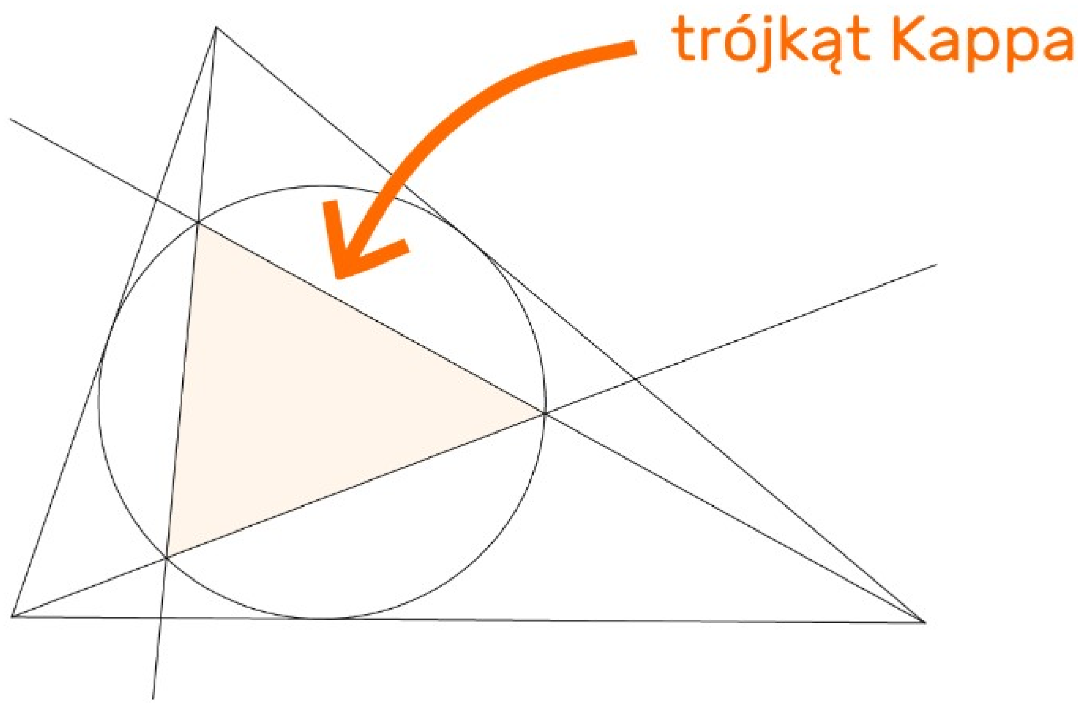
Streszczenie pracy pt. „O trójkątach kappa i ich własnościach”

Filip Rękawek

Wstęp

Złoty podział – zdaje się, że można znaleźć go wszędzie: od budowy organizmów żywych, przez różne dziedziny sztuki, po rynki finansowe. Można także nieoczekiwanie natknąć się na niego w zupełnie teoretycznych rozważaniach. Trójkąty kappa są tego przykładem. Powstają one w wyniku przeprowadzenia przez każdy wierzchołek dowolnego trójkąta prostej w taki sposób, aby każde dwie z nich przecięły się na okręgu wpisanym w ten trójkąt. Jest to moja autorska, prosta konstrukcja geometryczna, przypisująca każdemu trójkątowi inny trójkąt, której własności jednak już nie dają się tak prosto opisać.

Głównym problemem omawianym w pracy jest pytanie o to, jak proste te poprowadzić w danym trójkącie, aby wspomniany wyżej warunek był spełniony. Poza odpowiedzią na to pytanie pokazuję jakie własności przejawiają trójkąty kappa – w szczególności w trójkątach równoramiennych, gdzie konstrukcja ta ma ścisły związek z kwadratem złotej liczby.



Metody

Pierwszy rozdział pracy zawiera twierdzenia, które udowadniane są przy użyciu syntetycznych metod geometrii elementarnej. Dowód głównego twierdzenia używa wymiernego równania parametrycznego okręgu, które pozwala na wyrażenie współrzędnych dowolnego, oprócz jednego, punktu okręgu jednostkowego za pomocą tylko jednego parametru rzeczywistego. Problem, na który odpowiada to twierdzenie, zostaje opisany odpowiednimi równaniami. Duża część wyników prezentowanych w pracy została uzyskana dzięki wykorzystaniu obliczeń symbolicznych za pomocą komputera, których użyto na przykład do rozwiązywania równań.

Wyniki

Okazuje się, że dla każdego trójkąta istnieją dokładnie dwa trójkąty kappa, a także że każdy trójkąt jest trójkątem kappa dla jakiegoś trójkąta. W pracy przedstawiono twierdzenie o trójkątach kappa, które wyraża związek miar kątów wewnętrznych danego trójkąta z miarami kątów pomiędzy jego bokami i bokami trójkąta kappa. Wyprowadzony zostaje z niego wniosek o tym, że dla każdego trójkąta istnieją dokładnie dwa trójkąty kappa.

Zdefiniowano także funkcję κ, która, przyjmując za argument parę liczb reprezentujących miary kątów przylegających do danego boku trójkąta, zwraca miarę kąta pod jakim należy poprowadzić prostą do tego boku, by wykreślić trójkąt kappa dla danego trójkąta. Wykresem tej funkcji jest asymetryczna powierzchnia trójwymiarowa. Stanowi ona istotne narzędzie w badaniu trójkątów kappa – jest ona użyta do udowodnienia związku tego pojęcia ze złotym podziałem. Poza tym, można za jej pomocą wyrazić miary kątów wewnętrznych, długości boków, a także pole trójkąta kappa w zależności od parametrów opisujących wyjściowy trójkąt.

Szczególnie interesującym wynikiem jest wykazanie, że opisywana konstrukcja geometryczna ma związek ze złotym podziałem. Udowodnione zostaje twierdzenie mówiące o tym, że prosta tworząca trójkąt kappa dla dowolnego trójkąta równoramiennego i przecinająca jego podstawę, dzieli ją w stosunku jeden do kwadratu złotej liczby. Wskazano także własności szczególnych przypadków trójkątów kappa dla trójkątów równoramiennych, wyrażone przy użyciu złotej liczby, mianowicie dla trójkąta równobocznego, trójkąta prostokątnego równoramiennego oraz złotego gnomonu. Zaprezentowano także dwa fakty związane z pięciokątem foremnym.

Jeden z ostatnich rozdziałów pracy poświęcony został uogólnieniu zagadnienia na wielokąty foremne. Możemy wówczas mówić o wielokątach kappa. Podany zostaje wzór na miarę kąta pod jakim należy prowadzić proste tworzące takie wielokąty dla n-kąta foremnego oraz jego wyprowadzenie.

Podsumowanie

Matematyka jest nauką, która pozwala na tworzenie abstrakcyjnych pojęć, a następnie badanie ich jedynie za pomocą teoretycznych rozważań. W ten sposób z prostych założeń możemy dojść do rozbudowanych wniosków. Moja praca odzwierciedla właśnie ten proces – najpierw definiuję proste pojęcie, by następnie zbadać je i pokazać jego ciekawe własności. Myślę, że szczególnie wartościowym elementem niniejszej pracy jest prezentowany związek trójkątów kappa ze złotym podziałem.

Stawiane problemy i otrzymywane rezultaty można uogólniać na wiele sposobów, przez co możliwy jest wszechstronny rozwój badań. Można także stawiać nowe problemy. Niektóre z nich zostały wymienione w pracy. Dla przykładu możemy pytać o położenie punktu zbieżności ciągu trójkątów, takiego że każdy kolejny jest trójkątem kappa dla poprzedniego.