Problem Köthe

Pierścień (niekoniecznie przemienny) to taki układ składający się ze zbioru A i dwóch działań $+$ i $\cdot$ w nim określonych, że spełnione są dla dowolnych elementów a, b, c z A warunki

1) $a+b = b+a$
2.) $(a+b)+c = a+(b+c)$
3.) istnieje d takie, że $a+d = b$
4.) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$
5.) $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$
6.) $(b+c)\cdot a = b\cdot a+c\cdot a$

W ubiegłym roku obchodził jubileusz pięćdziesięciolecia tzw. *problem Köthe* z algebry nieprzemiennej. W tej dyscyplinie matematycznej badamy pierścienie, tj. systemy algebraiczne, w których elementy można ,,dodawać" i ,,mnożyć", przy czym działanie przyjęte za mnożenie ma być łączne i rozdzielne względem dodawania. Nie musi być za to przemienne. Tak ogólne ,,mnożenie" może mieć z pozoru dziwne własności. Jeżeli na przykład wielomiany będziemy dodawać w zwyczajny sposób, a mnożyć tak

$$(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)\cdot(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0) = (a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0,$$

to od razu obliczymy, że $x^2 = 0$, choć sam wielomian x nie jest zerowy. Elementy, których pewna potęga jest zerem, nazywają się nilpotentnymi. Występują one często w pierścieniach skończonych, na przykład ,,modulo 12" mamy $6^2 = 12$ czyli 0.

Jednym z podstawowych i najbardziej naturalnych pierścieni w algebrze jest pierścień macierzy (wystarczy nam rozpatrywać macierze 2×2). Macierze mnoży się tak

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

Problem Köthe sprowadza się do następującego niewinnie wyglądającego pytania: *Przypuśćmy, że każdy element pierścienia A jest nilpotentny. Czy pierścień macierzy* 2×2 *o elementach z A też ma tę własność*?

Z pozoru nic trudnego. Co najwyżej będą długie i nieprzyjemne rachunki … . Proszę jednak, oto wzór na czwartą potęgę macierzy.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} a^4+bca^2+abda+bd^2a+a^2bc+bcbc+abdc+bd^2c, & a^3b+bcab+abdb+bd^2b+a^2bd+bcbd+abd^2+bd^3 \\ ca^3+ada^2+cbca+d^2ca+cadc+dcbc+cbdc+d^3c, & ca^2b+cdab+cbcb+d^2cb+cad^2+dcbd+cbd^2+d^4 \end{bmatrix}$$

a dalej? Brr …

Trudno może uwierzyć, że tak nieciekawie wyglądające zagadnienie może spędzać sen z oczu wybitnym matematykom. Jego rola w algebrze jednak przypomina dość dobrze rolę, jaką hipoteza Poincarégo gra w topologii — leży jak głaz na środku szerokiej drogi prowadzącej do pełniejszej klasyfikacji algebr nieprzemiennych. Jedno ze sformułowań (w rzeczywistości: nieznaczne uogólnienie) problemu Köthe jest dosłownym przetłumaczeniem na język algebry nieprzemiennej tzw. twierdzenia Hilberta o zerach — zupełnie podstawowego twierdzenia geometrii algebraicznej.

W 1971 Jan Krempa wykazał, że spora liczba dobrze znanych zagadnień algebry nieprzemiennej jest bądź równoważna problemowi Köthe, bądź bardzo ściśle z nim związana. Ubiegły rok (praca radzieckich matematyków Markowa i Bejdara nie jest jeszcze opublikowana) przyniósł prawie kompletne rozwiązanie powyżej wzmiankowanego drobnego uogólnienia hipotezy Köthe. Dla algebr nad ciałem nieprzeliczalnym odpowiedź jest pozytywna, nad skończonym bądź przeliczalnym — negatywna. Aby uporać się z hipotezą Köthe, wystarczy ją więc ,,przerachować" dla pierścieni macierzy o współczynnikach z ciał o przeliczalnej lub skończonej liczbie elementów. Ale to wygląda na tak samo trudne, jak ogólny przypadek.

Hipoteza Poincaré

Klasyfikacja wszystkich powierzchni zwartych jest dobrze znana topologom (w Delcie pisał o tym J. Olędzki w nr 1/1981). Każda taka powierzchnia jest homeomorficzna ze sferą, z której wycięto pewną liczbę otworów, które następnie połączono rączkami-uszkami. Ich liczba jest rodzajem powierzchni. Prócz tego jeden otworek mógł zostać zaklejony wstęgą Möbiusa — i wtedy powierzchnia była nieorientowalna.

Nie jest znana pełna klasyfikacja rozmaitości trójwymiarowych (rozmaitość to przestrzeń lokalnie homeomorficzna z przestrzenią euklidesową). Jedną z przeszkód tej niewiedzy jest nieznajomość, czy prawdziwą jest następująca

Hipoteza Poincaré. Każda zamknięta jednospójna rozmaitość trójwymiarowa jest homeomorficzna z ,,trójwymiarową powierzchnią" kuli czterowymiarowej

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1.$$

W pierwotnej wersji hipotezy Poincarému chodziło o odpowiedź na pytanie, czy zamknięta rozmaitość wielościenna mająca identyczne własności homologiczne co S^3 jest z S^3 topologicznie równoważna. Sam jednak szybko zorientował się, że odpowiedź na tak postawione pytanie jest negatywna. W latach trzydziestych Whitehead pokazał, że w hipotezie Poincarégo sfery S^3 nie można zastąpić przez przestrzeń euklidesową E^3 — skonstruował mianowicie otwarty, spójny i ściągalny podzbiór $W \subset E^3$, który nie jest topologicznie równoważny z E^3. Ciekawe, że odpowiednik hipotezy Poincarégo dla wymiarów $\geqslant 5$ ma odpowiedź pozytywną. Wykazali to Smale (w 1961 roku) i Zeeman (1962).

Sławomir NOWAK

Dowód czy nie dowód?

W jednej z olimpiad matematycznych znalazło się takie **zadanie**:

Wykazać, że dla każdego czworościanu istnieje taka jego ściana, że rzut środka ciężkości czworościanu na zawierającą ją płaszczyznę należy do tej ściany.

Jeden z uczestników zawodów zaproponował następujące rozwiązanie.

Przypuśćmy, że rzuty środka ciężkości na każdą z czterech płaszczyzn podstaw padają na zewnątrz tych podstaw. Wtedy dowolnie postawiony czworościan przewróciłby się, ale z tych samych powodów nie ustałby i w nowym położeniu itd.

Otrzymalibyśmy perpetuum mobile. Jak wiadomo, jest to niemożliwe, co dowodzi naszego twierdzenia.

Komitet Główny Olimpiady stanął przed poważnym dylematem: uznać to za dowód, czy nie? No, bo do tego, że fizycy do dowodów swoich twierdzeń stosują matematykę wszyscy już się przyzwyczaili. Ale żeby odwrotnie?

Fe!

Nie powiemy, jaka była decyzja Komitetu w tej sprawie.