

Spis rozwiązań:

• Zad. 893:

Punkty A, B, C, D, E leżą w tym porządku na linii prostej, przy czym $CA = CE$, $CB = CD$. Poza tą prostą, po jednej jej stronie, leżą punkty K i L takie, że trójkąty AKB i DLE mają ostre kąty przy wierzchołkach A, B i D, E , a suma miar tych czterech ostrych kątów wynosi 180° . Proste KB i LD przecinają się w punkcie N ; proste AK i EL przecinają się w punkcie M ; punkty M, N leżą po różnych stronach prostej KL , a ponadto $MN \perp AE$. Dowieść, że $CK = CL$.

→ Barbara Mroczek (str. 2)

• Zad. 897:

Czworokąt wypukły $ABCD$ ma obwód długości p oraz przekątne długości m i n . Punkt E jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCE$. Udowodnić, że $DE \leq p - m - n$.

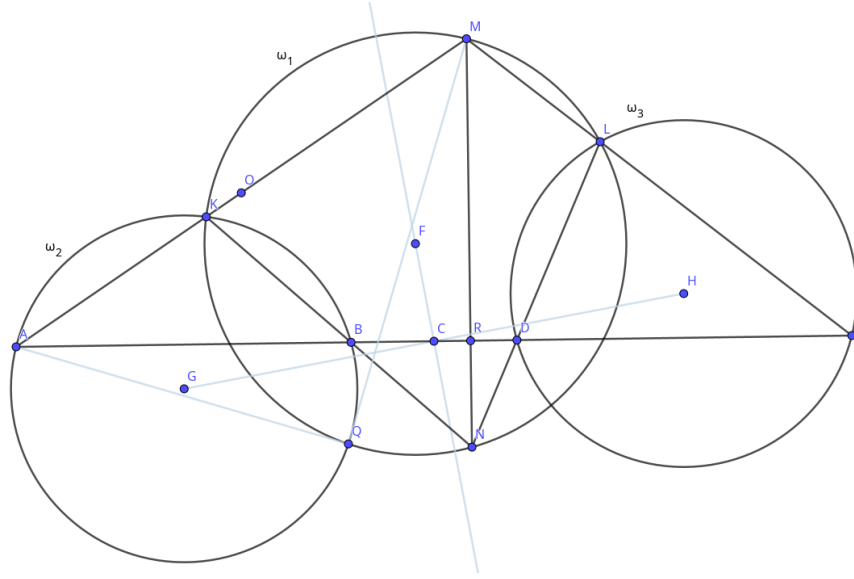
→ Janusz Olszewski (str. 4)

→ Piotr Kumor (str. 7)

• Zad. 902:

Dla liczby naturalnej n niech $w(n)$ oznacza największy całkowity wykładnik, dla którego $n!$ dzieli się przez $10^{w(n)}$, i niech $f(n) = 10^{-w(n)}n!$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej m spełniona jest zależność $f(5^m) \equiv 2^m \pmod{5}$.

→ Jerzy Cisło (str. 13)



Niech ω_1 oznacza okrąg KLM o środku w punkcie F . Niech ω_2 oznacza okrąg ABK o środku w punkcie G . Niech ω_3 oznacza okrąg DEL o środku w punkcie H . Niech O będzie środkiem odcinka AM . Niech Q będzie przecięciem okręgów ω_1 i ω_2 różnym od K . Niech R będzie przecięciem odcinków MN i AE .

Czworokąt $KLMN$ ma dwa kąty zewnętrzne przy wierzchołkach K i L sumujące się do 180° , więc jest wpisany w okrąg. Innymi słowy, punkt N leży na okręgu ω_1 .

Okręgi ω_2 oraz ω_3 mają na równych cięciwach AB i DE oparte kąty wpisane $\sphericalangle AKB$ i $\sphericalangle DLE$, które dopełniają się do 180° . Zatem te dwa okręgi są przystające, w szczególności mają równe promienie oraz są do siebie symetryczne względem punktu C .

Zauważmy, że zachodzi równość

$$\sphericalangle AQM = \sphericalangle AQQ + \sphericalangle KQM = \sphericalangle ABK + \sphericalangle KNM = \sphericalangle NBR + \sphericalangle BNR = 90^\circ.$$

W takim razie punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty A , Q , R i M .

Zachodzi także

$$\begin{aligned} \sphericalangle KGQ + \sphericalangle KFQ &= 2 \cdot \sphericalangle KAQ + 2 \cdot \sphericalangle KMQ = 2 \cdot \sphericalangle MAQ + 2 \cdot \sphericalangle AMQ = \\ &= \sphericalangle MOQ + \sphericalangle AOQ = 180^\circ. \end{aligned}$$

W takim razie $\sphericalangle GKF + \sphericalangle GQF = 180^\circ$, a ponieważ są to kąty równe, to oba te kąty są proste. Analogicznie $\sphericalangle HLF = 90^\circ$. W takim razie trójkąty $\triangle GKF$ i $\triangle HLF$ są prostokątne, mają jedną parę przyprostokątnych KF , LF równą

jako promienie okręgu ω_1 oraz drugą parę przyprostokątnych KG , LH równą jako promienie okręgów przystających ω_2 i ω_3 . Zatem te trójkąty są przystające i zachodzi równość $FG = FH$, czyli punkt F leży na symetralnej odcinka GH . Punkt C jest środkiem tego odcinka, zatem prosta CF jest jego symetralną. W symetrii względem prostej CF okręgi ω_2 i ω_3 są symetryczne, a okrąg ω_1 przechodzi na siebie, zatem odpowiadające punkty przecięcia K i L także są symetryczne. W szczególności zachodzi równość $CK = CL$.

Janusz Olszewski

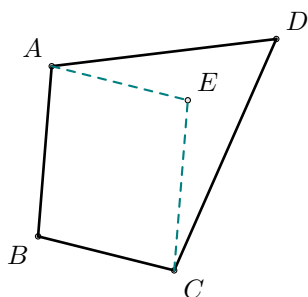
Zadanie nr 897 (*Delta* nr 3 (610) 2025)

Czworokąt wypukły $ABCD$ ma obwód długości p oraz przekątne długości m i n . Punkt E jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCE$. Udowodnić, że $DE \leq p - m - n$.

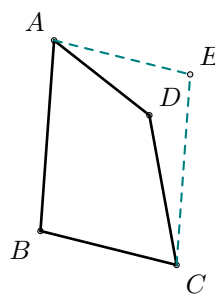
Rozwiązanie

Sposób 1. (nierówność trójkąta, własność równoległoboku)

Możemy założyć, że jeden z odcinków AE lub CE przecina jeden z odcinków CD lub DA . Jeśli bowiem, tak nie jest, wówczas zachodzi jedna z sytuacji przedstawionych na *rys. 1* lub *rys. 2*.

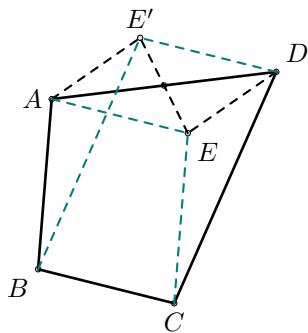


rys. 1

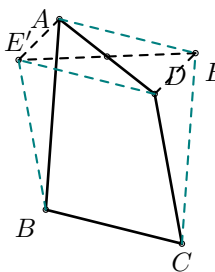


rys. 2

Weźmy punkt E' symetryczny względem środka boku AD . Wówczas w $\overrightarrow{DE'} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EA}$ oraz $\overrightarrow{BE'} = \overrightarrow{CD}$.



rys. 3



rys. 4

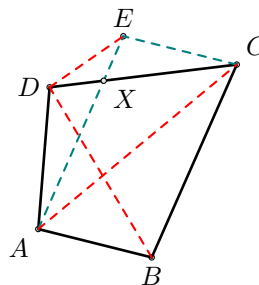
Gdy punkt D leży poza równoległobokiem $ABCE$ (*rys. 3*) wówczas odcinki BE' i AD przecinają się. Zaś gdy punkt D leży wewnątrz równoległoboku

$ABCE$ (rys. 4), wówczas odcinki DE' i AB przecinają się. Przy czym w każdym przypadku $DE = DE'$. Tym samym badanie nierówności dla piątki punktów A, B, C, D, E jest równoważne badaniu tej nierówności dla piątki punktów A, B, C, D, E' gdyż $DE = DE'$.

Dla ustalenia uwagi, założmy, że odcinki AE i CD przecinają się. Punkt ich przecięcia oznaczmy przez X (rys. 5).

Z nierówności trójkąta dla $\triangle DXE$, $\triangle AXC$,
i $\triangle ABD$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} DE &\leq DX + XE \\ AC &\leq AX + XC \\ BD &\leq BA + AD \end{aligned}$$



rys. 5

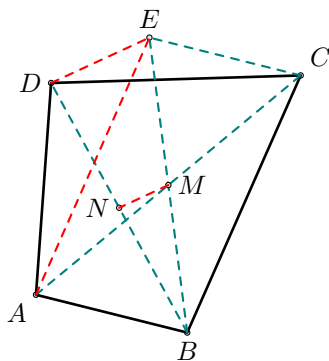
Dodając stronami otrzymane nierówności mamy

$$\begin{aligned} m + n + DE &= BD + AC + DE \\ &\leq (DX + XC) + (AX + XE) + BA + AD \\ &= DC + AE + BA + AD \\ &= CD + BC + AB + DA = p. \end{aligned}$$

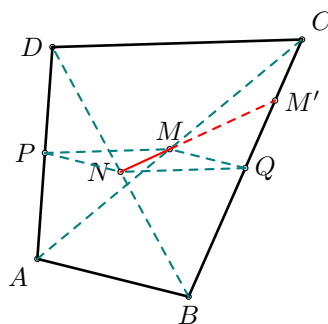
Jest to nierówność z zadania.

Sposób 2. (nierówność trójkąta, podobieństwo, własność równoległoboku)

Niech M i N będą środkami przekątnych AC i BD (rys. 6).



rys. 6



rys. 7

Zauważmy, że punkt M jest także środkiem przekątnej BE równoległoboku $ABCE$, a punkt N środkiem odcinka BD . Dlatego odcinki MN i DE są równoległe oraz $2MN = DE$. Nierówność z zadania możemy zapisać w postaci.

$$AB + BC + CD + DA \geq AC + BD + 2MN \quad (1)$$

Oznaczmy środki przeciwległych boków AD i BC przez P i Q (*rys. 7*). Czworokąt $MPNQ$ jest równoległobokiem (być może zdegenerowanym do odcinka - w przypadku gdy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem). Możemy założyć, że punkty M, N leżą bliżej wierzchołków C, D niż punkt przecięcia przekątnych oraz prosta MN przecina odcinek QC w punkcie M' (gdy $M = N$ wówczas wybieramy prostą $MN = MC$). Konfigurację tę przedstawia *rys. 7*. Wówczas z nierówności trójkąta dla $\triangle MM'C$, $\triangle NQM'$ otrzymujemy

$$NM + MC \leq NM + (MM' + M'C) = NM' + M'C < (NQ + QM') + M'C = NQ + QC$$

Ponadto z nierówności trójkąta dla $\triangle DPN$ mamy $DN \leq DP + PN$. Dodając otrzymane nierówności stronami dostajemy

$$DN + NM + MC \leq DP + PN + NQ + QC.$$

Uwzględniając związki: $BD = 2DN$, $AC = 2MC$, $AB = 2DP$, $BC = 2QC$, $CD = 2NQ$, $DA = 2DP$ otrzymujemy nierówność (1) równoważną nierówności z zadania.

Sposób 3. (nierówność Hlawki)

Oznaczmy $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$.

Wówczas $\vec{d} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DE} = -(\vec{c} + \vec{a})$.

Podstawiając powyższe wektory w nierówności Hlawki

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| + \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| \geq \|\vec{a} + \vec{b}\| + \|\vec{b} + \vec{c}\| + \|\vec{c} + \vec{a}\|$$

(prawdziwej dla dowolnych wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ w przestrzeni kartezjańskiej, w tym w szczególności na płaszczyźnie) oraz uwzględniając, że

$$p = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| + \|\vec{d}\|, \quad m = \|\overrightarrow{AC}\|, \quad n = \|\overrightarrow{BD}\|, \quad DE = \|\overrightarrow{DE}\|$$

otrzymujemy nierówność z zadania: $p \geq m + n + DE$.

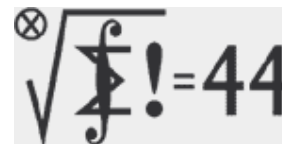
Komentarz.

Dowód nierówności Hlawki można znaleźć w wielu źródłach. W klasycznej książce Dragoslava S. Mitrinovića „*Elementarne nierówności*” wskazano na str. 295-296 uogólnienia oraz kilka odsyłaczy. Wpisując w przeglądarce hasło *Hlawka inequality* otrzymujemy na przykład

<https://www.cut-the-knot.org/arithmetric/algebra/Hlawka.shtml>,
gdzie podano dwa dowody algebraiczne oraz stronę

<https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/GeometricHlawka.shtml>,
gdzie podano dowód geometryczny nierówności w wersji wykorzystanej w *sposobie 3* tj. dla wektorów na płaszczyźnie.

Dowody podane w *sposobach 1* i *2* są w zasadzie dowodami geometrycznymi nierówności Hlawki dla wektorów na płaszczyźnie.



Piotr Kumor

897. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma obwód długości p oraz przekątne długości m i n . Punkt E jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCE$. Udowodnić, że $m + n + DE \leq p$.

Rozwiązanie

Teza zadania 897 jest równoważna nierówności (H) znanej jako „nierówność Hlawki” lub „nierówność Hornischa – Hlawki”. Nierówność (H) jest sformułowana dla wektorów x, y, z w rzeczywistej przestrzeni liniowej unormowanej, jako uogólnienie nierówności trójkąta. Oto warunek (H) :

$$\|x + y\| + \|y + z\| + \|x + z\| \leq \|x + y + z\| + \|x\| + \|y\| + \|z\|.$$

Zadanie 897 redukuje się do tej nierówności, następująco :
W rzeczywistej płaszczyźnie dwuwymiarowej, rozważmy wektory :

$$x = \vec{AB}, \quad y = \vec{BC}, \quad z = \vec{CD}.$$

$$\text{Zatem } x + y + z = \vec{DA}, \quad x + y = \vec{AC}, \quad y + z = \vec{BD},$$

$$\text{oraz } -x - z = \vec{DE}$$

(najłatwiej sprawdzić to rachunkiem współrzędnych).

Mamy więc równości : $m + n + DE =$

$$\|x + y\| + \|y + z\| + \|x + z\|$$

$$\text{oraz } p = AB + BC + CD + DA =$$

$$\|x + y + z\| + \|x\| + \|y\| + \|z\|$$

z których wynika, że teza zadania 897 to dokładnie nierówność (H)

dla wektorów $x = \vec{AB}, \quad y = \vec{BC}, \quad z = \vec{CD}$.

Nierówność (H) **nie jest** ogólnie prawdziwa we wszystkich rzeczywistych przestrzeniach liniowych unormowanych. Jednak jest ona prawdziwa w **każdej** przestrzeni wymiaru jeden lub dwa. (czyli **równoważnie** dla każdej trójki wektorów liniowo zależnych). Zostało to udowodnione w pracy :

[22] Kelly, L.M., Smiley, D.M., Smiley, M.F.: Two dimensional spaces are quadrilateral spaces. Am. Math. Mon. **72**, 753–754 (1965)

Link :

<https://www.semanticscholar.org/paper/Two-Dimensional-Spaces-are-Quadrilateral-Spaces-Kelly-Smiley/a091e10843634deee8eb2dfff70507e5f0ac6da2>

Dowód ten jest krótki i elementarny.
Na dwóch zdjęciach poniżej widać go w całości.

TWO DIMENSIONAL SPACES ARE QUADRILATERAL SPACES

L. M. KELLY, D. M. SMILEY, AND M. F. SMILEY; Michigan State University, Riverside, California, and the University of California, Riverside.

In [2] some of us conjectured that if X is a real normed linear space and x, y, z are linearly dependent in X , then

$$(1) \quad |x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|.$$

Joram Lindenstrauss has observed that (1) is a minor consequence of his result [1] that every normed linear space of dimension two is isometric to a subspace of $L_1[0, 1]$. Two of us have given a geometric proof of (1) based on the convexity of the unit ball of X (unpublished). Here we give a very simple algebraic proof of (1).

Since x, y, z are linearly dependent we have $\rho x + \sigma y + \tau z = 0$ for real numbers ρ, σ, τ not all zero.

Case 1. ρ, σ, τ are all nonnegative (or all nonpositive). We may choose our notation so that $\rho, \sigma, \tau \geq 0, \rho \geq \sigma, \tau$ and $\tau > 0$. For, if $\sigma = \tau = 0$ then $x = 0$ and (1) is trivial. We may then write $z = \alpha x + \beta y$ where $-\alpha = -\rho\tau^{-1} \leq -1, \beta = -\sigma\tau^{-1} \leq 0$ and $\alpha \leq \beta$. With $k = (\alpha - \beta)\alpha^{-1}$ and $l = \alpha^{-1}$ we have

$$0 \leq k \leq 1, \quad 0 \leq l \leq 1, \quad ky - lz = x + y$$

as well as $(1 - k)y - (1 - l)z = -(z + x)$. Then

$$|x + y| \leq k|y| + l|z|, \quad |z + x| \leq (1 - k)|y| + (1 - l)|z|$$

and we get $|x + y| + |z + x| \leq |y| + |z|$. But we also have $|y + z| \leq |x| + |x + y + z|$ and (1) follows by addition.

Case 2. One of ρ, σ, τ is negative and the other two are nonnegative (or one of ρ, σ, τ is positive and the other two are nonpositive). We may choose our notation so that $\tau < 0$, $\rho, \sigma \geq 0$ and $\sigma \geq \rho$. Here we have $z = \alpha x + \beta y$ with $\alpha, \beta \geq 0$ and $\alpha \leq \beta$. With $k = (\beta - \alpha)(1 + \beta)^{-1}$, $l = (1 + \beta)^{-1}$ we verify that

$$0 \leq k \leq 1, \quad 0 \leq l \leq 1, \quad kx + l(x + y + z) = x + y, \\ (1 - k)x + (1 - l)(x + y + z) = x + z.$$

Manipulations like those used for Case 1 then prove that (1) holds.

M. F. Smiley's research was partially supported by NSF grant GP-1447.

References

1. Joram Lindenstrauss, On the extension of operators with a finite-dimensional range, *Ill. J. Math.*, 8 (1964) 488-499.
2. D. M. Smiley and M. F. Smiley, The polygonal inequalities, *this MONTHLY*, 71 (1964) 755-760.

Editorial Note. The problem raised by the Smileys was also solved by Dr. Roy O. Davies in a letter to the Smileys dated Dec. 2, 1964.

W ten sposób rozwiązanie zadania 897 dobiegło końca.

Uwaga 1

Z dowodu widać, że jest to prawda dla **każdej normy** na płaszczyźnie. Nie musi to więc być norma euklidesowa, czyli zwykła odległość. Nie jest też istotne założenie, że punkty A, B, C, D to wierzchołki czworokąta wypukłego. Nie było ono nigdzie wykorzystane. Rozwiązanie działa dla dowolnej czwórki punktów płaszczyzny.

Uwaga 2

Odcinek DE jest dwa razy dłuższy niż odcinek łączący środki przekątnych AC i BD . Zachodzi też odpowiednia równość wektorów. Najłatwiej stwierdzić to wykonując rachunek na współrzędnych. Zatem w treści zadania 897 można zastąpić DE przez podwojoną długość wspomnianego odcinka. W tej wersji zadanie wystąpiło jako Problem 11841 konkursu „American Mathematical Monthly” :

<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.122.5.500>

11841. *Proposed by Leonard Giugiuc, Drobeta-Turnu Severin, Romania.* Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. Let E be the midpoint of AC , and let F be the midpoint of BD . Show that

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DA| \geq |AC| + |BD| + 2|EF|.$$

(Here $|XY|$ denotes the distance from X to Y .)

Nie dotarłem do „firmowego” rozwiązania w AMM.

Jednak rozwiązanie jest też dostępne pod adresem :

<https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/HlawkaInConvexQuadrilateral.shtml>

To dowód nierówności Hlawki w przestrzeni wymiaru dwa, ze zwykłą odległością euklidesową. Rachunek na liczbach zespolonych. Jest tam też udowodnione, że gdy czworokąt $ABCD$ jest wypukły (jak w treści zadania 897) to nierówność jest ostra.

Więcej : pozostaje ona ostra, dla każdej czwórki punktów A, B, C, D z których żadne trzy nie są współliniowe.

Uwaga 3

To ostatnie nie jest prawdą dla każdej normy w wymiarze dwa.

Na przykład, gdy norma wektora (x, y) jest określona wzorem :

$\max(|x|, |y|)$ (tzw. norma maksimum), to dla czworokąta wypukłego $ABCD$ o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 1)$, $D = (2, 2)$ mamy $E = (1, 1)$ oraz równości $AB = BC = CD = 1$, $DA = 2$, $DE = 1$, $AC = 2$, $BD = 2$. Zatem $AB + BC + CD + DA = 5 = AC + BD + DE$, więc w czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość.

Uwaga 4

Nierówność Hlawki nie jest ogólnie prawdziwa, gdy wymiar przestrzeni przekracza dwa. Przykładem może być norma maksimum w wymiarze trzy. Cztery punkty $A = (0, 0, 0)$; $B = (1, 1, 0)$; $C = (2, 1, 1)$;

$D = (2, 2, 2)$ nie leżą w jednej płaszczyźnie. Mamy $E = (1, 0, 1)$ oraz równości $AB = BC = CD = 1$; $DA = 2$; $AC = BD = DE = 2$. Zatem $AB + BC + CD + DA = 5 < 6 = AC + BD + DE$, więc nierówność Hlawki i teza zadania 897 nie są prawdziwe.

Uwaga 5

Jednak nierówność Hlawki (więc także teza 897) jest prawdziwa dla dowolnych wektorów **w każdej** przestrzeni, której norma jest określona przez iloczyn skalarny. W szczególności więc w przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru. Fakt ten jest udowodniony w wielu miejscach. Zacytujemy tutaj pracę : „ A survey of the Hornich – Hlawka inequality ” dostępną pod adresem <https://arxiv.org/abs/2407.03278> Dowód jest na samym początku tej pracy, na pierwszej stronie. Jest oparty na tożsamości z iloczynem skalarnym, jest więc on prawdziwy w każdej takiej przestrzeni. Wynika też z niego, że nierówność jest ostra, gdy wektory nie są współliniowe.

Uwaga 6

Zatem także teza zadania 897 jest prawdziwa dla czwórki punktów A, B, C, D w każdej przestrzeni z normą daną przez iloczyn skalarny. W szczególności w przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru. Ostatnie zdanie jest nieco na wyrost, oczywiście można ograniczyć się tu do przestrzeni trójwymiarowej. Jeżeli zaś punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie, to nierówność jest ostra.

Uwaga 7

Wszystkie powyższe rozważania nie były do końca elementarne. Z uwagi na sam ich język : „wektory” , „przestrzenie” , „iloczyny skalarne ” etc ... W przypadku odległości euklidesowych (oryginał 897) można tego wszystkiego uniknąć rozważając tylko długości odcinków i nierówności w liczbach rzeczywistych. W pracy zacytowanej w uwadze 5, na stronie 12 jest udowodniony Lemat 3. Otrzymujemy z niego rozwiązanie zadania 897 (a także nierówność Hlawki dla iloczynów skalarnych) przyjmując jako liczby a, b, c, d, x, y, z długości odcinków $AB, BC, CD, DA, AC, BD, DE$. Warunki (i) oraz (ii) to po prostu nierówności trójkąta, natomiast nierówność (iii) to w istocie równość znana jako „ uogólniona równość równoległoboku ”. Jest ona prawdziwa dla iloczynu skalarnego, a także łatwa do sprawdzenia rachunkiem na współrzędnych.

Uwaga 8

Powstaje pytanie kiedy w nierówności zadania 897
ma miejsce równość ?

W przypadku ogólnym (dowolne normy) nawet nie szukałem
odpowiedzi. Uwaga 3 pokazuje, że może to być trudne.

Jednak w przypadku zwykłej odległości znalazłem (jak myślę)
pełną odpowiedź. Otóż równość zachodzi wtedy i tylko wtedy,
gdy ma miejsce jeden z dwóch (rozłącznych) przypadków (*) albo (**).

(*) Alternatywa czterech równości punktów :

$$A = B \quad ; \quad B = C \quad ; \quad C = D \quad ; \quad D = A$$

Równoważnie $AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = 0$ więc odpowiada to sytuacji
gdy co najmniej jeden z wektorów jest zerowy.

Nierówność Hlawki jest wtedy oczywiście równością.

(**) Punkty A, B, C, D są parami różne i leżą na jednej prostej
w określonej kolejności. Kolejność tę podajemy poniżej
w punktach (1) – (4) i (1') – (4').

(1) A, B, C, D

(1') D, C, A, B

(2) D, A, B, C

(2') C, B, A, D

(3) C, D, A, B

(3') B, A, D, C

(4) A, D, C, B

(4') B, C, D, A

Sprawdzenie że istotnie w powyższych przypadkach zachodzi równość
jest natychmiastowe.

Rozwiązanie zadania nr 902

$(5^n)!$ jest iloczynem kolejnych dodatnich liczb całkowitych.

$1/5$ z czynników, czyli 5^{n-1} czynników, dzieli się przez 5.

Oznaczmy iloczyn czynników niepodzielnych przez 5 literą Q . Mamy

$$(5^n)! = Q \cdot 5^{5^{n-1}} \cdot (5^{n-1})!.$$

Dalej wystarczy nam reszta z dzielenia przez 5 liczby

$$Q \cdot 5^{5^{n-1}} : 10^{5^{n-1}} = Q : 2^{5^{n-1}}.$$

Ponieważ $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$, więc zamiast dzielić Q przez potęgę 2, możemy pomnożyć Q przez taką samą potęgę 3. Czynniki Q niepodzielne przez 5 możemy zastąpić resztami z dzielenia przez 5.

$$Q \cdot 3^{5^{n-1}} \equiv (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^{5^{n-1}} \cdot 3^{5^{n-1}} \equiv 2^{5^{n-1}} \equiv 2 \pmod{5},$$

gdzie na koniec skorzystaliśmy z relacji $2^5 \equiv 2 \pmod{5}$.

Możemy teraz napisać wzór rekurencyjny (f jest określone w treści zadania):

$$f(5^n) \equiv 2 \cdot f(5^{n-1}) \pmod{5}, \quad f(1) = 1,$$

z którego od razu wynika, że

$$f(5^n) \equiv 2^n \pmod{5}.$$

Jerzy Cisko