Środki ciężkości, średnie, mediany

Dr Tadeusz B. IWIŃSKI

Pojęcie środka masy (tradycyjnie zwanego środkiem ciężkości) jest tak intuicyjne i jednoznaczne, że dość trudno wyobrazić sobie celowość wprowadzenia tu jakichkolwiek komplikacji.
Postaramy się właśnie to zrobić.
Rozważmy na początek

Dwa zadania

1. Na osi liczbowej dane są punkty $x_1, \ldots, x_n$. W każdym z nich umieszczono masę jednostkową $m = 1$. Znaleźć środek ciężkości x_0.
2. Na osi liczbowej dany jest (skończony) zbiór punktów $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wyznaczyć na osi punkt x_0' tak, by suma kwadratów odległości x_0' od punktów zbioru X była możliwie najmniejsza.

Porównaj artykuł R. Zielińskiego o metodzie najmniejszych kwadratów.

Zadania te są równoważne: $x_0 = x_0'$. Rzeczywiście, rozwiązanie zadania **1** polega na wyznaczeniu punktu x_0 takiego, by suma momentów względem x_0 mas umieszczonych w punktach x_i była równa zeru, tj. by zachodziła równość

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_0) = 0, \quad \text{czyli}$$

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0) = 0.$$

Zadanie drugie sprowadza się do znalezienia minimum trójmianu kwadratowego

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 \qquad (x_i \text{ — liczby, } x \text{ — zmienna!}).$$

Zadanie można oczywiście rozwiązać elementarnie: współczynnik przy x^2 wynosi n, współczynnik przy x wynosi $2\sum_i x_i$, a więc minimum osiągane jest w punkcie $x_0' = (2\sum_i x_i)/2n = \frac{1}{n}\sum_i x_i$.

Trójmian ten ma jedno minimum — jest to punkt, w którym jego pochodna względem x

$$s'(x) = 2\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)$$

przyjmuje wartość zero, a więc punkt x_0' spełniający warunek

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0') = 0.$$

Warunki (*) i (**) są identyczne, co dowodzi równoważności zadań **1** i **2**. Przy tym oczywiście

$$x_0 = x_0' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

a więc rozwiązaniem każdego z tych zadań jest średnia arytmetyczna liczb $x_1, \ldots, x_n$.
Okazało się więc, że w rozważanym przypadku pojęcie środka ciężkości pokrywa się z pojęciem średniej (arytmetycznej), przy czym każde z tych pojęć można zdefiniować jako minimum pewnej funkcji.

W przestrzeni kartezjańskiej wielowymiarowej

sytuacja jest analogiczna. Można tu sformułować odpowiedniki zadań **1** i **2**. Nietrudno udowodnić, że zadania te są równoważne (warto to zrobić). Wspólne rozwiązanie tych zadań można — przez analogię z przypadkiem 1-wymiarowym — nazwać średnią punktów $x_1, \ldots, x_n$. Średnia jest więc z definicji tym samym, co środek ciężkości i jest rozwiązaniem następującego problemu:
Dany jest zbiór $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wyznaczyć punkt x_0 taki, by suma kwadratów odległości x_0 od punktów zbioru X była możliwie najmniejsza.

W przestrzeni l-wymiarowej przyjmujemy $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^l)$. W zadaniu 1 otrzymujemy warunek formalnie identyczny z (*), będący układem l równań określających niezależne l współrzędnych punktu x_0, a w zadaniu 2 otrzymujemy sumę l trójmianów kwadratowych postaci $\sum (x_i^j - x^j)^2$, które minimalizujemy niezależnie.

W statystyce występuje inne jeszcze ważne pojęcie, będące — intuicyjnie — swego rodzaju „środkiem ciężkości". Jest to

Mediana.

Nie będziemy tu podawać ogólnej definicji tego pojęcia. W sytuacji z zadań **1** i **2** medianą będzie każdy taki spośród punktów x_i, że ilość punktów leżących na prawo od niego możliwie mało różni się od ilości punktów leżących na lewo od niego. Wyznaczenie median jest w tym przypadku proste: jeśli n jest nieparzyste, to medianą jest jeden („środkowy") punkt x_i, jeśli zaś n jest parzyste, to medianami są dwa „środkowe" punkty.
Zastanówmy się teraz nad możliwością uogólnienia pojęcia mediany na przypadek wielowymiarowy. Bezpośrednie przeniesienie definicji nie jest tu oczywiście możliwe, bowiem już na płaszczyźnie pojęcia „prawo" i „lewo" tracą sens. Można jednak spróbować drogi analogicznej, jak w przypadku uogólnienia pojęcia średniej: sformułować problem znalezienia mediany jako problem wyznaczenia minimum pewnej funkcji w taki sposób, by to drugie sformułowanie przenosiło się już na przypadek wielowymiarowy.

Okazuje się, że jest to możliwe. Rozważmy bowiem na osi liczbowej ciąg różnych punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz dowolny punkt x i utwórzmy wyrażenie

$$d(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x|.$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $d(x)$ jest ciągła oraz jest malejąca, gdy x jest mniejszy od większości x_i (bo wtedy współczynnik przy x jest ujemny), i rosnąca, gdy x jest większy od większości x_i. A to właśnie oznacza, że minimum funkcji $d(x)$ osiągane jest w tych punktach x_i, które są medianami. Jeśli jeszcze weźmiemy pod uwagę fakt, że $|x_i - x|$ jest odległością punktów x oraz x_i, to stwierdzimy, że mediana jest rozwiązaniem następującego problemu:

Dany jest zbiór $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wyznaczyć punkt x_i taki, by suma odległości punktu x_i od punktów zbioru X była możliwie najmniejsza.
A to sformułowanie przenosi się już na dowolną przestrzeń wielowymiarową, może więc służyć jako definicja mediany w takiej przestrzeni.
Ale na tym możliwości uogólnień wcale się nie kończą. Zauważmy, że zarówno w wielowymiarowym problemie średniej, jak i wielowymiarowym problemie mediany, operuje się pojęciami zbioru, punktu i odległości. Łatwo więc widać, że oba problemy można sformułować w dowolnej

Por. artykuły M. Moszyńskiej w Delcie: 1/1975, 5/1975 i 8/1975.

Przestrzeni metrycznej

i — o ile problemy te mają rozwiązania — otrzymywać bardzo już odbiegające od intuicji „środki ciężkości": średnie i mediany.
Można jednak posunąć się jeszcze dalej. Zauważmy mianowicie, że zarówno występująca w problemie średniej suma kwadratów odległości, jak i występująca w problemie mediany suma odległości są pewnego rodzaju miarami rozproszenia zbioru X wokół punktu x.
Są to funkcje bardzo specjalnej postaci. Można by pokusić się o określenie innych jeszcze miar rozproszenia i poszukiwanie ich minimów. Minima takie byłyby też swojego rodzaju „środkami ciężkości". Jak więc widać, można drogą kolejnych uogólnień sformułować następujący

Problem środka ciężkości:

O $r_X(x)$ zakładamy, że wyraża się przez odległości punktu x od elementów zbioru X

W przestrzeni metrycznej (A, ϱ) dany jest skończony zbiór X oraz miara rozproszenia $r_X(x)$, $x \in A$. Wyznaczyć minimum funkcji r_X.

Rozwiązanie takiego problemu — o ile istnieje — nazwiemy środkiem ciężkości zbioru X w przestrzeni (A, ϱ) względem miary rozproszenia r_X.
Tak rozumiane pojęcie środka ciężkości jest nie tylko bezpośrednim uogólnieniem pojęć, od których startowaliśmy. Powstaje ono również w naturalny sposób w zastosowaniach matematyki w naukach społecznych. Ale o tym kiedy indziej.
Problem: czy można podać na prostej taką metrykę i taką miarę rozproszenia, by rozwiązaniem problemu środka ciężkości była (a) średnia geometryczna, (b) średnia harmoniczna? (Autor nie zna rozwiązania.)
Zadanie 1. Wyznaczyć średnie i mediany zbioru X złożonego z punktów (0, 0), (1, 0), (0, 1) i (2, 3) na płaszczyźnie z metrykami: kartezjańską, miejską, kolejową (por. Delta 1/1975).
Zadanie 2. Zbadać problem środka ciężkości na prostej ze zwykłą metryką i miarą rozproszenia postaci

$$r_X(x) = \sum_{i=1}^{n} [\varrho(x, x_i)]^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Kącik filatelistyczny (5)

Johannes Kepler (1571—1630), niemiecki astronom i matematyk, sformułował prawa ruchu planet znane do dziś jako trzy prawa Keplera. Prawa te miały zasadnicze znaczenie dla zrozumienia ruchu ciał przyciągających się siłami grawitacyjnymi i zostały uzasadnione przez Newtona. Skonstruował także lunetę astronomiczną, odmienną od lunety Galileusza. Reprodukujemy znaczek wydany przez Republikę Dahomeju w roku 1971, na którym obok portretu uczonego przedstawione są symboliczne orbity planet. Znaczki poświęcone Keplerowi wydano także w Austrii (w roku 1953), Meksyku (1971), NRD (1971), RFN (1971), i Rumunii (1971).

Jerzy BARTKE