Niech $w_1(t)$, $w_2(t)$ będą dwiema krzywymi zamkniętymi, którym odpowiadają krzywe $z_1(t)$ i $z_2(t)$. Równość

$$e^{z_1(t)+z_2(t)} = e^{z_1(t)}e^{z_2(t)} = w_1(t)w_2(t)$$

pokazuje, że krzywej $w_1(t)w_2(t)$ odpowiada krzywa $z_1(t)+z_2(t)$. Wynika stąd następna bardzo ważna własność indeksu:

$$\operatorname{ind}\big(w_1(t)w_2(t)\big) = \operatorname{ind} w_1(t)+\operatorname{ind} w_2(t).$$

Drugą własność indeksu zaobserwowaliśmy już wcześniej. Mianowicie, jeśli zamknięta krzywa $w(t)$ nie przecina półprostej dodatniej (lub ujemnej), to

$$\operatorname{ind} w(t) = 0.$$

Zobaczymy teraz, w jaki sposób z tych dwu własności indeksu wynika następujące

podstawowe twierdzenie algebry:

Każdy wielomian

(2) $$W(z) = a_n z^n + \ldots + a_0, \quad n > 0, \quad a_n \neq 0$$

o współczynnikach zespolonych posiada zespolony pierwiastek.

Będziemy rozumować nie wprost. Przypuśćmy, że wielomian W nie posiada pierwiastka. Wynika stąd, że krzywa $W(re^{it})$, gdzie $r \geqslant 0$, zaś $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, nie przechodzi przez 0, a więc posiada określony indeks. Indeks ten zmienia się w sposób ciągły wraz z r, a będąc zawsze liczbą całkowitą musi mieć tę samą wartość dla każdego r. Dla $r = 0$ krzywa $W(re^{it})$ redukuje się do stałej, a więc indeks ma wartość zero.

Tymczasem pisząc $W = W_1 W_2$, gdzie $W_1 = z^n$, $W_2 = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \dfrac{a_0}{z^n}$ stwierdzamy, że dla dużych r indeks ma wartość n. Rzeczywiście, dla dużych wartości bezwzględnych zmiennej z, wartości W_2 mało różnią się od a_n i wobec tego nie należą do półprostej dodatniej lub nie należą do półprostej ujemnej. Stąd, dla dużych r, $\operatorname{ind} W_2(re^{it}) = 0$. Ale $\operatorname{ind} W_1(re^{it}) = n \operatorname{ind} re^{it} = n$. Zatem

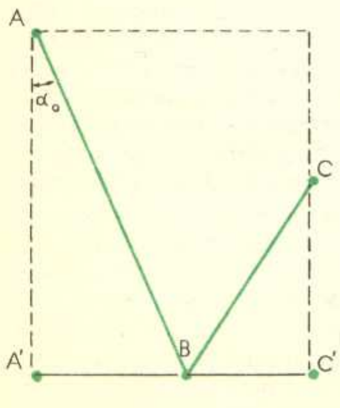
$$\operatorname{ind} W(re^{it}) = n+0 = n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkiem $n > 0$, a więc dowód został zakończony.

Raz jeszcze urojone i sprawiło niespodziankę, i to niespodziankę dużego kalibru. Powołane do istnienia wyłącznie w związku z kłopotami z rozwiązaniem prościutkiego równania (1), odwdzięczyło się w sposób przewyższający wszelkie oczekiwania. Równanie (2) może nie mieć pierwiastka rzeczywistego, ale na pewno posiada pierwiastek postaci $a+bi$. Przyznacie, że takiego sprzymierzeńca można nawet polubić. A może warto nawet ... poznać go trochę lepiej.

Zadania

redaguje dr Jędrzej JĘDRZEJEWSKI



F3. Do wykonania dziennych zadań pozostało listonoszowi doręczenie jednej przesyłki do któregoś z domów przy ulicy $A'C'$. Ulica ta biegnie wzdłuż placu, w którego narożniku (punkt A) znajduje się urząd wydający przesyłki. W punkcie C placu przy ulicy CC', biegnącej prostopadle do $A'C'$ i także wzdłuż tego samego placu, znajduje się urząd C, do którego listonosz musiał dostarczyć pokwitowanie odbioru przesyłki. Listonosz wybrał sobie adresata (punkt B) w taki sposób, żeby przebyć trasę ABC w najkrótszym czasie. Ciężar niesionej paczki obniża prędkość marszu listonosza n = trzykrotnie w stosunku do prędkości marszu z listem lub bez paczki. Czy przesyłką była paczka, czy list, jeżeli wiadomo, że kierunek wybranej przez niego drogi (odcinek AB) tworzy z ulicą $A'A$ kąt $\alpha_0 = 30°$? Zakładamy ponadto, że listonosz do i od adresata porusza się po prostych i ruchem jednostajnym.
Rozwiązanie na str. 13

redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

W niniejszym numerze podajemy trzy zadania, które mieli rozwiązać uczestnicy Zaocznej Szkoły Matematycznej przy Uniwersytecie Moskiewskim.

M7. Student w ciągu pięciu lat studiów zdał 31 egzaminów. Na każdym roku studiów zdawał więcej egzaminów niż na roku poprzednim. Liczba egzaminów na roku piątym była trzy razy większa od liczby egzaminów na roku pierwszym. Ile egzaminów zdawał student na roku czwartym?
Rozwiązanie na str. 14.

M8. Równoległe boki trapezu równoramiennego mają długości 4 cm i 8 cm, pole trapezu wynosi 21 cm^2. Który bok trapezu przecina dwusieczna kąta przy większej podstawie?
Rozwiązanie na str. 2.

M9. Czy suma odległości punktu leżącego wewnątrz czworokąta wypukłego od każdego jego wierzchołka może być większa od jego obwodu?
Rozwiązanie na str. 15.