki potrzebują sezonu, by dojrzeć. Każda para (dojrzałych) królików w każdym sezonie wydaje na świat parę króliczków. W chwili $n = 1$ kupujemy parę króliczków. Mamy więc jedną parę dla $n = 1$. Ta para dojrzeje – mamy więc dla $n = 2$ jedną parę królików. Dla $n = 3$ para królików wydaje na świat jedną parę króliczków, mamy więc jedną parę króliczków i jedną parę królików. Jeżeli F_n jest sumą par króliczków i królików w sezonie n , to

$$(1) \quad F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Jest to słynny ciąg Fibonacciego 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., o którym można poczytać w w.w. pracach. Okazuje się, że liczby z ciągu Fibonacciego często spotyka się w przyrodzie. Oto na przykład liczby płatków korony kwiatów:

- 1 płatek: Cantedeskia (Zantedeschia) zwana kalia,
- 2 płatki: wilczomlec sosnka (Euphorbia cyparissias L.),
- 3 płatki: strzałka wodna (Sagittaria sagittifolia L.), śnieżyczka przebiśnieg (Galanthus nivalis L.),
- 5 płatków: róża dzika (Rosa canina L.), niezapominajka, niezabudka (Myosotis L.), dziurawiec (Hypericum L.), bodziszek cuchnący (Geranium robertianum L.),
- 8 płatków: kosmos (Cosmos Cav.).

Zbyt entuzjastyczni interpretatorzy skłonni są uznać, że wszystko w przyrodzie jest zbudowane według ciągu Fibonacciego. Niestety przykłady:

- 4 płatki: wiesiołek (Oenothera L.), mak polny (Papaver rhoeas L.), godecja wielkokwiatowa (Godetia grandiflora),

- 6 płatków: lilia (*Lilium* L.), zawilec gajowy (*Anemone nemorosa* L.), tulipan (Tulipa L.), niektóre rodzaje powojnika (*Clematis* L.),
- 7 płatków: siódmaczek leśny (*Trientalis europaea* L.),

pokazując, że należy być ostrożnym w formułowaniu tak daleko idących zdań. Z drugiej strony te kontrprzykłady nie powinny nam psuć przyjemności kontemplowania sytuacji w przyrodzie, gdy istnieje zgodność z ciągiem Fibonacciego.

Rozwiązania trzeciego równania w (1) można poszukiwać wartość własną. Iloraz w postaci $F_n = \lambda^n$. Po wstawieniu otrzymujemy tzw. wielomian charakterystyczny przyrównany do 0:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Pierwiastkami (wartościami własnymi) są $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a zatem rozwiązanie ma postać

$$(2) \quad F_n = c_- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_+ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

gdzie stałe c_- i c_+ należy wyznaczyć tak, aby były spełnione dwa pierwsze równania (1). Otrzymujemy zatem $c_+ = -c_- = \frac{1}{\sqrt{5}}$, które po wstawieniu do (2) dają tzw. wzór Bineta. Rozwiązanie można zapisać w następującej postaci:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Widać zatem, że dla dużych n ciąg F_n będzie się zachowywał jak ciąg geometryczny $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Jest to wniosek z ogólnego faktu wynikającego z twierdzenia Frobeniusa–Perrona: o zachowaniu decyduje dominująca

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}$$

zbiega do $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, gdy $n \rightarrow \infty$, gdzie Φ jest liczbą złotego podziału – zauważył ten fakt Johannes Kepler (1571–1630).

Jeżeli chcemy, za Euklidesem, aby odcinek długości $x + y$ został rozłożony na dwa odcinki o długości x i y , tak aby stosunek dłuższej części y do krótszej x był taki sam jak stosunek długości całego odcinka $x + y$ do części dłuższej y , to otrzymujemy

$$\frac{y}{x} = \frac{x+y}{y}, \quad \Phi = \frac{y}{x}, \quad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \quad \Phi \approx 1,61803.$$

Złoty podział znali już starożytni Babilończycy (IX w. p.n.e.), Egipcjanie i Grecy. Wykorzystywali go w architekturze i zdobieniach. Litera Φ pojawiła się na cześć rzeźbiarza Fidiasza (ok. 490 p.n.e. – ok. 430 p.n.e.). Ciekawe jest pytanie, czy złoty podział rzeczywiście ujmuje istotę naturalnego piękna, czy też Grecy przekazali nam wzorzec, który ukształtował nasze poczucie piękna.

U. Foryś, *Nie tylko złoty podział: czy Fibonacci to przewidział?*, Rozdział V, Monografia Centrum Zastosowań Matematyki, 2014, Metody matematyczne w zastosowaniach, tom 2. Pod redakcją A. Bartłomiejczyk.

C. K. Ghosh, A. I. Khan, *Exploring the Fibonacci Sequence*, Dream 2047, April 2015, Vol. 17 No. 7.

Parmanand Singh, *The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India*, *Historia Mathematica* 12 (1985), 229–244.

L. Childers, K. Gopalakrishnan, *Gopala–Hemachandra codes revisited*, arXiv:2004.00821v1.

Jeremiah T. Southwick, *The Lucas Numbers and Other Gibonacci Sequences Mod m*, arXiv:1402.0598v1.

Sporo informacji o złotym podziale oraz zgodności ciągu Fibonacciego ze światem można znaleźć w artykule Urszuli Foryś.

W Indiach ciąg Fibonacciego pojawił się w sanskryckiej prozodii (system wersyfikacji). W ustnej tradycji sanskryckiej kładziono duży nacisk na to, jak długie (L) sylaby (2 jednostki trwania) mieszają się z krótkimi (S) sylabami (1 jednostka). Liczenie różnych wzorców L i S w ramach określonej stałej długości prowadziło do ciągu Fibonacciego: liczba wzorców, w których jest n krótkich sylab, to liczba Fibonacciego F_{n+1} . Idee te można znaleźć w pracach Pingali (200 p.n.e.), Virahanki (700 n.e.), Gopali (ok. 1135) i Hemachandry (ok. 1150).

Acharya Hemachandra (ok. 1088 – ok. 1173) był hinduskim poetą, matematykiem, filozofem i językoznawcą. Naśladując Gopale, opisał ciąg Fibonacciego około 1150 roku, czyli ponad 50 lat przed Fibonaccim. Rozważał liczbę kadencji o długości n , pokazał, że można je utworzyć, dodając krótką sylabę do kadencji o długości $n - 1$ lub długą do kadencji o długości $n - 2$.

Gopala i Hemachandra rozpatrywali następujący uogólniony ciąg:

$$(3) \quad G_1 = a, \quad G_2 = b, \quad G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Po wstawieniu $a = 1$ i $b = 1$ otrzymujemy ciąg Fibonacciego (por. (1)). Dla $a = 1$ i $b = 3$ otrzymujemy ciąg Lucasa (François Édouard Anatole Lucas, 1842–1891). Możliwe są też inne uogólnienia, patrz w.w. artykuł P. Domańskiego. Czasami uogólnione ciągi nazywa się „Gibonacci” (od ogólny – general).

Edouard Zeckendorf (1901–1983), belgijski lekarz i matematyk, udowodnił w roku 1972 twierdzenie mówiące o tym, że każda liczba naturalna może być jednoznacznie przedstawiona (tzw. reprezentacja Zeckendorfa) jako suma jednej lub więcej liczb z ciągu Fibonacciego w taki sposób, że suma ta nie zawiera dwóch kolejnych liczb z ciągu. Dokładniej:

Twierdzenie Zeckendorfa: Jeżeli N jest liczbą naturalną, to N może być w sposób jednoznaczny przedstawione jako:

$$(4) \quad N = \sum_{j=1}^m \alpha_j F_{j+1},$$

gdzie α_j równa się 0 lub 1, dla $j = 1, \dots, m$, $\alpha_m = 1$, F_j są liczbami z ciągu Fibonacciego oraz jeżeli $\alpha_i = 1$, to $\alpha_{i+1} = 0$ dla $i = 1, \dots, m - 1$.

W sumie (4) występuje F_{j+1} , aby uniknąć dwóch 1. Reprezentacją Zeckendorfa liczby N nazywamy odpowiadający jej ciąg skończony $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, np. dla liczby 1 jest (1), dla liczby 4 jest (1, 0, 1), dla liczby 6 jest (1, 0, 0, 1), dla liczby 12 jest (1, 0, 1, 0, 1). Reprezentacja Zeckendorfa określa kod Fibonacciego, który zamienia, w sposób jednoznaczny, każdą liczbę naturalną na skończony ciąg binarny. Kod Fibonacciego używany jest do kompresji danych, czyli wyrażenia tej samej informacji za pomocą mniejszej liczby bitów. W reprezentacji Zeckendorfa nigdy dwie jedynki nie

mogą wystąpić obok siebie, stąd w kodzie Fibonacciego stosuje się dodatkową jedynkę na końcu ciągu, aby zaznaczyć w ten sposób koniec ciągu, czyli np. dla 4 będzie to 1011, a dla 6 – 10011.

Ciekawostką jest, że ten sam wynik co Zeckendorf otrzymał Cornelis Lekkerkerker (1922–1999) w roku 1952, czyli 20 lat przed Zeckendorffem, i opisał w pracy w języku holenderskim (Zeckendorf napisał swoją pracę po francusku).

Okazuje się, że dla uogólnionego ciągu G_n nie dla wszystkich a i b mamy odpowiednik reprezentacji Zeckendorfa, np. dla $a = -5$ i $b = 6$ nie ma – por. pracę L. Childersa i K. Gopalakrishnana.

Ciąg Fibonacciego i jego uogólnienia są dalej przedmiotem interesujących badań matematyków, a nawet jest wydawane specjalne pismo naukowe poświęcone tym badaniom – *The Fibonacci Quarterly* – związane z *The Fibonacci Association*.

Liczba Eulera przy obliczaniu NWW

Karol GRYSZKA*

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W poprzedniej części odkryliśmy liczbę Eulera w trójkącie Pascala. Tym razem spróbujemy sięgnąć do jednej z najciekawszych dziedzin matematyki – teorii liczb.

Najmniejsza wspólna wielokrotność

Niech $a_n = \sqrt[n]{\text{NWW}(1, 2, 3, \dots, n)}$. Obliczając początkowe wyrazy tego ciągu, zauważmy, że są one zawsze „małe”. Na przykład

$$a_{15} = 2,34665, \quad a_{30} \approx 2,58368, \quad a_{60} \approx 2,60879.$$

Zaskakujące jest jednak to, że wyrazy ciągu a_n tworzą bardzo przyjazny ciąg, jest on bowiem zbieżny do liczby Eulera!

W dalszej części zobaczymy jedno z możliwych uzasadnień tego faktu. Nie jest ono całkowicie elementarne, gdyż wykorzystuje twierdzenie o liczbach pierwszych (o nim również za chwilę napiszemy). Rozumowanie podzielimy na trzy etapy. Każdy z nich zawiera w sobie ciekawe rozważania na temat liczb oraz funkcji teoriolicebowych.

Krok 1. W tym kroku przyjrzymy się wyłącznie zachowaniu najmniejszej wspólnej wielokrotności kolejnych liczb naturalnych.

Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, czyli $n = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p i $k > 0$, to żadna z liczb $1, 2, \dots, n - 1$ oprócz mniejszych potęg p nie dzieli p^k . Tym samym więc $\text{NWW}(1, 2, 3, \dots, n - 1) = p^{k-1} \cdot m$ dla pewnej liczby m , niepodzielnej przez p . Ponadto liczba $p^k \cdot m$ jest wielokrotnością liczb $1, 2, \dots, n = p^k$ i każda wielokrotność tych liczb musi być wielokrotnością p^k oraz m . Stąd wynika więc równość

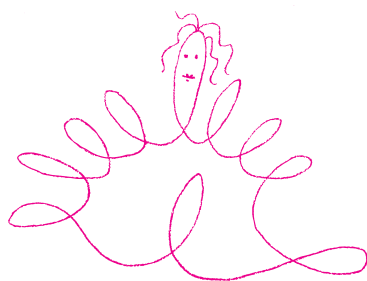
$$\text{NWW}(1, 2, \dots, n) = p \cdot \text{NWW}(1, 2, \dots, n - 1).$$

Załóżmy teraz, że n nie jest potęgą liczby pierwszej. Wtedy $n = p^k \cdot m$ dla pewnych $k, m > 0$ i liczby pierwszej p (spełniających $p \nmid m$). Ponieważ $p^k < n$ i $m < n$, to $p^k | \text{NWW}(1, 2, \dots, n - 1)$ i $m | \text{NWW}(1, 2, \dots, n - 1)$. Ale liczby p^k i m są względnie pierwsze, więc ich iloczyn dzieli $\text{NWW}(1, 2, \dots, n - 1)$. Tym samym otrzymujemy równość

$$\text{NWW}(1, 2, \dots, n) = \text{NWW}(1, 2, \dots, n - 1).$$

Krok 2. W tym kroku, z dokładnością do jednej zależności, wskażemy główny tok rozumowania dowodzący istnienia granicy. Wykorzystamy własności NWW, wykazane w kroku 1.

NWW(1, 2, ..., 15) = 360 360,
NWW(1, 2, ..., 30) = 2 329 089 562 800,
NWW(1, 2, ..., 60) =
= 9 690 712 164 777 231 700 912 800.



Wykorzystujemy następujący fakt: jeśli $a|c$, $b|c$ i liczby a i c są względnie pierwsze, to $ab|c$.