

Odbijanie ortocentrum

Dominik Figurski

30 kwietnia 2023

1 Wstęp

Znanym i bardzo użytecznym faktem jest, że odbicie ortocentrum względem prostej zawierającej bok trójkąta ABC leży na okręgu opisanym Ω na tym trójkącie.

Ponadto odbicie ortocentrum względem środka boku ABC , również leży na Ω .

Zbadamy trójkąt DEF o wierzchołkach będących odbiciami ortocentrum względem trzech prostych zawierających boki ABC .

Wyróżniamy dwie własności wyżej opisanej konstrukcji:

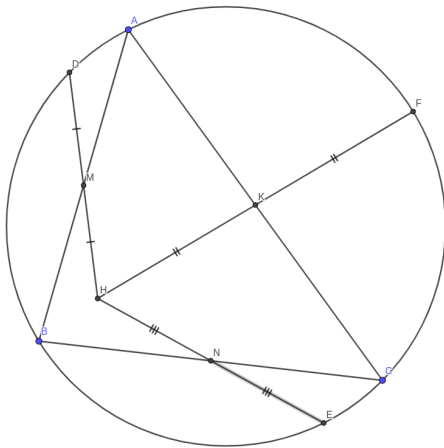
- 1) Odbicie ortocentrum zachowuje okrąg opisany na trójkącie.
- 2) Otrzymany w ten sposób odbity trójkąt można skonstruować biorąc drugie przecięcie cewian przechodzących przez ortocentrum z okręgiem opisanym na trójkącie.

Podobnie dla odbijania ortocentrum względem środków boków ABC .

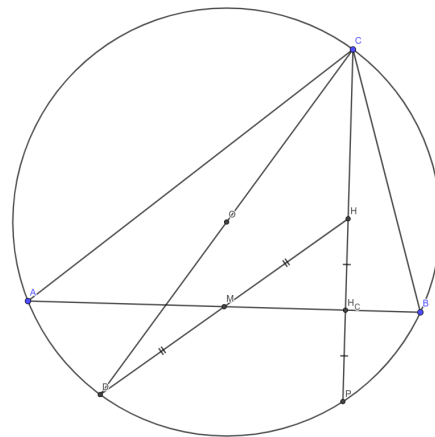
Konstruujemy trójkąt DEF , którego wierzchołkami są obrazy odbić ortocentrum względem środków boków ABC .

Twierdzenie 1.

- 1) Odbicie ortocentrum względem środków boków ABC zachowuje okrąg opisany Ω na ABC .
- 2) Otrzymany w ten sposób odbity trójkąt DEF można skonstruować biorąc drugie przecięcie cewian przechodzących przez środek Ω , z Ω .
- 3) Obrazem odbić ortocentrum DEF względem środków boków DEF jest ABC .



(a) Odbicia ortocentrum względem środków boków zachowują okrąg opisany na trójkącie



(b) jest to równoważne z odbijaniem względem środka opisanego

Rysunek 1

Dowód

1) Jest opisany w **Bibliografia 1**.

2) Oznaczenia tak jak na Rysunku 1(b).

M to środek boku AB .

$J_H^2 : M \rightarrow D \quad H_C \rightarrow P$

$\angle HDP = 90^\circ$ więc $O \in PC$

Czyli CO i HM przecinają się na okręgu.

Analogicznie dla AO i BO \square

3) Wynika wprost z 2)

Od tej pory odbicie ortocentrum oznacza ekskluzywnie odbicie ortocentrum względem prostych zawierających boki trójkąta.

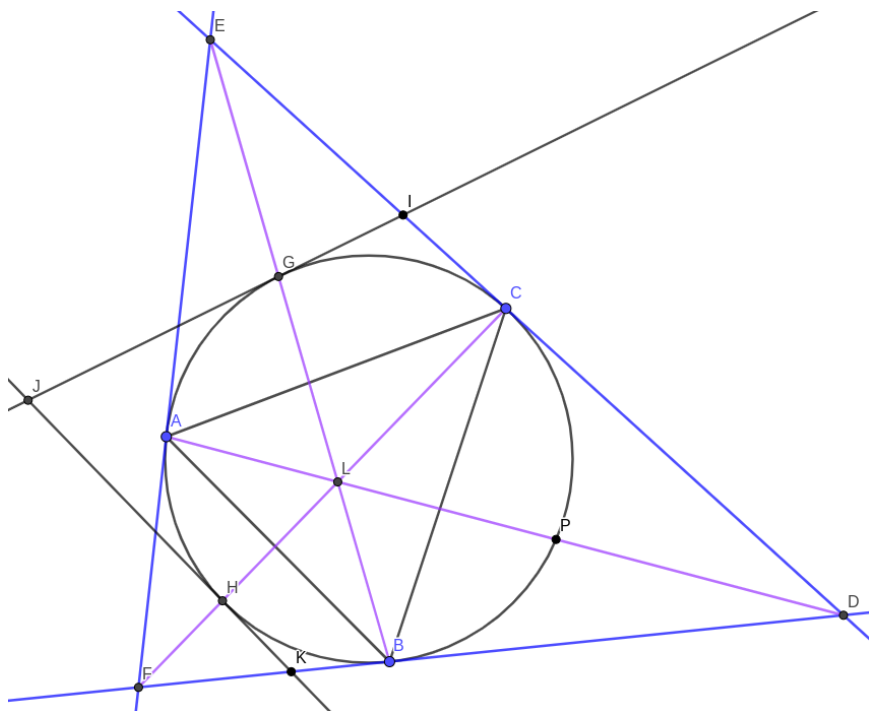
Z uwagi na te obserwacje, problem możemy uogólnić do rozważania drugich przecięć cewian przechodzących przez punkty szczególne ABC , z Ω .

Czyli funkcji trójkąt w trójkąt, zachowujących okrąg opisany.

Twierdzenie 2.

f_L to taka funkcja że $f_L(ABC)$ jest trójkątem wyznaczonym przez drugie przecięcia symedian ABC z Ω .

Zachodzi $f_L(f_L(ABC)) = ABC$



Rysunek 2: L to punkt Lemoine'a trójkąta ABC

Dowód

Konstruujemy trójkąt $f_L(ABC) = GPH$ tak jak na rysunku. Teza jest równoważna z współliniowością AD z PJ (gdyż PJ jest GPH). Zauważmy jednak, że z Twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanych sześciokątów $KDCIJH, KBDIGJ$ proste JD, GB, CH przecinają się w punkcie Lemoine'a. Wynika stąd, że punkt Lemoine'a ABC pokrywa się z punktem Lemoine'a GPH \square

2 Odbijanie Ortocentrum

Skoro nasze funkcje zachowują okrąg opisany Ω na trójkącie, to możemy w taki sposób przesunąć i przeskalować Ω , żeby stał się okręgiem jednostkowym.

Możemy więc wygodnie zapisać wierzchołki trójkąta jako liczby zespolone w postaci biegunowej (promień równy 1).

Niech S będzie zbiorem wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg jednostkowy.

$f_H : S \rightarrow S$ taka że $f_H(x)$ to trójkąt uzyskany przez odbicie ortocentrum x względem boków x .

Jeżeli $f_H(x) = y$ to trójkąt x nazywamy pierwotnym, a y odbitym.

Niech $F_H(x, n) = f_H^n(x)$ oznacza n -krotne złożenie f_H .

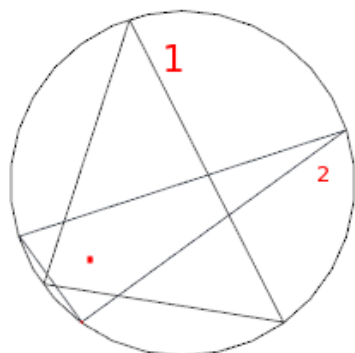
W miejsce H można wstawić dowolny punkt szczególny trójkąta.

Wtedy $f_{X_n}(x)$ oznacza trójkąt, którego wierzchołkami są drugie przecięcia cewian x przechodzących przez X_n

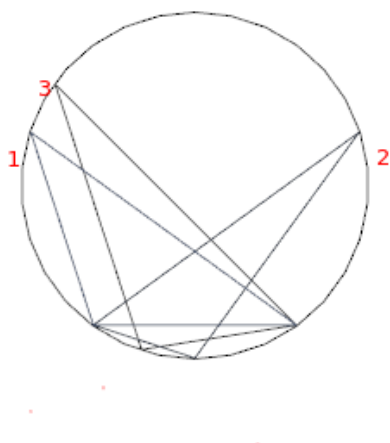
Najbardziej zainteresowały mnie złożenia tych funkcji. Więc w Geogebry zacząłem od odbijania ortocentrum względem boków trójkąta. Jednak szybko odkryłem, że zrobienie pięciu odbić zajęło ponad pół godziny, a same

rysunki szybko stały się mało czytelne. Postanowiłem więc napisać kod, który zasymuluje wielokrotne odbijanie ortocentrum.

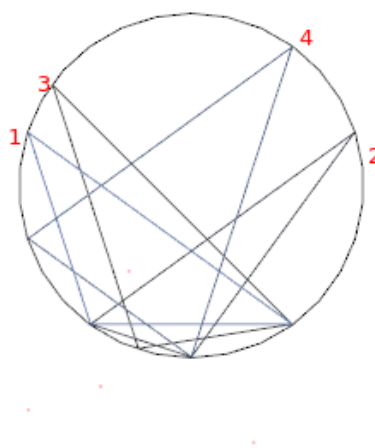
Oto kilka przykładów zasymulowanych przez mój kod (więcej w sekcji **Dodatek**).
Ponumerowane są kolejne złożenia f_x



Rysunek 3: trójkąt pierwotny 1, trójkąt odbity 2, na czerwono ortocentrum

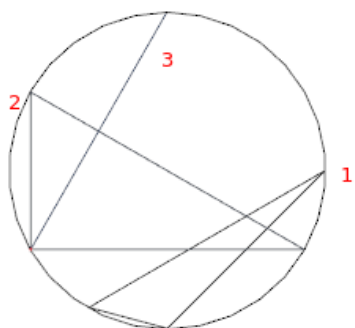


(a)
Trzykrotne złożenie dla biegunowych $0.3\pi, 0.6\pi, 1.2\pi$.

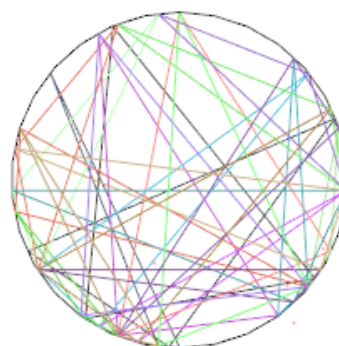


(b)
Pięciokrotne złożenie

Rysunek 4: Pięć złożzeń i cztery widoczne trójkąty, oznaczają wystąpienie cyklu



(a)
Trzykrotne złożenie dla biegunowych $0\pi, 1/2\pi, 2/3\pi$.



(b)
Trzydziestokrotne złożenie

Rysunek 5

Twierdzenie 3.

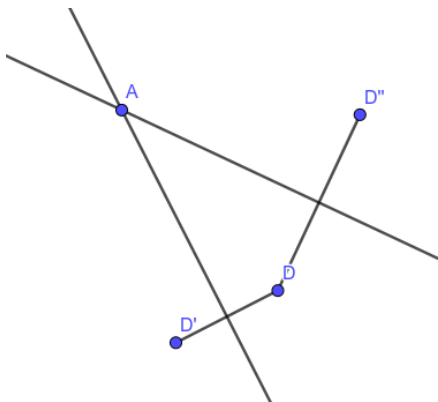
Przy odbijaniu ortocentrum, trójkąt degeneruje się do prostej po odbiciu, wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostokątny.

Dowód

Jeśli trójkąt jest prostokątny, to jego ortocentrum pokrywa się z wierzchołkiem naprzeciwko przeciwprostokątnej. Odbicie punktu względem prostej na której leży, zachowuje ten punkt. Wynika stąd, że odbicia względem prostokątnych pokrywają się, więc obrazem trójkąta prostokątnego po odbiciu ortocentrum jest prosta.

Jeśli trójkąt jest ostrokątny, to ortocentrum leży w jego wnętrzu.

Jeśli trójkąt jest rozwartokątny, to ortocentrum leży na zewnątrz trójkąta.



Rysunek 6: Odbicia D nienależącego do żadnej z prostych, względem prostych

Oczywistym jest, że jeśli $D \neq A$ i proste względem których odbijamy D są różne, to $D' \neq D''$.

Wynika stąd, że każde dwa obrazy odbitego ortocentrum trójkąta są różne.

Obrazy te nie mogą leżeć na jednej prostej, ponieważ leżą na okręgu.

Trzy różne punkty nieleżące na jednej prostej, wyznaczają trójkąt.

2.1 Kąty

Lemat 1.

Nietrudno sprawdzić, że po odbiciu ortocentrum, w przypadku trójkąta ostrokątnego jego kąty (α, β, γ) przechodzą na kąty $(180^\circ - 2\alpha, 180^\circ - 2\beta, 180^\circ - 2\gamma)$ trójkąta odbitego.

Natomiast jeśli np. $\alpha > 90^\circ$, to kąty trójkąta rozwartokątnego (α, β, γ) przechodzą na kąty $(2\alpha - 180^\circ, 2\beta, 2\gamma)$ trójkąta odbitego.

Z Twierdzenia 7.

Trójkąt posiadający kąty (x, y, z) możemy zawsze otrzymać z trójkątów o kątach:

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi-x}{2}, \frac{\pi-y}{2}, \frac{\pi-z}{2} \\ \frac{\pi+x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \\ \frac{x}{2}, \frac{\pi+y}{2}, \frac{z}{2} \\ \frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{\pi+z}{2} \end{pmatrix}$$

Trójkąt prostokątny $(\frac{\pi}{2}, \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Kąt (π) możemy otrzymać z $(\frac{\pi-\pi}{2}), (\frac{\pi+\pi}{2})$ lub $(\frac{\pi}{2})$.

Zdefiniujmy ciąg kątów $(x_n)_{n=0}^\infty$ gdzie $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$(x_n)_{n=0}^\infty \begin{cases} x_{3i+1} = \frac{\pi-x_i}{2} \\ x_{3i+2} = \frac{x_i}{2} \\ x_{3i+3} = \frac{\pi+x_i}{2} \end{cases}$$

Jeśli trójkąt x posiada kąt, będący elementem $(x_n)_{n=0}^\infty$, to $f_H^n(x)$ dla pewnego n może być trójkątem prostokątnym. Jeśli x nie posiada żadnego kąta należącego do zbioru elementów $(x_n)_{n=0}^\infty$, to $f_H^n(x)$ dla dowolnego n nie może być trójkątem prostokątnym.

Zdefiniujmy ciąg $(y_n)_{n=0}^\infty$ gdzie $y_0 = \frac{1}{2}$.

$$(y_n)_{n=0}^\infty \begin{cases} y_{3i+1} = \frac{1-y_i}{2} \\ y_{3i+2} = \frac{1+y_i}{2} \\ y_{3i+3} = \frac{y_i}{2} \end{cases}$$

Zauważamy $y_i \pi = x_i$.

Twierdzenie 4.

Zbiór wyrazów ciągu $(y_n)_{n=0}^\infty$ jest zbiorem wszystkich ułamków w postaci $0 < \frac{k}{2^l} < 1$ gdzie $k, l \in \mathbb{N}_+$. Nazywamy ten zbiór ułamków \mathbb{K} .

Dowód

Baza indukcyjnej: $y_0 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{3}{4}$.

Założenie indukcyjne: Wszystkie ułamki w postaci $\frac{k}{2^l}$ gdzie $0 < k < 2^l$, należą do zbioru wyrazów ciągu $(y_n)_{n=0}^\infty$.

Udowodnimy, że ułamki $\frac{h}{2^{l+1}}$ gdzie $h < 2^{l+1}, h \in \mathbb{N}_+$ również należą do zbioru wyrazów ciągu $(y_n)_{n=0}^\infty$.

$$\frac{h}{2^{l+1}} = \frac{1 \pm y}{2}$$

$$\frac{h}{2^l} = 1 \pm y$$

Jeśli $h > 2^l$ to $h = 2^l + m, m \in \mathbb{N}_+$.

$$\frac{2^l + m}{2^l} = 1 + y$$

$$\frac{m}{2^l} = y$$

Jeśli $h < 2^l$ to $h = 2^l - m, m \in \mathbb{N}_+$.

$$\frac{2^l - m}{2^l} = 1 - y$$

$$\frac{m}{2^l} = y$$

Przypadek $h = 2^l$ jest trywialny.

Stąd zbiór wszystkich ułamków \mathbb{K} jest podzbiorem zbioru wyrazów ciągu $(y_n)_{n=0}^\infty$.

$y_i \in \mathbb{K} \implies y_{3i+1}, y_{3i+2}, y_{3i+3} \in \mathbb{K}$.

Wynika stąd, że w zbiorze wyrazów $(y_n)_{n=0}^\infty$ nie ma elementów nienależących do \mathbb{K} .

Czyli oba zbiory są równe.

□

Twierdzenie 5.

Niech $\mathbb{L} = \{k | k \in \mathbb{R}, \frac{k}{p^i} \in \mathbb{K}\}$.

Jeśli żaden z kątów trójkąta x , nie należy do \mathbb{L} , to $\forall_{n \in \mathbb{N}}, f_H^n(x)$ nie zdegeneruje się do prostej.

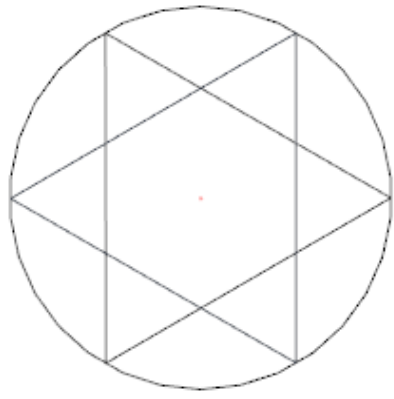
Dowód

Wynika z Twierdzenia 4. i Twierdzenia 3.

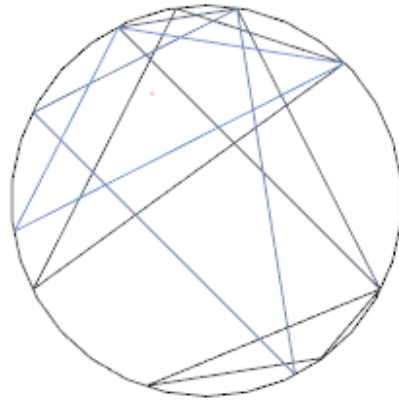
2.2 Cykle

Cykl to jak dla pewnego $x \exists_{a, b \in \mathbb{N}}, \forall_{z \in \mathbb{N}} F_X(x, a) = F_X(x, a + bz)$.

Przykładami cykli są:



(a) Trójkąt równoboczny $0\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$.



(b) $0.15\pi, 0.3\pi, 0.6\pi$.

Rysunek 7

Zdefiniujmy kąt wymierny, jako kąt zapisywalny w radianach w postaci πr gdzie $r \in \mathbb{Q}$.

Twierdzenie 6.

Jeśli trójkąt x posiada wszystkie kąty wymierne i żaden z nich nie należy do zbioru \mathbb{L} , to $\exists_{a,b \in \mathbb{N}}, \forall_{z \in \mathbb{N}} F_X(x, a) = F_X(x, a + bz)$.

Dowód

Jeśli kąty trójkąta są wymierne, to można zapisać je w postaci $(2\pi r, 2\pi s, 2\pi t)$ gdzie $r, t, s \in \mathbb{Q}$.

Można wtedy sprowadzić liczby r, t, s do wspólnego mianownika i przemnożyć licznik i mianownik przez 2, w celu uzyskania parzystego mianownika.

Zapisujemy więc $(2\pi r, 2\pi s, 2\pi t)$ jako $(2\pi \frac{2j}{2m}, 2\pi \frac{2k}{2m}, 2\pi \frac{2l}{2m})$ gdzie $j, k, l, m \in \mathbb{N}$.

Dzielimy teraz okrąg opisany na $2m$ równych łuków, tak aby wierzchołki trójkąta pierwotnego nie zawierały się w żadnym z łuków, tak jak na rysunku 7(b).

Otrzymujemy $2m$ -ką foremny M .

Wielokąt foremny o parzystości wielu wierzchołkach posiada ważną dla nas własność:

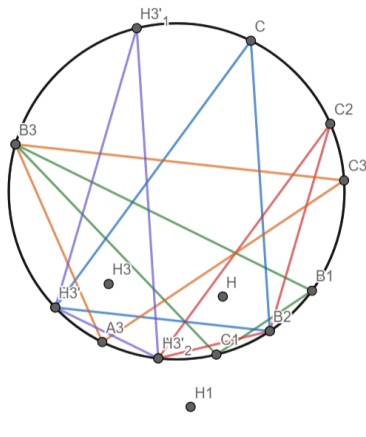
Dowolna prosta między wierzchołkami $2m$ -kąta jest równoległa do pewnej osi symetrii $2m$ -kąta.

Weźmy teraz trójkąt o wierzchołkach należących do zbioru wierzchołków M .

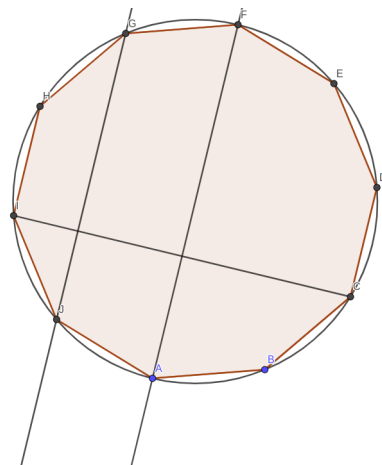
Każdy z jego boków jest równoległy do pewnej osi symetrii M .

Wynika stąd, że każda z wysokości naszego trójkąta jest prostopadła do pewnej z osi symetrii M .

Oznacza to, że drugie przecięcie wysokości trójkąta z Ω , jest obrazem odbicia pierwszego przecięcia względem osi symetrii prostopadłej do danej wysokości.



(a) Przykład cyklu z widoczną równością łuków



(b) $2m$ -ką foremny

Rysunek 8

W takim razie jeśli wierzchołki x należą do zbioru wierzchołków M , to wierzchołki $f(x)$ również należą do tego

zbioru.

$p = \binom{2m}{3}$ To liczba wszystkich możliwych trójkątów o wierzchołkach z zbioru wierzchołków M

Z Zasadą szufladkowej Dirichleta w multizbiorze $\{F_H(x, 1), F_H(x, 2), \dots, F_H(x, p + 1)\}$ wystąpią dwa takie same trójkąty.

□

2.3 Przodkowie trójkątów odbitych względem ortocentrum

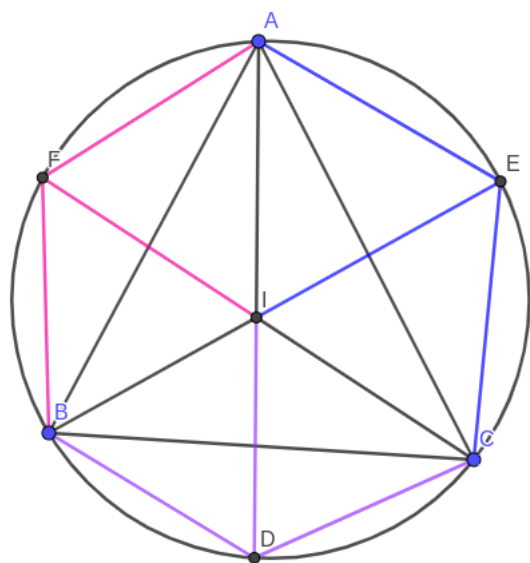
Twierdzenie 7.

Dla każdego trójkąta x możemy skonstruować dokładnie 4 trójkąty pierwotne x_1, x_2, x_3, x_4 takie, że $f_H(x_i) = x$.

Innymi słowy każdy trójkąt posiada dokładnie 4 przodków.

Dowód

Mając dany trójkąt ABC możemy skonstruować trójkąt pierwotny, przecinając AI, BI, CI z okręgiem opisanym.



Rysunek 9: Okręgi trójliściowe

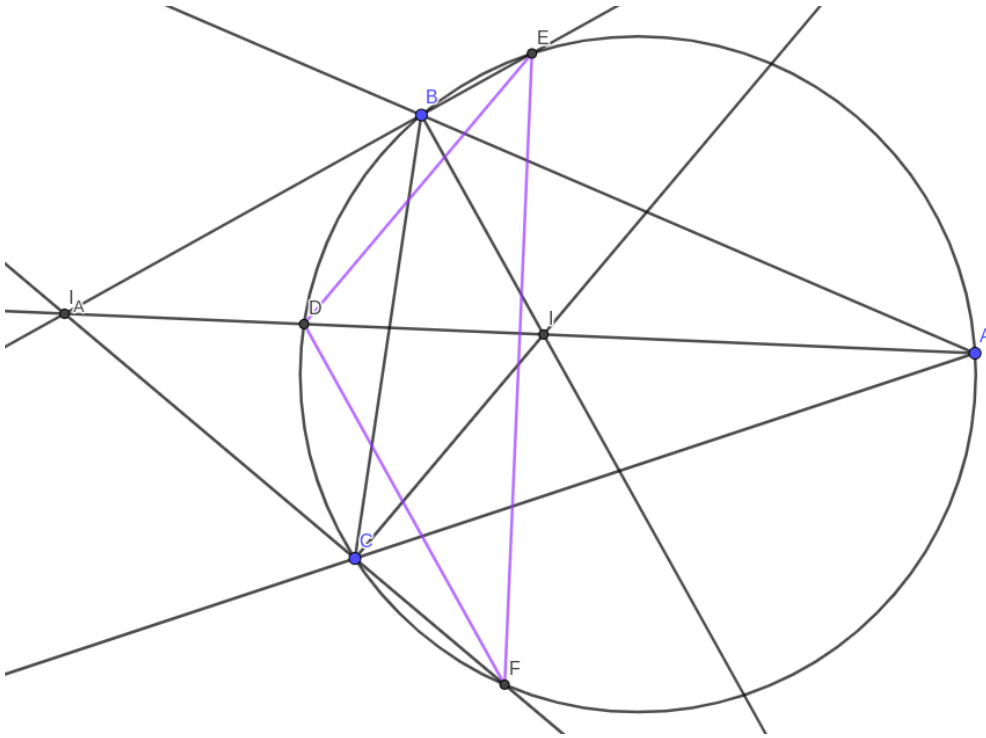
Z trzykrotnie zastosowanego Twierdzenia o Trójliściu, otrzymujemy okręgi $(AIB), (BIC), (CIA)$ o środkach odpowiednio F, D, E .

$P(A, (AIB)) = P(A, (CIA))$ oraz $P(I, (AIB)) = P(I, (CIA))$ więc $AI \perp FE$.

Analogicznie otrzymujemy $BI \perp DE$ oraz $CI \perp DF$

Stąd I jest ortocentrum DEF , czyli $f_H(DEF) = ABC$ (przecięcia wysokości z okręgiem)

Mając dany trójkąt ABC możemy skonstruować trójkąt pierwotny w drugi sposób, przecinając AI_A, BI_A, CI_A z opisanym, gdzie I_A to środek okręgu A-dopisanego.



Rysunek 10: Ceviany z środka A -dopisanego

Tak jak poprzednio udowodnimy że I_A to ortocentrum DEF (to że I_A leży na zewnątrz trójkąta nie ma znaczenia). Oznaczmy kąty przy A, B, C odpowiednio $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$.

$$\angle DEI_A = \angle BAD = \alpha \text{ (łuk } \widehat{BD}).$$

$$\angle DFI_A = \angle GAD = \alpha \text{ (łuk } \widehat{CD}).$$

$$\angle EI_AF = 360^\circ - \angle I_ABA - \angle I_ACA - \angle A = 360^\circ - (90^\circ + \beta) - (90^\circ + \gamma) - 2\alpha = 90^\circ - \alpha.$$

Więc $ED \perp I_AF$ oraz $FD \perp I_AE$.

Czyli $f_H(DEF) = ABC$ (odbijanie ortocentrum działa dla rozwartokątnego).

Uważny czytelnik może zauważyć, że jeśli dwusieczna zewnętrzna jest styczna do okręgu opisanego, to dowód też jest poprawny.

Cztery trójkąty pierwotne konstruujemy przecinając ceviany ABC z okręgiem opisanym, względem kolejno I, I_A, I_B, I_C . Nie istnieje więcej trójkątów pierwotnych, ponieważ **Lemat 1.** daje 4 możliwości na kąty po odbiciu.

$$(180^\circ - 2\alpha, 180^\circ - 2\beta, 180^\circ - 2\gamma), (2\alpha - 180^\circ, 2\beta, 2\gamma), (2\alpha, 2\beta - 180^\circ, 2\gamma), (2\alpha, 2\beta, 2\gamma - 180^\circ).$$

Jeśli obrócimy trójkąt pierwotny względem O , to obrócimy również trójkąt odbity o ten sam kąt względem O .

Tylko trójkąt równoboczny możemy obrócić o kąt inny niż 360° względem O i otrzymać ten sam trójkąt (ale nie-trudno ten przypadek rozważyć oddzielnie).

Wynika z tego, że nie istnieją dwa różne trójkąty o tych samych kątach i tym samym skierowaniu.

Bo obrót przekładający pierwszy pierwotny na drugi pierwotny, nie przełożyłby obrazu odbitego na siebie samego.

Twierdzenie 8.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_I^n(x)$ dąży do trójkąta równobocznego, przy n dążącym do nieskończoności.

Dowód

Oznaczmy łuki niezawierające wierzchołków trójkąta x przez $x[1], x[2], x[3]$.

Zauważamy, że suma $x[1] + x[2] + x[3] = 2\pi$ jest stała, niezależna od x .

$$\text{Przyjmujemy, że } f_I(x)[1] = \frac{x[2]+x[3]}{2}, f_I(x)[2] = \frac{x[1]+x[3]}{2}, f_I(x)[3] = \frac{x[1]+x[2]}{2}.$$

$$\text{Stąd } f_I(x)[1] - f_I(x)[2] = \frac{x[2]+x[3]}{2} - \frac{x[1]+x[3]}{2} = \frac{1}{2}(x[2] - x[1]).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_I^n(x)[1] - f_I^n(x)[2]| = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_I^n(x)[2] - f_I^n(x)[3]| = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_I^n(x)[3] - f_I^n(x)[1]| = 0.$$

Jako że suma $f_I^n(x)[1] + f_I^n(x)[2] + f_I^n(x)[3]$ jest stała,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_I^n(x)$ dąży do równości $f_I^n(x)[1] = f_I^n(x)[2] = f_I^n(x)[3]$, przy n dążącym do nieskończoności.

Stąd $\lim_{n \rightarrow \infty} f_I^n(x)$ dąży do trójkąta równobocznego, przy n dążącym do nieskończoności.

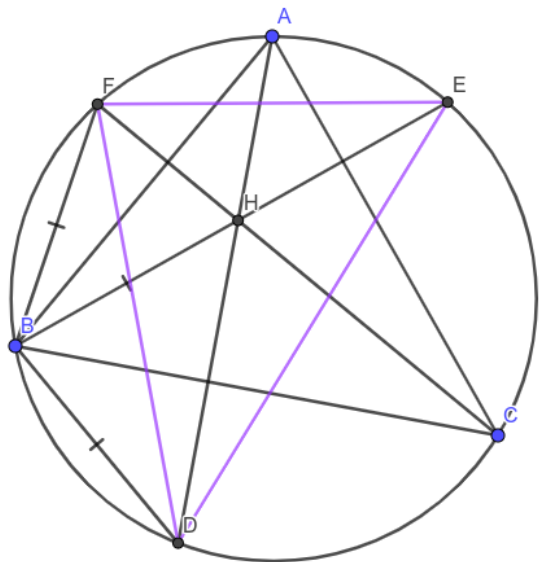
Twierdzenie 9.

$$f_H(f_I(x)) = x.$$

Dowód

Zauważmy, że $f_I(x)[1] = \frac{x[2]+x[3]}{2} < \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Stąd wynika, że trójkąt $f_I(x)$ zawsze jest trójkątem ostrokątnym.



Rysunek 11: ABC odbity, DEF pierwotny

Trójkąt $f_I(x)$ jest ostrokątny, więc ortocentrum x leży wewnątrz x .

Odbicie H względem AB , oraz względem BC , daje nam odpowiednio punkty F i D .

$$BD = BH = BF \implies \widehat{BD} = \widehat{BF}.$$

Stąd BE jest dwusieczną $\angle FED$.

Analogicznie AD jest dwusieczną $\angle FDE$ i CF jest dwusieczną $\angle DFE$.

Więc ortocentrum ABC jest środkiem okręgu wpisanego trójkąta DEF \square .

3 Dodatek

Rysunki w dziale o ortocentrum zostały zrobione za pomocą tego oto programu.

```
#include <bits/stdc++.h>
#include <complex>
#include <SFML/Graphics.hpp>
using namespace std;

complex<double> ref (complex<double> a, complex<double> b, complex<double> h){
    return a + b - a*b*conj(h);}

sf::Vector2f Jedno (complex<double> x){return sf::Vector2f((2+real(x))*100,(2+imag(x))*100);};

int main(){
    int n; cin>>n;
    double k=3.0,l=2.0/3.0,m=0.0;
    cin>>k>>l>>m;

    complex<double> t[3*n+3];
    t[0]= polar(1.0,k*M_PI);
    t[1]= polar(1.0,l*M_PI);
    t[2]= polar(1.0,m*M_PI);

    complex<double> h;
    sf::Vertex H[n];
```

```

for(int i=0;i<n*3;i+=3){
h = (t[i] + t[i+1]) + t[i+2];
H[i/3].position = Jedno(h);
H[i/3].color=sf::Color::Red;

t[i+3] = ref(t[i+1],t[i+2],h);
t[i+4] = ref(t[i],t[i+2],h);
t[i+5] = ref(t[i],t[i+1],h);
}

for(int i=0;i<3*n;i+=3) cout<<t[i]<<'-'<<t[i+1]<<'-'<<t[i+2]<<endl;

sf::Vertex v[6*n];
for(int i=0;i<n*6;i+=6){
complex a=t[i/2];
complex b=t[i/2+1];
complex c=t[i/2+2];
v[i+0].position = Jedno(a);
v[i+1].position = Jedno(b);
v[i+2].position = Jedno(b);
v[i+3].position = Jedno(c);
v[i+4].position = Jedno(c);
v[i+5].position = Jedno(a);
for(int j=0;j<6;j++) v[i+j].color=sf::Color(56+(1+2*i)%200, 56+(1+3*i)%200, 56+(1+5*i)%200);
}

sf::ContextSettings settings;
settings.antiAliasingLevel = 8.0;
sf::RenderWindow window(sf::VideoMode(800, 600), "Odbijarka", sf::Style::Close, settings);

sf::CircleShape unit(1.f);
unit.setPosition(100.f,100.f);
unit.setScale(100.f,100.f);
unit.setOutlineThickness(0.01);
unit.setOutlineColor(sf::Color::Black);

window.clear(sf::Color::White);
window.draw(unit);
window.draw(v, 6*n, sf::Lines);
window.draw(H, n, sf::Points);
window.display();

while (window.isOpen()){
sf::Event event;
while (window.pollEvent(event)) if(event.type == sf::Event::Closed) window.close();
window.display();
}
return 0;}

```

Trójkąt początkowy zapisujemy za pomocą liczb zespolonych w formie biegunowej, o promieniu 1, aby wykorzystać wzór na odbijanie punktu względem cięciwy okręgu jednostkowego.

Potem iterujemy odbicia ortocentrum.

Na końcu jednokładnością skalujemy obraz i dostajemy naszą grafikę.

(Można też łatwo zasymulować odbicia względem symediany i środka okręgu opisanego)

4 Podziękowania

Dziękuję Janowi Dorosińskiemu, Antoniemu Łuczakowi i Norbertowi Namysło za pomoc. W szczególności dziękuję Doktor Oldze Ziemiańskiej oraz Doktorowi Dominikowi Burkowi, dzięki którym praca jest znacznie bardziej zorganizowana i czytelna.

5 Bibliografia

1. https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/planimetria/2012/08/27/0krag_dziewieciu_punktow_i_pewne/

2. <https://web.evanchen.cc/handouts/cmplx/en-cmplx.pdf>