Czworokąty Bliźniacze

Stanisław Hauke

Streszczenie pracy

Wstęp

> W czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany okrąg. Przez środek każdego z odcinków AB, BC, CD, DA poprowadzono proste prostopadłe do przeciwległych boków czworokąta $ABCD$. Proste te ograniczają obszar będący czworokątem wypukłym. Wykazać, że w obszar ten można wpisać okrąg.

Powyższe zadanie zostało przedstawione na stronie gogeometry.com jako problem 1351 bez znanego geometrycznego dowodu, skąd zostało zaczerpnięte do geometrycznej ligi zadaniowej Pana Profesora Waldemara Pompe, gdzie przez miesiąc nie zostało rozwiązane. Mój dowód tego zadania opierał się na pomyśle, by w pewien sposób przyporządkować każdemu czworokątowi wypukłemu jego brata bliźniaka. W poniższej pracy przedstawię: dokładną definicję czworokąta bliźniaczego, jego konstrukcje dla danego czworokąta, własności par takich czworokątów, oraz trzy twierdzenia z nimi związane. Na końcu zaprezentuję trzy zadania, które da się rozwiązać metodami związanymi z czworokątami bliźniaczymi.

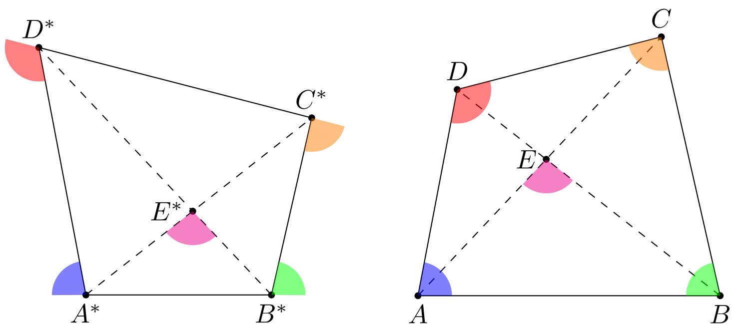
Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ będę nazywał **bliźniaczymi**, jeśli spełnione są dwa warunki:

$$\angle A + \angle A^* = \angle B + \angle B^* = \angle C + \angle C^* = \angle D + \angle D^* = 180^\circ$$

oraz

$$\angle A^*E^*B^* = \angle AEB$$

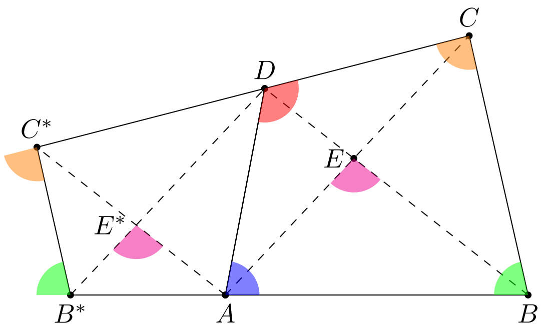
gdzie punkty E i E^* są odpowiednio przecięciami prostych AC i BD oraz A^*C^* i B^*D^*. Zapis $\boldsymbol{ABCD \approx A^*B^*C^*D^*}$ oznacza, że czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ są bliźniacze.



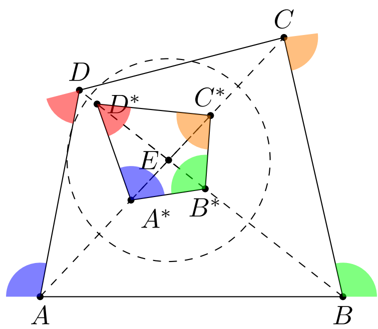
Stwierdzenie 1
Czworokąt bliźniaczy $A^*B^*C^*D^*$ dla danego czworokąta $ABCD$ jest wyznaczany jednoznacznie, z dokładnością do podobieństwa.

Oznaczenia
W tej pracy, jeśli nie będzie napisane inaczej, obowiązywać będą oznaczenia: E punkt przecięcia odpowiednio prostych AC i BD. $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ i ω_D, okręgi opisane odpowiednio na trójkątach $\Delta BCD, \Delta ACD, \Delta ABD$ i ΔABC, ω okrąg opisany na czworokącie $ABCD$, jeśli takowy istnieje. Analogicznie definiujemy oznaczenia z „*”.

Konstrukcja 1
Niech B^* będzie punktem przecięcia prostej AB i prostej równoległej do prostej AC, przechodzącej przez punkt D, niech zaś C^* będzie punktem przecięca prostej CD i prostej równoległej do prostej BD przechodzącej przez punkt A. Wówczas $AB^*C^*D \approx ABCD$.



Konkstrukcja 2
Rozważmy inwersję (lub antyinwersję), o środku w punkcie E, i skali k. Niech obrazami punktów A, B, C, D w tej inwersji będą odpowiednio punkty A^*, B^*, C^*, D^*. Wówczas $A^*B^*C^*D^* \approx ABCD$.



Własność 1
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to $AE \cdot A^*E^* = BE \cdot B^*E^* = CE \cdot C^*E^* = DE \cdot D^*E^*$.

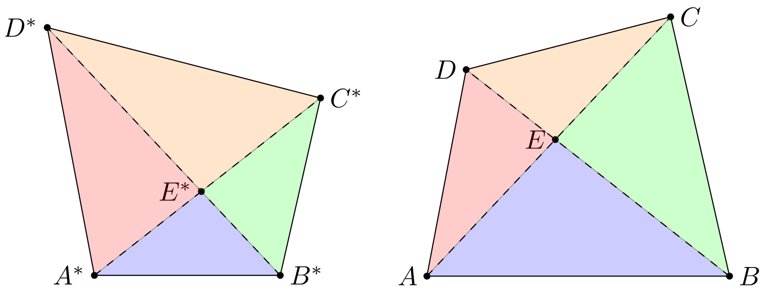
Własność 2
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to:

$$\frac{A^*B^* \cdot C^*D^*}{B^*C^* \cdot A^*D^*} = \frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD}$$

Własnośc 3
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to zachodzą podobieństwa trójkątów:

$$\Delta DEA \sim \Delta A^*E^*D^* \qquad \Delta CED \sim \Delta D^*E^*C^*$$

$$\Delta AEB \sim \Delta B^*E^*A^* \qquad \Delta BEC \sim \Delta C^*E^*B^*$$



Twierdzenia 1, 2 i 3

Przedstawię teraz **Twierdzenia 1, 2** i **3**, następnie pokażę jak tezy **Twierdzeń 1** i **2** wynikają z **Twierdzenia 3**. W pełnej wersji mojej pracy udowadniam dodatkowo **Twierdzenia 1** i **2** niezależenie od **Twierdzenia 3**.

Twierdzenie 1
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to z tego, że w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg wynika, że w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ też da się wpisać okrąg.

Twierdzenie 2
Jeśli czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ są bliźniacze i zgodnie zorientowane, to jeśli proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, to przez ich punkt przecięcia przechodzi prosta $DB^{*.}$

Definicja
Niech dany będzie czworokąt $ABCD$ oraz punkt P, wtedy **współrzędnymi kątowymi** punktu P względem czworokąta $ABCD$ nazwiemy czwórkę:

$$\mathbf{wk}(\mathbf{P}, \mathbf{ABCD}) = (\measuredangle\mathbf{APB}, \measuredangle\mathbf{BPC}, \measuredangle\mathbf{CPD}, \measuredangle\mathbf{DPA})$$

Twierdzenie 3
Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, wówczas dla każdego punktu P istnieje taki punkt P^*, że:

$$wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

Przedstawię teraz trzy stwierdzenia powiązane z współrzędnymi kątowymi, z czego ostatnie będzie uzupełnieniem **Twierdzenia 3**.

Stwierdzenie 2
Jeśli czworokąty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ są równokątne oraz istnieją takie dwa punkty P i P', że $wk(P, ABCD) = wk(P', A'B'C'D')$, to te czworokąty są podobne.

Stwierdzenie 3
Jeśli czworokąty $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ spełniają warunek:

$$\angle A + \angle A^* = \angle B + \angle B^* = \angle C + \angle C^* = \angle D + \angle D^* = 180^\circ$$

oraz istnieją takie punkty P i P^*, że $wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$, to te czworokąty są bliźniacze.

Stwierdzenie 4
Jeśli $P \notin \omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D, \omega$, to istnieje dokładnie jeden taki punkt P^*, że:

$$wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

Dowód Twierdzenia 1
Niech I oznacza środek okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Zauważmy, że:

$$wk(I, ABCD) = (\frac{\angle C + \angle D}{2}, \frac{\angle D + \angle A}{2}, \frac{\angle A + \angle B}{2}, \frac{\angle B + \angle C}{2})$$

wobec tego na mocy **Twierdzenia 3** istnieje punkt I^* taki, że:

$$wk(I^*, A^*B^*C^*D^*) = (\frac{\angle A + \angle B}{2}, \frac{\angle B + \angle C}{2}, \frac{\angle C + \angle D}{2}, \frac{\angle D + \angle A}{2})$$

zauważmy, że zachodzi:

$$\frac{\angle A + \angle B}{2} = \frac{180^\circ - \angle A^* + 180^\circ - \angle B^*}{2} = \frac{360^\circ - \angle A^* - \angle B^*}{2} = \frac{\angle C^* + D^*}{2}$$

przeprowadzając analogiczne obliczenia dla pozostałych współrzędnych dochodzimy do wniosku, że:

$$wk(I^*, A^*B^*C^*D^*) = (\frac{\angle C^* + \angle D^*}{2}, \frac{\angle D^* + \angle A^*}{2}, \frac{\angle A^* + \angle B^*}{2}, \frac{\angle B^* + \angle C^*}{2})$$

Niech $A'B'C'D'$ będzie czworokątem równokątnym z $A^*B^*C^*D^*$, w który da się wpisać okrąg, oznaczmy jego środek przez I', zauważmy, że:

$$wk(I', A'B'C'D') = (\frac{\angle A + \angle B}{2}, \frac{\angle B + \angle C}{2}, \frac{\angle C + \angle D}{2}, \frac{\angle D + \angle A}{2})$$
$$= wk(I^*, A^*B^*C^*D^*)$$

z tego zaś, na mocy **stwierdzenia 2** wynika, że $A'B'C'D' \sim A^*B^*C^*D^*$, to zaś implikuje, że w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ da się wpisać okrąg, co kończy dowód.

Dowód Twierdzenia 2
Niech punkt P będzie przecięciem wyżej wymienionych trzech prostych. Udowodnię przypadek, w którym $P \notin \omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D, \omega_{A^*}, \omega_{B^*}, \omega_{C^*}, \omega_{D^*}, \omega$ oraz ω^*. Rozważmy taki punkt P^*, by:

$$\textbf{(1)} \qquad wk(P, ABCD) = wk(P^*, C^*D^*A^*B^*)$$

istnienie takiego punktu gwarantuje **Twierdzenie 3**. Ponieważ proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, to zachodzą równości kątów:

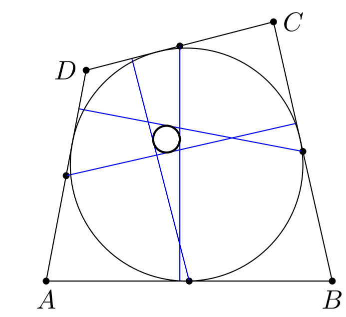
$$\measuredangle C^*P^*D^* = \measuredangle APB = \measuredangle C^*PD^*$$

$$\measuredangle A^*P^*C^* = \measuredangle CPA = \measuredangle A^*PC^*$$

one zaś implikują, że czworokąty $PD^*C^*P^*$ i $PC^*A^*P^*$ są wpisane w okręgi. Ponieważ czworokąt $PD^*C^*A^*$ nie jest wpisany w okrąg, to musi zachodzić: $P = P^*$. Ponieważ $P = P^*$, to z **(1)** wynika, że $\measuredangle A^*PB^* = \measuredangle CPD$, z tego zaś mamy, że punkty D, P i B^* są współliniowe, więc teza zachodzi.

Zadania

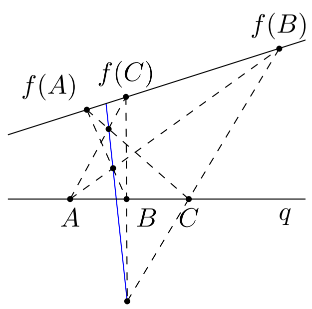
Zadanie 1 (Gl 2017/18, zadanie 10)
W czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany okrąg. Przez środek każdego z odcinków AB, BC, CD, DA poprowadzono proste prostopadłe do przeciwległych boków czworokąta $ABCD$. Proste te ograniczają obszar będący czworokątem wypukłym. Wykazać, że w obszar ten można wpisać okrąg.



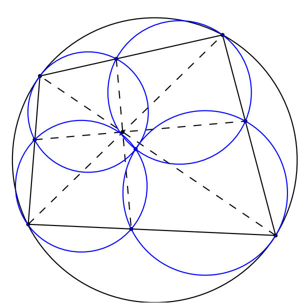
Zadanie 2
Niech i będzie inwersją na prostej q, P zaś podobieństwem na płaszczyźnie. Udowodnić, że zbiorem punktów X spełniających warunek:

$$\exists_{A,B \in q} \, X = Af(B) \cap Bf(A)$$

jest prosta, gdzie $f = P \circ i$.



Zadanie 3 (autorskie)
Dane są punkty A, B, C, D leżące w tej kolejności na okręgu ω. Niech $E = AC \cap BD$, niech dwusieczna kąta $\measuredangle AEB$ przecina prostą AB w punkcie P, zaś prostą DC w punkcie R, niech dwusieczna kąta $\measuredangle BEC$ przecina prostą BC w punkcie Q, zaś prostą AD w punkcie S. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach: $\Delta PBQ, \Delta QCR, \Delta RDS, \Delta SAP$ mają punkt wspólny.



Podziękowania

Chciałbym bardzo podziękować Panu Profesorowi Waldemarowi Pompe, opiekunowi mojej pracy, za cenne wskazówki merytoryczne jakie otrzymałem podczas pisania tej pracy.

Bibliografia

[1] https://www.mimuw.edu.pl/∼pompe/gl

[2] http://www.gogeometry.com/school-college/4/p1351-circumscribed-tangential-quadrilateral-midpoint-perpendicular.htm

[3] http://sem.edu.pl/konferencja-2015/materialy/Pompe/plakat.pdf

Stanisław Hauke, XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica,
ul. Nowowiejska 37A, 02-010 Warszawa
adres email: hauke.stas@gmail.com