Kolorowanie prostych w $\mathbb{F}_{p^2}$ – wersja skrócona.

Mariusz Trela

25 kwietnia 2018

Streszczenie.

Praca Jadwigi Czyżewskiej „Kolorowanie płaszczyzny, prostych i okręgów” [1] odpowiada na pytania dotyczące ograniczeń na liczbę kolorów użytych do pokolorowania płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ w zależności od ograniczeń na liczbę kolorów znajdujących się na prostej czy okręgu. W niektórych przypadkach odpowiedzią było „nieskończoność”, czyli że można użyć dowolnie dużej liczby kolorów. W tej pracy rozpatrzymy warunek „każda prosta zawiera co najwyżej trzy kolory” ograniczając się do płaszczyzny $\mathbb{F}_{p^2}$.

1 Wprowadzenie.

W całej pracy przez p oznaczamy liczbę pierwszą nieparzystą. Definiujemy $\mathbb{F}_{p^2}$ jako ciało otrzymane przez rozszerzenie ciała $\mathbb{F}_p$ o element ω taki, że $\omega^2 = r$, gdzie $\left(\frac{r}{p}\right) = -1$. Zbiór $\mathbb{F}_{p^2}$ składa się wtedy z elementów postaci $a + b\omega$, gdzie $a, b \in \mathbb{F}_p$, a ich dodawanie i mnożenie jest zdefiniowane zgodnie z zasadą $\omega^2 = r$. Łatwo zauważyć, że jest to rzeczywiście ciało. Definiujemy też sprzężenie $\overline{a + b\omega} = a - b\omega$ dla $a, b \in \mathbb{F}_p$, oraz normę $N(x) = x\overline{x} \in \mathbb{F}_p$ dla $x \in \mathbb{F}_{p^2}$. Zauważmy, że dla dowolnych ω_1, ω_2 takich, że $\omega_1^2 = r_1, \omega_2^2 = r_2$, gdzie $\left(\frac{r_1}{p}\right) = \left(\frac{r_2}{p}\right) = -1$, ciała $\mathbb{F}_p(\omega_1)$ i $\mathbb{F}_p(\omega_2)$ są do siebie izomorficzne, gdzie izomorfizm $\phi : \mathbb{F}_p(\omega_1) \mapsto \mathbb{F}_p(\omega_2)$ jest zadany regułą $\phi(a + b\omega_1) = a + bt\omega_2$, gdzie $a, b \in \mathbb{F}_p$, a $t^2 = \frac{r_1}{r_2}$ ($t \in \mathbb{F}_p$, bo $\frac{r_1}{r_2}$ jest resztą kwadratową). Zatem nie ma znaczenia, którą dokładnie resztę wybierzemy jako r do konstrukcji.

1.1 Proste w $\mathbb{F}_{p^2}$.

Zbiór $l(A, B) := \{A + x(B - A) : x \in \mathbb{F}_p\}$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}_{p^2}, A \neq B$ nazywamy *prostą*. Interpretacją geometryczną $l(A, B)$ jest linia prosta przechodząca przez punkty A, B. Poniżej znajduje się kilka własności prostych w $\mathbb{F}_{p^2}$ pokazujących między innymi, że zachowują się one jak proste w $\mathbb{R}^2$.

Własność 1. *Dla każdych $A, B \in \mathbb{F}_{p^2}, A \neq B$ zachodzi $|l(A, B)| = p$.*

Własność 2. *Dla dowolnych $A, B, C, D \in \mathbb{F}_{p^2}, A \neq B, C \neq D$ zachodzi*

$$|l(A, B) \cap l(C, D)| \in \{0, 1, p\}.$$

Jeżeli $|l(A, B) \cap l(C, D)| \neq 1$, to proste $l(A, B)$ i $l(C, D)$ nazywamy równoległymi (co oznaczamy $l(A, B) \parallel l(C, D)$). Równoległość prostych zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{B-A}{D-C} \in \mathbb{F}_p$, i jest relacją równoważności.

Własność 3. *Dla każdych $A, B, C \in \mathbb{F}_{p^2}, A \neq B$ istnieje D takie, że $l(A, B) \parallel l(C, D)$.*

Własność 4. *Różnych prostych przechodzących przez punkt, i zarazem klas równoważności relacji równoległości jest $p + 1$.*

1.2 Okręgi w $\mathbb{F}_{p^2}$.

Dla niezerowej reszty $d \in \mathbb{F}_p$ zbiór $S(d)$ oznacza zbiór $\{P : N(P) = d\}$. W dalszej części pracy nazywamy go *okręgiem*, przez analogię do okręgów w $\mathbb{R}^2$. Poniżej znajduje się kilka własności okręgów w $\mathbb{F}_{p^2}$.

Własność 5. *Dla każdej prostej k i reszty $d \in \mathbb{F}_p$ zachodzi $|k \cap S(d)| \le 2$.*

Własność 6. *Dla każdego niezerowego $d \in \mathbb{F}_p$ mamy, że $|S(d)| = p + 1$.*

2 Główny rezultat.

Dla $P \in \mathbb{F}_{p^2}$ niech $\mathrm{Col}(P)$ oznacza kolor punktu P. Natomiast dla zbioru A niech $\mathrm{Col}(A) = \{\mathrm{Col}(P) : P \in A\}$. Ponadto niech $\Gamma = \mathrm{Col}(\mathbb{F}_{p^2})$. Głównym rezultatem tej pracy jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeżeli $p \ge 7$ i dla każdej prostej $k \subset \mathbb{F}_{p^2}$ $|Col(k)| \le 3$, to $|\Gamma| \le p + 2$. Tego ograniczenia nie da się poprawić.*

Dowód. Dowiedziemy tego twierdzenia przez sprzeczność. Przez dalszy ciąg pracy będziemy zakładać, że dla każdej prostej k $|\mathrm{Col}(k)| \le 3$, oraz że $|\Gamma| = p+3$. Możemy założyć, że $|\Gamma| = p+3$, ponieważ gdyby było więcej kolorów, moglibyśmy kilka z nich utożsamić bez szkody dla założeń.

Lemat 1. *Niech A to zbiór $p+2$ punktów w $\mathbb{F}_{p^2}$. Wtedy istnieje prosta k taka, że $|k \cap A| \ge 3$.*

Dowód. Załóżmy przez sprzeczność, że nie ma takiej prostej. Weźmy dowolną prostą k i wszystkie do niej równoległe. Na każdej z nich leży 2, 1, lub 0 punktów z A. Jednakże te wszystkie proste pokrywają $\mathbb{F}_{p^2}$, czyli suma punktów leżących na tych prostych to $p + 2$, co jest liczbą nieparzystą. Zatem w tej sumie musi się przynajmniej raz pojawić liczba nieparzysta, czyli 1. Niech ten punkt leżący na prostej, na której leży dokładnie jeden punkt, to P.

Rozważmy wszystkie proste przechodzące przez P. Z Własności 4 jest ich $p+1$. Ponadto wiemy, że istnieje przynajmniej jedna prosta, na której nie leży żaden inny punkt z A poza P zgodnie z definicją P, co pozostawia nam p prostych, na których mogą leżeć pozostałe punkty z A. Lecz pozostałych punktów jest $p+1$, czyli z zasady szufladkowej któreś dwa z nich leżą na jednej prostej wychodzącej z P. Zatem uzyskaliśmy taką prostą, na której leżą trzy punkty z A, co daje sprzeczność. □

Lemat 2. *Nie istnieją takie proste k_1, k_2 takie, że $|Col(k_1)| = |Col(k_2)| = 3$ i $Col(k_1) \cap Col(k_2) = \varnothing$.*

Dowód. Załóżmy, że takie proste istnieją. Nie mogą się przecinać, ponieważ gdyby się przecinały, ich zbiory kolorów nie byłyby rozłączne. Zatem $k_1 \parallel k_2$.

Ponieważ $p \ge 7$, i $|\Gamma| = p + 3$, to $|\Gamma| \ge 10$. Zatem $|\Gamma \setminus (\mathrm{Col}(k_1) \cup \mathrm{Col}(k_2))| \ge 4$. Weźmy cztery punkty o parami różnych kolorach spoza $\mathrm{Col}(k_1) \cup \mathrm{Col}(k_2)$, niech to będą P_1, P_2, P_3, P_4. Niech także m_i to prosta równoległa do k_1 przechodząca przez P_i dla $i \in \{1,2,3,4\}$. Jeżeli wszystkie m_i są sobie równe, to $|\mathrm{Col}(m_i)| \ge 4$ — sprzeczność. Zatem niech bez straty ogólności $m_1 \ne m_2$. Wtedy $l(P_1, P_2) \nparallel m_1$, ponieważ $P_2 \notin m_1$, gdyż $m_1 \parallel m_2$. Zatem

$$|l(P_1, P_2) \cap k_1| = |l(P_1, P_2) \cap k_2| = 1.$$

Oznacza to, że $|\mathrm{Col}(l(P_1,P_2)) \cap \mathrm{Col}(k_1)| = |\mathrm{Col}(l(P_1,P_2)) \cap \mathrm{Col}(k_2)| \ge 1$, co daje $|\mathrm{Col}(l(P_1,P_2))| \ge 4$ — sprzeczność. □

Lemat 3. *Liczba punktów o danym kolorze nie przekracza 4.*

Dowód. Załóżmy, że liczba punktów o kolorze $\mathcal{F}$ wynosi co najmniej 5. Ponieważ $|\Gamma| = p+3$, to $|\Gamma \setminus \{\mathcal{F}\}| = p+2$. Niech $P_1, P_2, \ldots, P_{p+2}$ to punkty o parami różnych kolorach różnych od $\mathcal{F}$. Z Lematu 1 istnieje prosta przechodząca przez 3 z nich, nazwijmy ją k. Bez straty ogólności k przechodzi przez punkty P_1, P_2, P_3. Niech $Q = \{P_4, \ldots, P_{p+2}\}$.

Niech 5 punktów o kolorze $\mathcal{F}$ to F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Niech także $f_{ij} = l(F_i, F_j)$ dla $1 \leq i < j \leq 5$, i $\Phi = \{f_{ij} : 1 \leq i < j \leq 5\}$, gdzie Φ jest traktowane jako multizbiór. Zauważmy, że na każdej z prostych $f \in \Phi$ może leżeć co najwyżej jeden z punktów z Q, ponieważ gdyby dwa z tych punktów leżały na f, k i f przeczyłyby Lematowi 2. Ponieważ $|\Phi| = 10$, to wśród punktów z Q co najwyżej 5 z nich leży na co najmniej dwóch prostych z Φ. Lecz $|Q| = p-1 \geq 6$, więc istnieje punkt z Q leżący na co najwyżej jednej z prostych f_{ij}. Bez straty ogólności ten punkt to P_4, a prosta to f_{12}.

Niech $R = \{F_1, F_3, F_4, F_5\} \cup Q \setminus \{P_4\}$. Różnych prostych przechodzących przez P_4 jest $p+1$, lecz $|R| = p+2$, więc istnieją dwa punkty z R leżące na tej samej prostej m wychodzącej z P_4, nazwijmy je X, Y. Gdyby $\mathrm{Col}(X) \neq \mathrm{Col}(Y)$, $|\mathrm{Col}(m)| = |\{\mathrm{Col}(X), \mathrm{Col}(Y), \mathrm{Col}(P_4)\}| = 3$, a zarazem $\mathrm{Col}(m) \cap \mathrm{Col}(k) = \varnothing$ — sprzeczność z Lematem 2. Zatem $\mathrm{Col}(X) = \mathrm{Col}(Y)$, a jedynymi punktami o tym samym kolorze w R są F_1, F_3, F_4, F_5. Lecz gdyby $X = F_i$, $Y = F_j$, P_4 należałoby do prostej f_{ij} dla $(i,j) \neq (1,2)$, co daje sprzeczność z definicją P_4. □

Wróćmy teraz do głównego twierdzenia. Lemat 3 mówi nam, że dla każdego koloru liczba punktów w danym kolorze wynosi co najwyżej 4. Ponieważ kolorów jest $p+3$, daje to, że punktów ogółem w $\mathbb{F}_{p^2}$ może być co najwyżej $4(p+3) = 4p+12$. Lecz $|\mathbb{F}_{p^2}| = p^2 = p(p-2) + 14 > 4p+12$ — sprzeczność. Zatem nie da użyć się więcej niż $p+2$ kolorów.

Pozostaje pokazać, że istotnie $p+2$ starczy. Takim kolorowaniem będzie pokolorowanie każdego punktu w $S(1)$ na inny kolor, i każdego punktu spoza $S(1)$ na jeden dodatkowy kolor. Wtedy, z Własności 5, każda prosta jest co najwyżej trzykolorowa, bo przecina $S(1)$ w co najwyżej dwóch miejscach. Jednocześnie, z Własności 6 $|S(1)| = p+1$, więc to kolorowanie używa $p+2$ kolorów.

□

3 Uwagi końcowe.

Powyższy dowód działa jedynie dla $p \geq 7$, i korzysta z tego założenia w kilku miejscach. Wiadomo, że dla $p = 3$ twierdzenie jest nieprawdziwe, ponieważ można wtedy pokolorować każdy z 9 punktów na inny kolor, tym samym przecząc $|\Gamma| \leq 5$. Warto zwrócić uwagę, że maksymalny możliwy rozmiar zbioru Γ dla $p = 5$ nie jest znany autorowi pracy — dolnym ograniczeniem jest podany przykład kolorowania na $p+2 = 7$ kolorów, ale nie jest wykluczona możliwość istnienia kolorowania na 8 kolorów. Ten nieintuicyjny fakt, że łatwiej jest dowieść to twierdzenie dla większych p (oryginalna wersja dowodu działała dopiero od $p \geq 19$), jest związany z tym, że gdy płaszczyzna jest większa, jest więcej „miejsca” na pojawienie się nietrywialnych ograniczeń na kolorowanie.

Podany przykład kolorowania na $p+2$ kolorów jest adaptacją przykładu podanego przez Jadwigę Czyżewską w [1] na to, że da się płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ pokolorować nieskończoną liczbą kolorów tak, żeby każda prosta była co najwyżej trzykolorowa.

Literatura

[1] Jadwiga Czyżewska, *Kolorowanie płaszczyzny, prostych, okręgów.* https://www.omj.edu.pl/uploads/attachments/Kolorowanie31_08.pdf