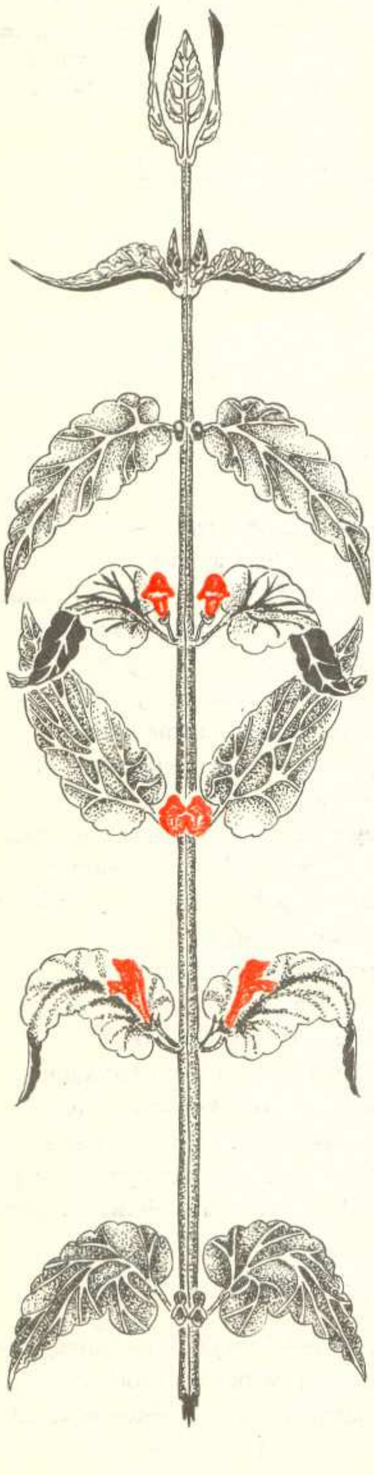
Izometrie

Mgr Jerzy BEDNARCZUK



Jedno z zadań na pisemnym egzaminie wstępnym na wyższe studia matematyczne miało następującą treść: „Na płaszczyźnie dany jest dowolny czworokąt. Ile elementów może mieć zbiór izometrii przekształcających ten czworokąt na siebie?".

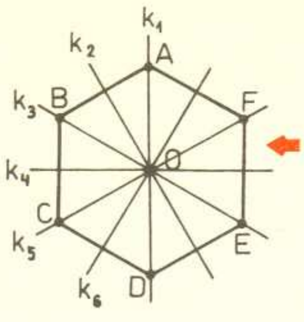
Zadanie to sprawiło większości kandydatów znaczne trudności. Dlatego warto zastanowić się nad kilkoma związanymi z nimi problemami. Potraktujemy przy tym zagadnienie ogólniej, a mianowicie będziemy zajmowali się izometriami przykształcającymi dowolne figury ograniczone (w szczególnym przypadku — wielokąty) na siebie. Na wstępie zasadnicze pytanie: Jakie izometrie mogą przekształcać figurę ograniczoną na siebie? Aby na nie odpowiedzieć, wystarczy znać podstawowe twierdzenia dotyczące izometrii płaszczyzny, które dla ułatwienia przytaczamy na sąsiedniej stronie. W oparciu o nie łatwo stwierdzimy, że izometriami, o które pytaliśmy, są symetrie osiowe i obroty (nietrudno wskazać przykłady odpowiednich figur), nie mogą zaś nimi być ani przesunięcia, ani symetrie z poślizgiem. Weźmy bowiem dowolny punkt rozpatrywanej figury. Gdyby jakieś przesunięcie (symetria z poślizgiem) przekształcało tę figurę na siebie, to również n-krotne złożenie tego przesunięcia dla dowolnego n naturalnego miałoby tę własność na mocy *5°* (dla symetrii z poślizgiem weźmy $2n$-krotne złożenie, aby otrzymać translację — patrz *6°*). Tak więc, wobec dowolności n odległość rozpatrywanego punktu od jego obrazu, należącego także do tej figury, mogłaby być dowolnie duża, co przeczyłoby założeniu ograniczoności figury. Twierdzenie to upraszcza nam znacznie sytuację rozpatrywaną w zadaniu przytoczonym na początku artykułu. Uprości się ona jeszcze bardziej, gdy zauważymy, że jeśli i obrót i symetria przekształcają figurę ograniczoną na siebie, to środek obrotu należy do osi symetrii. Gdyby bowiem do osi symetrii nie należał, to złożenie tych przekształceń, będące na mocy *4°* symetrią z poślizgiem o wektor niezerowy, przekształcałoby także tę figurę na siebie, co, jak już ustaliliśmy, jest niemożliwe. Podobnie możemy udowodnić, że jeśli dwie symetrie osiowe przekształcają figurę ograniczoną na siebie, to ich osie się przecinają. Tu już nam zapewne intuicja podpowiada, że jeśli dwa obroty przekształcają figurę ograniczoną na siebie, to ich środki się pokrywają. Dowód tego faktu każdy z nas przeprowadzi chyba bez większych trudności (wskazówka: udowodnić, że złożenie dwu obrotów wokół różnych środków złożone ze złożeniem w takiej samej kolejności przekształceń do nich odwrotnych jest przesunięciem).

Ustalmy z kolei, jak wygląda składanie izometrii przekształcających daną figurę ograniczoną na siebie. Z poprzednich rozważań wynika, że wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki:
— złożenie dwu symetrii osiowych o osiach przecinających się; w wyniku otrzymamy obrót wokół punktu przecięcia (o jaki kąt?);
— złożenie dwu obrotów o wspólnym środku; w wyniku otrzymamy także obrót wokół tego punknt (o jaki kąt?);
— złożenie obrotu i symetrii osiowej o osi przechodzącej przez środek obrotu; w wyniku otrzymamy oczywiście symetrię osiową (względem jakiej prostej?).

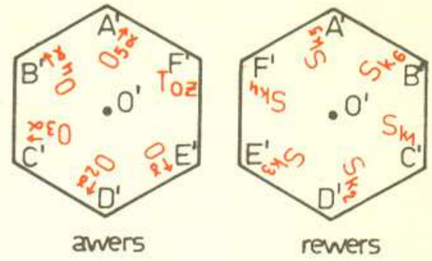
Dla zilustrowania tych zagadnień proponujemy skonstruowanie prostego przyrządu. Potrzebne nam do tego będą: kartka, kawałek tekturki, nożyce, linijka, ołówek. Przyrząd składa się z dwu części. Pierwszą stanowi kartka. Na kartce tej rysujemy figurę, którą będziemy przekształcać, i oznaczamy jej charakterystyczne punkty, środek obrotów i osie symetrii (warto oczywiście wybrać taką figurę, która ma kilka osi symetrii i którą kilka obrotów przekształca na siebie). Narysujmy też obok figury strzałkę, wskazującą na tej figurze dowolne, wybrane przez nas miejsce. Drugą część, ruchomą, będzie stanowiła wycięta z tekturki figura przystająca do narysowanej. Oznaczmy na niej, po obydwu stronach, punkty odpowiadające punktom figury z kartki, oczywiście takimi samymi literami, ale z „primami".

To będzie obraz naszej figury. Przyłóżmy teraz ruchomą część do narysowanej figury w sposób odpowiadający położeniu tożsamościowemu i w miejscu wskazanym przez strzałkę wpiszmy na części ruchomej wyraz „tożsamość". Wykonujmy teraz częścią ruchomą ruchy odpowiadające obrotom i symetriom przekształcającym tę figurę na siebie, za każdym razem startując z położenia tożsamościowego i za każdym razem wpisując, także na części ruchomej, w miejscu wskazanym przez strzałkę, jakie przekształcenie wykonaliśmy. I to już wszystko. Przyrząd jest gotowy. Jeśli teraz, startując z położenia tożsamościowego, wykonamy kolejno kilka przekształceń naszej figury, obracając odpowiednio ruchomą część naszego przyrządu, to w miejscu wskazanym przez strzałkę odczytamy, jakie przekształcenie jest wynikiem złożenia tych przekształceń.

Dla przykładu zamieszczony jest poniżej rysunek takiego przyrządu, w którym wybraną figurą jest sześciokąt foremny.
Oczywiście po wszystkich tych uwagach zadanie, o którym mówiliśmy na początku, każdy sam rozwiąże z łatwością.



część nieruchoma



część ruchoma

Co o izometriach płaszczyzny warto wiedzieć

1° Każdą izometrię płaszczyzny można przedstawić jako złożenie jednej, dwu lub trzech symetrii osiowych.
2° Złożenie dwu symetrii osiowych jest obrotem lub przesunięciem (kiedy, czym?).
3° Złożenie trzech symetrii osiowych jest symetrią osiową wtedy i tylko wtedy, gdy osie symetrii są współpękowe, to znaczy przechodzą przez jeden punkt, lub są parami równoległe.
4° Złożenie trzech symetrii osiowych jest symetrią z poślizgiem, czyli złożeniem symetrii osiowej i przesunięcia o wektor równoległy do osi symetrii (warto sobie przypomnieć dowód tego faktu). Jeśli osie symetrii nie są współpękowe, to wektor poślizgu jest niezerowy.
5° Zbiór izometrii przekształcających daną figurę na siebie z działaniem składania tworzy grupę przekształceń.
6° Gdy symetrię z poślizgiem złożymy ze sobą, otrzymamy przesunięcie o wektor równy podwojonemu wektorowi poślizgu.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

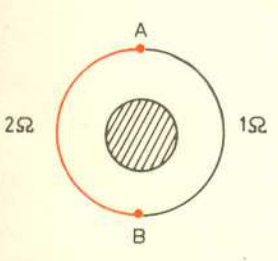
M58. Udowodnić, że jeżeli każda przekątna czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach, to jest on równoległobokiem. (W. Mnich)
Rozwiązanie na str. 5.

M59. W turnieju szachowym, w którym każdy zawodnik grał z każdym dokładnie jeden raz, uczestniczy n zawodników ($n > 1$). Udowodnić, że w każdym momencie są co najmniej dwaj zawodnicy, którzy rozegrali tę samą liczbę partii. (W. Mnich)
Rozwiązanie na str. 12.

M60. Udowodnić, że w kole o promieniu 1 nie można wybrać więcej niż 5 punktów takich, że odległość między dowolnymi dwoma spośród nich jest większa od 1. (W. Mnich)
Rozwiązanie na str. 15.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F20. Dany jest pręt żelazny w kształcie nieskończenie długiego prostoliniowego walca o przekroju kołowym Pręt ten jest magnesowany podłużnie w ten sposób, że przenikający go strumień magnetvczny narasta jednostajnie w czasie o 3 webery na sekundę. W płaszczyźnie prostopadłej do osi walca umieszczono wokół niego obwód kołowy złożony z dwu drutów o oporach odpowiednio 1 Ω i 2 Ω. Jakie będą wskazania woltomierza o bardzo dużym oporze, podłączonego do punktów A i B (patrz rysunek) leżących na złączach drutów? (Nadesłał J. P.).
Rozwiązanie na str. 13.



Rysunek układu w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca