

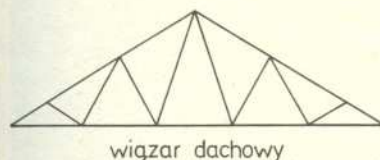
# Budujemy mosty —

## — ROZSTRZYGNĘCIE KONKURSU

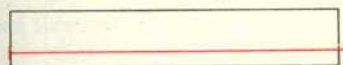
mgr inż. Andrzej NIEMIERKO



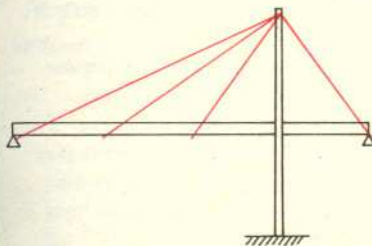
Praca nr 5



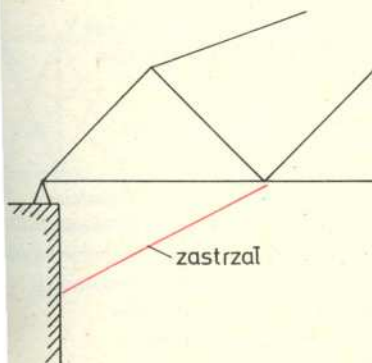
wiązar dachowy



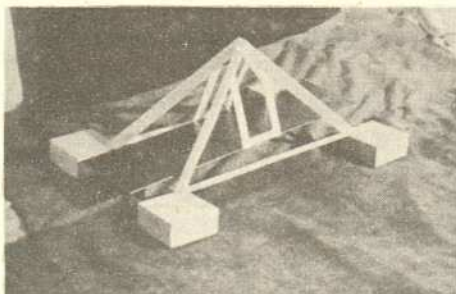
belka sprężona kablem



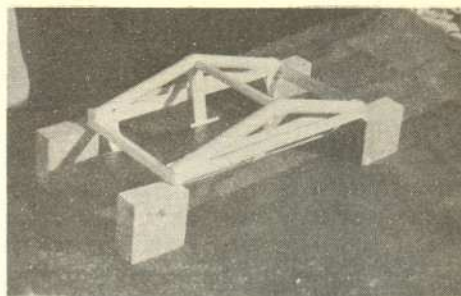
konstrukcja cięgnowa (most podwieszony)



zastrzał



Praca nr 9



Praca nr 3

„Najprostsze formy konstrukcyjne bierzemy wprost z natury”  
Z. Wasiutyński

Celem konkursu pod hasłem „Budujemy mosty” ogłoszonego w 12 numerze „Delfy” z 1975 r. było zbudowanie najbardziej racjonalnej konstrukcji mostowej z kartonu. Najbardziej racjonalnej — to znaczy takiej, która zdolna byłaby przenieść na cztery podpory mostu największe w stosunku do własnego ciężaru konstrukcji obciążenie zewnętrzne. Zadanie to należy do zadań optymalizacji konstrukcji inżynierskich.

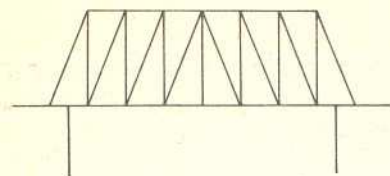
Na ogół zadania optymalizacji konstrukcji polegają na poszukiwaniu takiej konfiguracji geometrycznej jej elementów i takich ich przekrojów poprzecznych, przy których osiągnięta jest jakaś największa korzyść. Korzyścią tą w naszym przypadku był najmniejszy ciężar konstrukcji. Wybór racjonalnych kształtów konstrukcji, choć jest zagadnieniem obecnie bardzo ważnym i popularnym, ma swoją długą historię. Prześledźmy to na przykładzie kratownic mostowych, albowiem przeszły one najbardziej widoczną ewolucję. Kształty więzarów dachowych ze względu na nieduże obciążenia w nich występujące nie odgrywają tu takiej roli. Myśl zastąpienia pełnych belek zginanych przez belki o konstrukcji kratowej powstała dość dawno. Było to tym podyktowane, iż belki o pełnym przekroju i dużej wysokości przestały być ekonomiczne, bowiem materiał zgromadzony wokół osi obojętnej brał mały udział w przenoszeniu obciążeń.

W kratownicach obciążenie zewnętrzne przenoszone jest przez elementy rozciągane i ściskane. W ten sposób materiał zostaje ekonomicznie wykorzystany. Z tym, iż jest on lepiej wykorzystany w prętach rozciąganych, niż w ściskanych, gdzie przekroje muszą być zwiększone ze względu na możliwość wybożenia. Kratownice przeżywały swój rozkwit jeszcze przed zastosowaniem i opracowaniem w skali inżynierskiej konstrukcji sprężonych i cięgnowych. Wszędzie tam, gdzie zależało na pokonaniu dużych rozpiętości (a więc przede wszystkim w budownictwie mostowym), stosowano kratownice. Ze względu na kształt skratowania odróżniamy następujące rodzaje kratownic: dwukrotne, wielokrotne, o układzie półkrzyżulcowym, siatkowym, trójkątnym, zastrzałowym, z drugorzędym podwieszeniem. Pasy górny i dolny mogą mieć kształt prosty lub zakrzywiony.

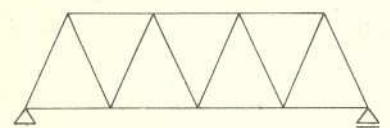
Konstrukcje typu kratownicowego znajdują też szerokie zastosowanie jako konstrukcje przekryć dachowych (wiązary), suwnic, masztów, wież, dźwigarów i wszędzie tam, gdzie zależy nam na ograniczeniu ciężaru konstrukcji. Mimo gwałtownego rozwoju konstrukcji z betonu zbrojonego i sprężonego, kratownice są w dalszym ciągu stosowane. W wielu przypadkach jako konstrukcje drugorzędne. Współczesne kratownice są dziełem statyki budowli, gdyż wraz z jej rozwojem postępował rozwój kształtów układów kratownic.

Pierwsze kratownice były budowane z drewna. Stosowano układy zastrzałowe i trójkątne. W latach 1830–40 powstały w Stanach Zjednoczonych drewniane mosty kratownicowe budowane przez D. H. Longa. Były to konstrukcje o polach prostokątnych, z których każde zawierało po dwa krzyżulce. Long nie tylko nie obliczał sił w prętach, ale nawet nie odróżniał prętów ściskanych od rozciąganych. W celu wzmocnienia tych układów Long stosował zastrzały. Zastrzały te dawano w miejscach, gdzie materiał kratownicy ulegał zniszczeniu. Doświadczenie Longa wskazało, że konstrukcje kratownicowe są ustrojami, których elementy muszą być wzajemnie dobrane wytrzymałościowo i które nie znoszą wprowadzania ogniów dodatkowych — obcych układowi ich elementów. Wraz z zastosowaniem żeliwa i stali rozwój statyki kratownic i ewolucja ich kształtów nabiera żywszego tempa. Początkowo stalowe konstrukcje kratownicowe powstawały drogą naturalnego przejścia od konstrukcji drewnianych. Rozwój wiedzy inżynierskiej prowadził do stopniowych zmian w układzie geometrycznym kratownic. Zmiany te dyktowane były dążeniem do uproszczenia montażu i wykonawstwa oraz oszczędności materiału. Pierwotne konstrukcje były ciężkie i mało estetyczne.

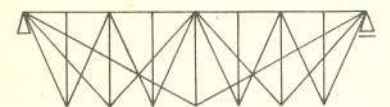




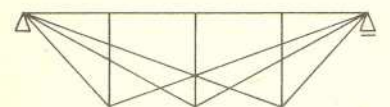
kratownica Howe'a



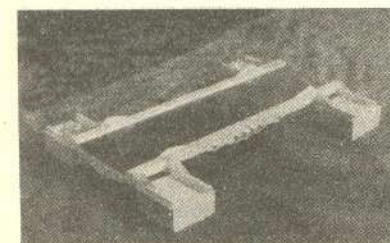
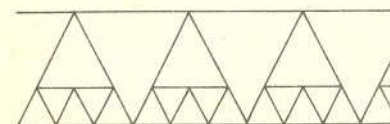
kratownica Warrena



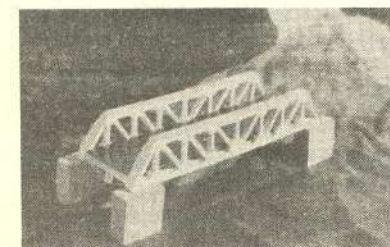
kratownica Finka



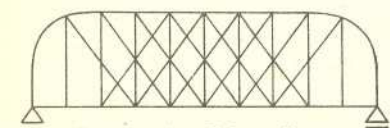
kratownica Bollmanna



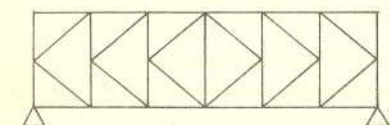
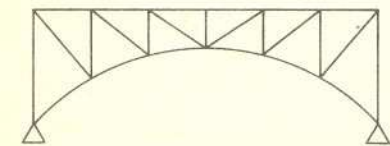
Praca nr 14



Praca nr 14

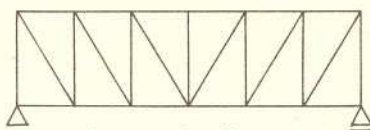


kratownica Schwedlera

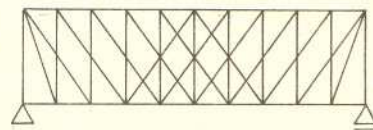


krata typu K

Pierwsze konstrukcje stalowych mostów amerykańskich wzorowane były na drewnianych kratownicach Howe'a. W kratownicy tej krzyżulce są ściskane, a słupki rozciągane. Bardziej racjonalnymi ustrojami były kratownice Warrena i Pratta. Z kolei zaczęto stosować formy bardziej złożone, jak np. kratownice Linville'a, które powstały drogą nałożenia na siebie dwóch kratownic Pratta.



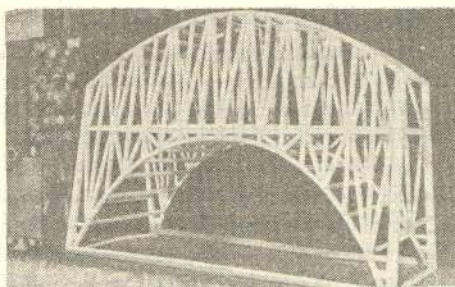
kratownica Pratta



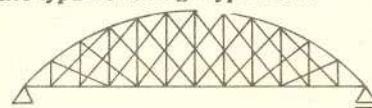
kratownica Linville'a

W tym czasie stosowano także ustroje typu Finka i Bollmanna, w których materiał był słabo wykorzystany, ale za to konstrukcje te charakteryzowały się prostotą wykonawstwa i możliwością regulacji sił w prętach. Konstrukcje tego typu nie nadają się jednak do mostów większych rozpiętości. Kratownice Finka i Bollmanna są przykładem mimowolnych prób optymalizacji. Są one jednak konstrukcjami nieudanymi z punktu widzenia estetyki, gdyż układ skratowania upodabnia konstrukcję do rusztowania, a także sprawia wrażenie braku solidności. Wraz ze zwiększeniem rozpiętości kratownicom nadawano bardziej złożoną postać. Kratownice złożone są kratownicami pochodnymi kratownic Warrena i Pratta. Zaletami tych konstrukcji była szybkość montażu oraz lekkość. Do wad zaliczyć można brak możliwości regulowania sił w prętach.

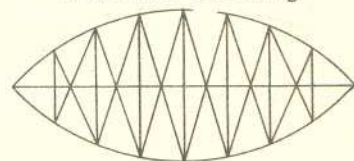
Uwzględnienie rozkładu momentów zginających doprowadziło do konstrukcji o pasach w kształcie parabolicznym. W ten sposób powstały kratownice typu Bowstring i typu Pauli.



Praca nr 11



kratownica Bowstring



kratownica Pauli

W roku 1853 A. J. Morin pierwszy zwrócił uwagę na fakt, że materiał w prętach kratownic jest równomiernie naprężony. Stwierdził on, że wyższość kratownic nad innymi ustrojami polega na tym, że pręty doznając jednakowych wydłużeń lub skróceń są jednakowo naprężone. Ale już parę lat wcześniej J. Séguin budował poprzecznicę stalowe mostów wiązanych jako kratownice zbieżne, dobierając tak krzywiznę obu pasów o stalych przekrojach, aby uzyskać w nich jednakowe wartości naprężeń skrajnych. Tę samą cechę równej wytrzymałości pasów o stalych przekrojach nadał właśnie swej pierwszej kratownicy Pauli.

K. Culmann (1866) przyjął za regułę kształtowanie kratownic na równą wytrzymałość prętów ściskanych i rozciąganych, zastrzegając, że pręty ściskane muszą być dostatecznie sztywne. W następnej kolejności powstały kratownice typu Schwedlera.

Kratownice Schwedlera miały kształt pasów dostosowany do zadania, aby siły poprzeczne przy dowolnym położeniu obciążenia ruchomego zachowywały stały znak. Ustalono w ten sposób pewną zaletę konstrukcji, ale nie tylko ona stanowi o wartości ustroju, który prócz tego może mieć wiele wad.

Kratownice o pasach parabolicznych dawały znaczne efekty ekonomiczne w postaci lepszego wykorzystania materiału, ale sprawiały wiele trudności wykonawczych.

Bardzo ekonomiczne okazały się mosty półparaboliczne typu holenderskiego. Poprawne wykorzystanie materiału osiągnięto w konstrukcjach kratowych łukowych.

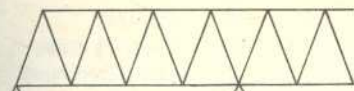
Znacznym ulepszeniem kształtu ustrojów kratowych było wprowadzenie kraty typu K lub V, pozwalające na zmniejszenie długości wybojeniowej krzyżulców. Są to konstrukcje typu półkrzyżulcowego lub siatkowego.

Układy o pasach parabolicznych nie są obecnie stosowane ze względu na kłopotliwe wykonawstwo, nie równoważące oszczędności materiałowych.

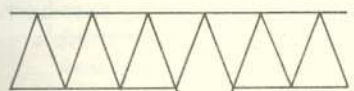
W Rosji dźwigary kratowe z lamany pasem stosowano do rozpiętości 130 m.

Konstrukcje kratowe wielodźwigarowe lub wspornikowe, stosowane przy dużych rozpiętościach mają mniejszy ciężar od odpowiednich konstrukcji swobodnie podpartych. Badania wykazały, że przez zastąpienie trzech swobodnie podpartych przęseł kratowych, konstrukcją trójprzęsłową ciąglą uzyskujemy średnio 20% oszczędności materiału przy długości 180 m i 10% oszczędności przy długości 90 m. Wadami tych ustrojów są: wrażliwość na zmiany temperatury oraz nierównomierne osiadanie podpór. Do zalet można zaliczyć także możliwość montażu wspornikowego.

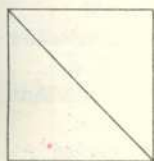




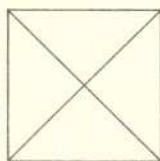
montaż wspornikowy kratownicy ciągłej



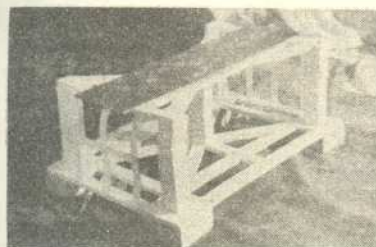
kratownica Wicherta



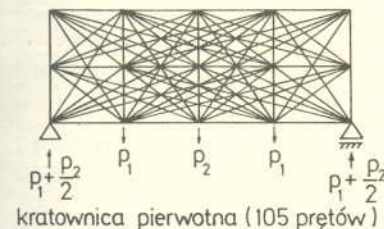
układ statycznie wyznaczalny



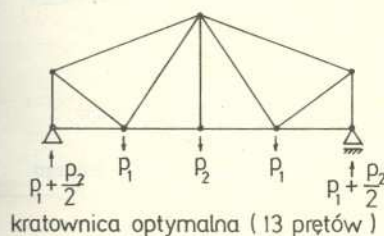
układ statycznie niewyznaczalny



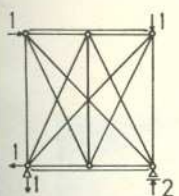
Praca nr 16



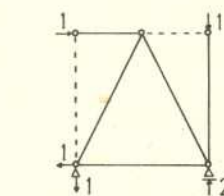
kratownica pierwotna (105 prętów)



kratownica optymalna (13 prętów)



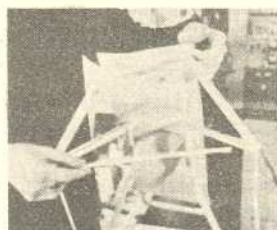
kratownica pierwotna (15 prętów)



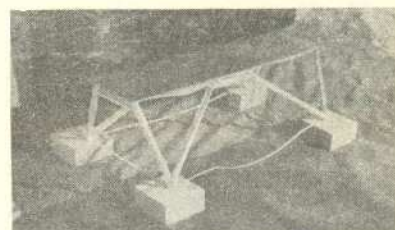
kratownica optymalna (5 prętów + 2 o dowolnie małych przekrojach - niezbędne ze względu na zachowanie geometrycznej niezmienności kratownicy)

W Europie pierwsze konstrukcje typu wielodźwigarowego powstały około 1850 roku, a w Stanach Zjednoczonych dopiero w 1917 (Sciotoville Bridge). Najczęściej stosowano konstrukcje trójprzęsłowe. Długość przęseł środkowych stanowi przeciętnie 10-30% długości przęseł skrajnych.

W Stanach Zjednoczonych rozpowszechnione były ustroje kratowe wieloprzęsłowe typu Wicherta. Ustroje te charakteryzowały się statyczną wyznaczalnością, możliwością regulacji momentów przęsłowych, mniejszymi ugięciami od kratownic wspornikowych oraz większą ekonomią w stosunku do kratownic swobodnie podpartych. Największym mostem wspornikowym jest most na rzece św. Wawrzyńca w Quebec (Kanada). Rozpiętość środkowego przęsła wynosi 521,40 m. Z przedstawionego tu przeglądu wynikać by mogło, że konstruktorzy mostów w swej działalności kierowali się głównie doświadczeniem swych poprzedników i własną intuicją inżynierską. Tak jednak nie było. Zagadnienia optymalizacji kratownic są jednymi z najstarszych w dziedzinie optymalizacji konstrukcji inżynierskich. Pierwsze rozważania teoretyczne na ten temat pojawiły się w latach 60-tych ubiegłego stulecia. Były to prace Maxwella, Léry'ego, a następnie Michella. Maxwell i Michell udowodnili twierdzenie, że kratownicą gromadzącą minimum materiału przy danym obciążeniu jest konstrukcja, której materiał jest jednakowo wyężony. Natomiast Léry sformułował twierdzenie o niemożności wyrównania odkształceń jednostkowych we wszystkich prętach układu statycznie niewyznaczalnego.



Praca nr 13 Wyrwanie pręta z zamocowania

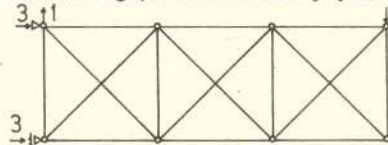


W Polsce zagadnieniami tymi zajmował się Z. Wasiułyński z grupą współpracowników. Z. Wasiułyński rozpatrując elementarne pola złożonych układów kratowych sformułował kilka twierdzeń bardzo istotnych dla dalszego rozwoju tej dziedziny optymalizacji. Można by tu wymienić twierdzenia o celowości wprowadzania nowych prętów i nowych węzłów do pola trójkątnego kratownicy oraz o zbieżności optymalizacji na minimum potencjału sprężystości z optymalizacją na wyrównanie odkształceń jednostkowych w jednym stanie obciążenia. Na początku lat 60-tych wraz z rozwojem techniki obliczeniowej nastąpił wzrost zainteresowania zastosowaniem metod numerycznych optymalizacji do tych zagadnień. Większość prac wykorzystuje w tym celu technikę programowania matematycznego. Przedmiotem programowania matematycznego są metody poszukiwania ekstremów warunkowych funkcji celu. Programowanie matematyczne wymaga sformułowania pewnego modelu matematycznego zagadnienia optymalizacji. Model matematyczny powinien zawierać następujące elementy: parametry optymalizacji, warunki ograniczające, oraz funkcję celu (kryterium). Zadania optymalizacji kratownic formułujemy na ogół następująco: Dany jest zbiór stanów obciążenia oraz zbiór warunków brzegowych. Należy znaleźć taki układ prętów i takie ich przekroje, aby kratownica bezpiecznie przeniosła zadane obciążenia, spełniła warunki brzegowe, a jednocześnie zekstremalizowała kryterium, względem którego oceniamy konstrukcję. Kryterium tym mogą być: minimum objętości lub ciężaru, największa sztywność, minimum energii potencjalnej sprężystości i inne.

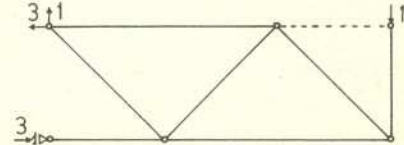
Różnie można obierać parametry optymalizacji. W ich wyborze istnieje pewna dowolność. Jednak nie wszystkie parametry są tej samej wagi, dlatego też można przedstawić je w pewnej hierarchii:

- 1) wartość pól przekrojów prętów,
- 2) własności materiałowe,
- 3) konfiguracja geometryczna,
- 4) rodzaj konstrukcji.

Istnieje szereg algorytmów rozwiązywania tych zagadnień. Na rysunkach przedstawiono przykładowo konstrukcje pierwotne i konstrukcje otrzymane w wyniku optymalizacji metodą programowania liniowego, która nosi nazwę Sympleks.

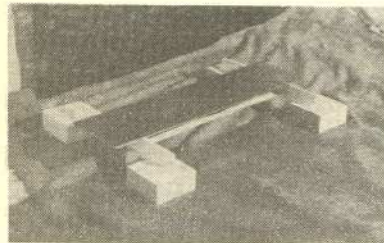


kratownica pierwotna (16 prętów)

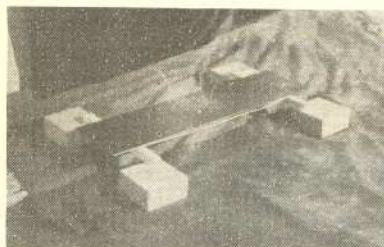


kratownica optymalna (7+1 prętów)

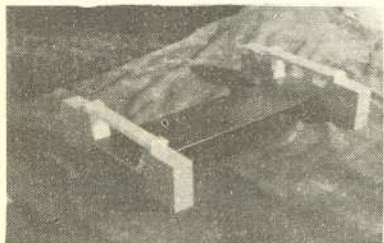




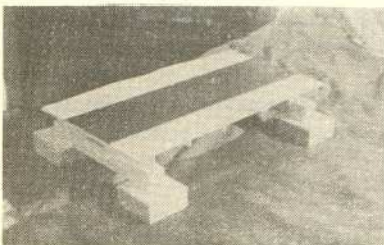
Praca nr 8 — utrata stateczności belki poprzecznej



Praca nr 10 — utrata stateczności belki poprzecznej



Praca nr 17 — wygięcie harmonijki



Praca nr 7 — zgnieciecie belek

Po tym trochę przydługim wprowadzeniu przejdźmy do omówienia wyników konkursu. Spośród prac nadesłanych na konkurs można wyróżnić trzy grupy konstrukcji. Pierwszą grupę stanowiły konstrukcje typu prętowego — kratownice, drugą konstrukcje typu płyty uźebrowanej i trzecią typu belkowego. Autorzy konstrukcji trzeciej grupy wykorzystali najlepiej warunki konkursu, w których przewidziano płytę pomostu w postaci płytki stalowej 15 × 60 cm i grubości 2 mm. W tym przypadku płytka ta mogła stanowić oddzielną konstrukcję nośną i na pewno bardziej wytrzymała od jakiegokolwiek konstrukcji z kartonu. A zatem zadanie można było sprowadzić do jak najracjonalniejszego przeniesienia obciążenia z płytki stalowej na podpory. W tym celu należało zbudować możliwie najszywniejsze belki poprzeczne łączące pary podpór leżących najbliżej siebie. Na konkurs wpłynęły trzy prace wykorzystujące tę ideę. I wszystkie trzy zajęły trzy pierwsze miejsca (W. Sapieżyński — I, T. Kasperski — II i Z. Kałowski — III). Inna sprawa, że konstrukcje te same w sobie nie stanowią jeszcze mostu, ale w połączeniu z płytą stalową, która miała zastępować pomost (a była w rzeczywistości i konstrukcją nośną), stanowiły już pewien rodzaj mostów typu belkowo-płytyowego.

Z konstrukcji „bardziej” mostowych najlepsze rozwiązanie przedstawił K. Wąsowicz (IV miejsce). Jego konstrukcja prętowa o przekrojach rurowych prętów ściskanych przeniosła obciążenie 57,490 kG. Trzeba przyznać, że wynik ten przeszedł najśmielsze oczekiwania członków komisji. Niewiele mu ustąpiła konstrukcja P. Janyszka z Olsztyna (54,360 kG — V miejsce). Zniszczenie większości konstrukcji nastąpiło przez utratę stateczności elementów ściskanych bądź zginanych, bądź przez zniszczenie połączeń. Ze względu na znaczną wytrzymałość kartonu na rozciąganie żaden z mostów nie doznał zniszczenia przez przekroczenie wartości naprężeń rozciągających. W konstrukcjach prętowych załamanie się następowało nagle, podczas gdy konstrukcje płytowe uźebrowane wykazywały dość znaczne przemieszczenia i odkształcenia przed ich całkowitym załamaniem.

Z 17 nadesłanych na konkurs prac jedna nadeszła w stanie całkowitego zniszczenia, zaś trzy mosty, choć wykonane z dużym nakładem pracy nie spełniły warunków konkursu.

#### Wyniki konkursu

Jury konkursu „Budujemy mosty” w składzie:

- doc. dr T. Hofmokr — zastępca red. nac. „Delfty”,
- dr J. A. Gaj z Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW,
- mgr inż. A. Niemierko z Instytutu Badawczego Dróg i Mostów

postanowiło dokonać następującego rozdziału nagród:

- I miejsce — W. Sapieżyński z Warszawy —  
— domowa spawarka elektryczna TD — 101V2,
- II miejsce — Tomasz Kasperski z Gdyni —  
— miniobrabiarka K-1V4,
- III miejsce — Zenon Kałowski z Rabki —  
— lutownica 60 W,
- IV miejsce — Krzysztof Wąsowicz z Warszawy —  
— lutownica 60 W,
- V miejsce — Paweł Janyszek z Olsztyna —  
— lutownica 60 W.

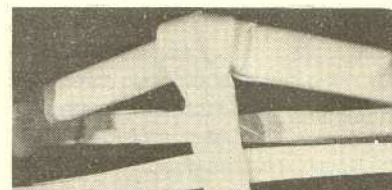
Ponadto Instytut Badawczy Dróg i Mostów z Warszawy postanowił przyznać wyróżnienia specjalne:

- Krzysztofowi Wąsowiczowi z Warszawy — za konstrukcję mostu, który przeniósł największe bezwzględnie obciążenie;
- Andrzejowi Poczobutowi z Białegostoku — za wyjątkowo estetyczną i pracochłonną konstrukcję mostu, mimo, iż nie został on sklasyfikowany.

Wyróżnienie to polega na sfinansowaniu wycieczki do Kielc, gdzie mieści się laboratorium badań konstrukcji mostowych Instytutu oraz jeden z największych w Polsce zakładów produkujących żelbetowe i sprężone konstrukcje mostowe oraz na udziale w badaniach jednego z mostów w Warszawie lub okolicy.



Praca nr 9 — zniszczenie węzła górnego



Praca nr 3 — wyboczenie pręta rurowego przy węźle



Lista prac nadesłanych na konkurs „BUDUJEMY MOSTY”

Lp.	Autor	Miejscowość	Ciężar konstrukcji P (G)	Obciążenie niszczące N (G)	N/P	Forma zniszczenia	Miejsce	Uwagi
1	Leszek Wierzowiecki	Warszawa	125	13 820	110.56	odklejenie się żeberek oraz utrata stateczności płyty	XI	
2	Ryszard Baryliński	Zarzecze woj. tarnobrzeskie	193	26 820	138.96	odklejenie się żeberek usztywniających płytę i utrata stateczności płyty	IX	
3	Krzysztof Wąsowicz	Warszawa	117	57 490	491.37	wyoboczenie pręta rurowego przy węźle	IV	
4	Adam Wilk	Łódź						nie spełnił warunków konkursu odnośnie klejenia
5	Paweł Janyszek	Olsztyn	148	54 360	367.30	utrata stateczności belek poprzecznych w przekrojach podporowych	V	
6	Piotr Waśniowski	Kraków	115	34 670	301.48	załamanie się płyty przy podporach	VI	
7	Tadeusz Krysiak	Sochaczew	218	46 950	215.37	zgniecenie belek poprzecznych przy połączeniach z belkami podłużnymi	VIII	
8	W. Sapieżyński	Warszawa	21	21 740	1035.24	utrata stateczności w przekroju podporowym	I	
9	Andrzej Wesolowski	Gorzów Wielkp.	50	14 860	297.20	zniszczenie węzła górnego i zerwanie ściągu	VII	
10	Tomasz Kasperski	Gdynia	20	17 340	867.00	utrata stateczności w przekroju podporowym	II	
11	Andrzej Poczobut	Białystok						nie spełnił warunków konkursu odnośnie klejenia
12	Leszek Pyć	Stalowa Wola	87	10 330	118.74	utrata stateczności belek poprzecznych	X	
13	Paweł Owczarek i Edward Florczak	Łódź	45	3 160	70.22	wyoboczenie słupka podporowego i zerwanie ściągu	XII	
14	Wiesław Micał	Bartoszyce						nie spełnił warunków konkursu odnośnie szerokości (za wąski)
15	Mieczysław Bejnar	Olsztyn						zniszczony w czasie przesyłki
16	Tomasz Giesko	Świdwin	318	17 010	53.49		XIII	częściowo uszkodzony w czasie przesyłki
17	Zenon Kałowski	Rabka Zdrój	22	12 790	581.36	utrata stateczności poprzeczniczy w postaci harmonijki	III	



## Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

**M 94.** Udowodnić, że jeżeli suma liczb rzeczywistych  $a, b, c$  równa jest 1, to  $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$

Rozwiązanie na str. 10

**M 95.** Udowodnić, że jeżeli  $n$  jest liczbą naturalną większą od 2, to liczba  $n(n+1)(n+2) \dots (3n-4)(3n-3)$  jest podzielna przez kwadrat każdej liczby naturalnej nie większej od  $n$ .

Rozwiązanie na str. 12

**M 96.** Dany jest trapez  $ABCD$  o bokach  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$  i wysokości

$h = \frac{1}{2}(a+c-b-d)$ . Udowodnić, że dwa okręgi, z których jeden jest styczny do  $AB, CD$  i  $DA$ ,

drugi zaś do  $AB, BC$  i  $CD$ , są styczne zewnętrznie.

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

**F 32.** Obliczyć, jakiego odkształcenia doznaje drut o długości  $l = 1$  m na skutek własnego ciężaru, kiedy zawiesimy go swobodnie za koniec. Prędkość rozchodzenia się dźwięku wzdłuż tego drutu,  $v$ , wynosi 1000 m/s.

Rozwiązanie na str. 9