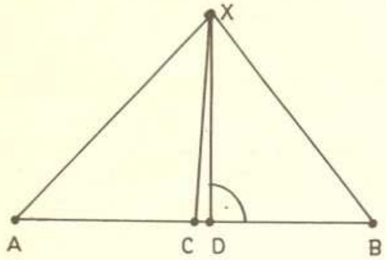
Cyrklem, linijką czy minikalkulatorem?

Jaka geometria jest „lepsza"? Syntetyczna czy analityczna? Ta, której szczątków naucza się w I i II klasie liceum, czy ta, której naucza się zwykle w klasie III i nobilituje zadaniem na maturze? Czy należy dowodzić twierdzeń geometrycznych dedukując je ze zgrabnie przyjętych aksjomatów, mając w pogardzie metody analityczne, rachunkowe, czy też wręcz przeciwnie, po co się męczyć rozumowaniem, skoro wszystko da się obliczyć?

CO BĘDZIEMY TEORETYZOWAĆ, ROZWIĄŻMY JAKIEŚ ZADANIE

Znaleźć zbiór punktów płaszczyzny, takich, których suma kwadratów odległości od dwóch danych punktów A i B równa jest danej liczbie α.



Niech punkty A, B, X będą wierzchołkami dowolnego trójkąta, punkt C będzie środkiem odcinka AB, a D spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu X. Mamy wtedy:

$$XA^2 = XD^2+(AC+CD)^2$$

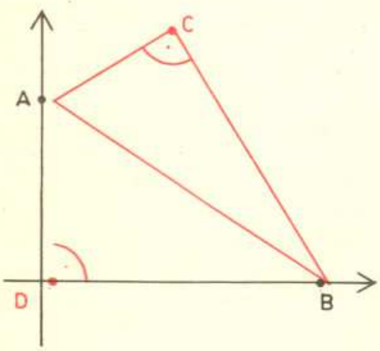
$$XB^2 = XD^2+(AC-CD)^2.$$

Stąd, po dodaniu stronami:
$XA^2+XB^2 = 2(XD^2+CD^2)+2AC^2$, a stąd $XA^2+XB^2 = 2XC^2+2AC^2$. Skoro XA^2+XB^2 ma być stałe, a AC^2 jest stałe, bo AB jest stałe, więc stałe jest również CX. Wynika stąd, że poszukiwane przez nas punkty leżą na ogół na okręgu o środku w punkcie C (dlaczego na ogół?)
No dobrze, a gdyby tak zadanie utrudnić i szukać zbioru punktów, których suma kwadratów odległości od trzech danych punktów jest stała? A może od czterech, pięciu, od n punktów? Gdyby się uprzeć, to pewnie powyższą metodą dałoby się je rozwiązać. Tylko po co się upierać? Po prostu obliczmy. Niech $A_1, \dots, A_n$ będą danymi punktami. Szukamy takich punktów X, by $(X-A_1)^2+\dots+(X-A_n)^2 = \alpha$ $(\alpha > 0)$.
Po nieskomplikowanych rachunkach otrzymujemy:
$nX^2-2X\cdot(A_1+\dots+A_n) = \alpha-(A_1^2+\dots+A_n^2)$ i dalej $\left(X-\frac{1}{n}(A_1+\dots+A_n)\right)^2 = \beta$, gdzie β jest pewną stałą. Wobec tego, dla $\beta > 0$, poszukiwanym zbiorem jest okrąg o środku w punkcie $\frac{1}{n}(A_1+\dots+A_n)$.

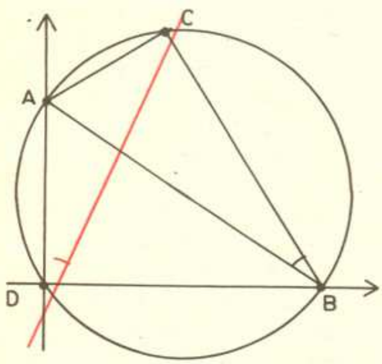
Łatwo. Szybko. Elegancko.

ROZWIĄŻMY JESZCZE JEDNO ZADANIE

Po ramionach kąta prostego ślizgają się końce A i B przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ΔABC. Po jakim torze porusza się wierzchołek C tego trójkąta?



Obierzmy taki układ współrzędnych, żeby ramiona kąta były półosiami dodatnimi tego układu. Niech $AC = \beta$, $BC = \alpha$ i $B = (t, 0)$, wtedy $A = \left(0, \sqrt{\alpha^2+\beta^2-t^2}\right)$.
Współrzędne poszukiwanego punktu $C = (x, y)$ będą spełniały warunki:
1° $x, y \geqslant 0$
2° $(C-B)^2 = \alpha^2$
3° $[C-A]\cdot[C-B] = 0$, czyli
1° $x, y \geqslant 0$
2° $(x-t)^2+y^2 = \alpha^2$
3° $x(x-t)+\left(y-\sqrt{\alpha^2+\beta^2+t^2}\right)y = 0.$

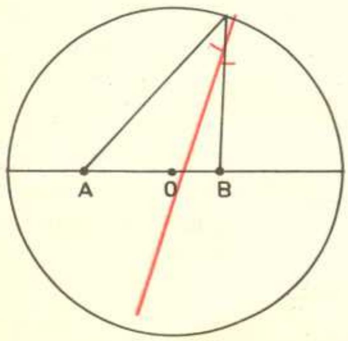


Wystarczy teraz z równań 2° i 3° wyeliminować parametr t. Brrr... chyba zaczyna się tu zanosić na dość upiorne rachunki, a nie jest to specjalnie zachwycające zajęcie (nawet przy użyciu jakiejś maszynki do liczenia). Być może, że można to lepiej obliczyć. A może można zabrać się za to zadanie zupełnie inaczej? Przyjrzyjmy się jeszcze raz rysunkowi. Na czworokącie $ADBC$ można opisać okrąg. Wobec tego $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$. Ale kąt $\sphericalangle ABC$ jest stały, bo jest to przecież kąt ślizgającego się trójkąta. W takim razie kąt $\sphericalangle ADC$ też jest stały. Punkt C porusza się więc po prostej.

Łatwo. Szybko. Elegancko.

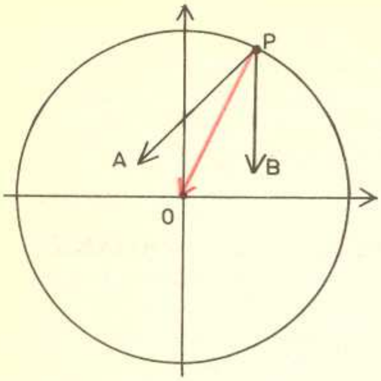
A TERAZ WYJĄTKOWO OPORNE ZADANIE

Na jednej średnicy okrągłego bilardu leżą dwie kule. Należy tak uderzyć jedną z kul, żeby po jednorazowym odbiciu od bandy trafiła w drugą kulę, ale nie biegnąc po jednej średnicy.



Zadanie sprowadza się, przy danych punktach A i B, do skonstruowania na okręgu takiego punktu P, by dwusieczna kąta $\sphericalangle APB$ przechodziła przez środek danego okręgu. Oczywiście punkt P należy skonstruować, posługując się cyrklem i linijką. Stosując znane twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie otrzymamy, że punkt P powinien spełniać warunek:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{OA}{OB}.$$



Wobec tego punkt P leży na okręgu Apoloniusza wyznaczonym przez punkty A i B oraz stałą $\alpha = \frac{OA}{OB}$. Taki okrąg można łatwo skonstruować przy użyciu cyrkla i linijki. Gdzież więc ta wyjątkowa oporność zadania?

Zadanie zaczyna się robić oporne, gdy zrezygnujemy z założenia, że punkty A i B leżą na jednej średnicy danego okręgu.

Spróbujmy obliczyć. Poszukiwany punkt P leży na okręgu o równaniu $x^2+y^2 = \alpha^2$ i spełnia warunek: $\sphericalangle APO \equiv \sphericalangle OPB$. Otrzymujemy więc układ równań:

$$x^2+y^2 = \alpha^2$$
$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PO}) = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PB}),$$

który w tym momencie nie wygląda jeszcze groźnie, ale po podstawieniu współrzędnych...

$$x^2+y^2 = \alpha^2$$
$$(a_1 x+a_2 y-\alpha^2)\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2} = (b_1 x+b_2 y-\alpha^2)\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}.$$

Nie dość, że nie bardzo wiadomo, jak się za ten układ równań zabrać, to w dodatku trudno ocenić, czy punkty, które są jego rozwiązaniem, są konstruowalne przy użyciu cyrkla i linijki. Zadanie to równie skutecznie opierało się licznym próbom rozwiązania metodami geometrycznymi. Jak dotąd, nie została znaleziona, o ile nam wiadomo, metoda konstrukcji punktu P środkami elementarnymi. Być może wina to lenistwa rozwiązujących układ równań, nieudolności poszukiwań konstrukcji, a być może taka konstrukcja nie istnieje, czyli...

ANI CYRKLEM, ANI LINIJKĄ, ANI MINIKALKULATOREM

A tak na marginesie, wracając do wspomnianego okręgu Apoloniusza, kto dziś pamięta ładny, geometryczny, nieanalityczny dowód, że zbiorem punktów, których stosunek odległości od dwóch danych punktów jest stały i różny od 1, jest okrąg?

dr Jerzy BEDNARCZUK

Czy maszyna może zbudować drugą taką samą?

Dr Stefan WOJCIECHOWSKI

Współczesna biologia molekularna tak dalece wniknęła w mechanizmy rządzące zapisem i odtwarzaniem informacji genetycznej, że pozwala to zastanawiać się nad problemem powstania i rozwoju życia. Najistotniejszą cechą żywych organizmów jest ich zdolność do reprodukcji oraz zmienność. Toteż przez „żywy organizm" będziemy tu rozumieć obiekt, który ma dwie cechy:

a) zdolność samoreprodukcji czyli inaczej mówiąc zdolność produkcji swoich kopii,

b) zmienność — czyli możliwość zmiany pewnych swoich cech strukturalnych (tzn. budowy) i funkcjonalnych z jednoczesnym zachowaniem zdolności do samoreprodukcji.

Żeby zrozumieć powstanie życia, biochemicy usiłują odtworzyć proces ewolucji układów złożonych -makromolekuł, które we właściwym środowisku chemicznym nabrały zdolności samoodtwarzania. Ten sam problem można jednakże postawić inaczej. Życie i proces jego ewolucji jest funkcjonalną cechą złożonych układów białkowonukleotydowych. Wobec tego można zapytać, które cechy życia są niezależne od nośnika materialnego, jakim są związki organiczne? Pierwsze kroki w tym kierunku poczynił już w 1949 roku (a więc zanim Watson i Crick rozszyfrowali zagadkę budowy DNA) John von Neumann — genialny matematyk, twórca pierwszych maszyn cyfrowych. Jego rozważania były niejako ubocznym produktem badań dotyczących ogólnej teorii budowy automatów.

Na ogół się uważa, że każdy obiekt wykonany przez automat jest mniej złożony niż on sam. Przekonanie to wynika z faktu, że automat zawiera pełny opis tworzonego obiektu, a prócz tego ma urządzenia wykonawcze. Ponieważ rozumiemy, że złożoność opisu jest równa złożoności obiektu, to naturalnie złożoność automatu jest większa od złożoności obiektu o dodatkową złożoność urządzeń wykonawczych. Czyli efektem działalności automatów mogą być jedynie automaty prostsze, a co za tym idzie samoreprodukcja jest w świecie automatów niemożliwa. Taki wniosek ucieszyłby może teologów, ale stoi w sprzeczności z najbardziej oczywistymi zjawiskami zachodzącymi w naturze. Pojęcie automatu jest na tyle ogólne, że zawiera w sobie również organizmy żywe. A te potrafią się rozmnażać! Mało tego, w trakcie ewolucji biologicznej z gatunków prymitywniejszych powstają gatunki coraz bardziej złożone. Czyli stopień złożoności w trakcie ewolucji rośnie.

Mamy więc wyraźny konflikt sugestywnych argumentów z oczywistością świata zewnętrznego. Źródłem nieporozumienia jest brak precyzyjnej definicji pojęcia złożoności obiektu. Żeby wykazać możliwość samoreprodukcji ograniczymy się do klasy automatów skończonych zbudowanych z elementów standardowych. Liczba elementów standardowych może być niewielka. Istotne jest tylko to, żeby te elementy zapewniały możliwość wbudowania do automatu dowolnych funkcji logicznych oraz umożliwiały pewne działania mechaniczne. To znaczy powinno być możliwe produkowanie automatów przez inne automaty.

Rozwiązanie zadania M 279. Droga promienia po odbiciu od prostej p przekształcona przez symetrię względem tej prostej daje prostoliniowe przedłużenie drogi promienia przed odbiciem. Stosując wielokrotnie ten fakt dojdziemy do rysunku z którego widać, że po 180-krotnym odbiciu promień wyjdzie spomiędzy prostych po torze równoległym do drogi, którą wszedł.