

Dziwne atraktory

Dr Paweł GÓRA

1. Będziemy rozważać „historię” punktu x poddawanego wielokrotnie przekształceniu f . Mówiąc dokładniej, dla przekształcenia np. płaszczyzny w siebie i wybranego punktu x_0 rozważymy ciąg: $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$, i tak dalej, ogólnie $x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$.

Jak są położone kolejne punkty x_n ? Co dzieje się z początkowym punktem x_0 po kolejnym stosowaniu f ? Łatwo zbierać dane eksperymentalne; za pomocą kalkulatora lub komputera — jeden z najłatwiejszych do napisania programów — praca posuwa się szybko nawet dla skomplikowanych wzorów. Utrudnia sprawę szybkie kumulowanie się błędów, np. dla przekształcenia Hënona, określonego wzorem $f(x, y) = (1 + y - 1,4x^2, 0,3x)$ dwa różne komputery liczące z dokładnością 14 znaków dają — dla tej samej wartości początkowej — zupełnie różne wyniki po 50–60 iteracjach.

Przekształcenie f może mieć punkt stały $x_0: f(x_0) = x_0$, może mieć trajektorię okresową: $f(x_0) = x_1, f(x_1) = x_2, \dots, f(x_n) = x_0$. Czasem obserwowujemy zupełnie inny przebieg zjawiska: punkty x_n dążą do skomplikowanego zbioru asymptotycznego Λ , skupiają się wokół niego i krążą w jego pobliżu. Taki zbiór to *dziwny atraktor*.

Zacznijmy od prostych przykładów. Poniżej większość obliczeń jest pominięta i usilnie namawiamy Czytelnika, aby sam je przeprowadził; znakiem (!) oznaczamy miejsca wymagające uzupełnienia.

Dla przekształcenia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ (rys. 1) znajdujemy $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (!). Jest to jedyny (!) punkt stały. Przy kolejnych iteracjach f odcinek $\langle 0, 1 \rangle$ zmniejsza się kolejno do $\left\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right\rangle, \left\langle \frac{7}{16}, \frac{9}{16} \right\rangle$, ogólnie $f^n(\langle 0, 1 \rangle) = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \right\rangle$ (!). Tak więc $\bigcap_{n \geq 0} f^n(\langle 0, 1 \rangle) = \frac{1}{2}$, czyli każdy punkt odcinka $\langle 0, 1 \rangle$ znajdzie się w końcu dowolnie blisko $\frac{1}{2}$.

Mówimy, że $\frac{1}{2}$ jest dla naszego f punktem stałym przyciągającym.

Rozważmy nieco bardziej skomplikowaną sytuację, badając przekształcenie o wykresie widocznym na rys. 2. Mamy: $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$, tzn. punkty $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ tworzą trajektorię

okresową o długości 2. Niech $U_1 = \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{16}, \frac{1}{4} + \frac{3}{16} \right\rangle, U_2 = \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{16}, \frac{3}{4} + \frac{3}{16} \right\rangle$.

Wtedy $f(U_1) = \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{32}, \frac{3}{4} + \frac{3}{32} \right\rangle \subset U_2, f(U_2) = \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{32}, \frac{1}{4} + \frac{3}{32} \right\rangle \subset U_1$ oraz ogólnie (!):

$$f^n(U_1) = \begin{cases} \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{3}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{1}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

$$f^n(U_2) = \begin{cases} \left\langle \frac{1}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{1}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \left\langle \frac{3}{4} - \frac{3}{2^{n+4}}, \frac{3}{4} + \frac{3}{2^{n+4}} \right\rangle & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

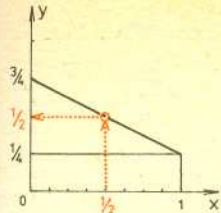
Widać więc, że dla $U = U_1 \cup U_2, f^{n+1}(U) \subset f^n(U)$ oraz $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$. Trajektorja

okresowa $\left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$ jest dla tego f trajektorią przyciągającą.

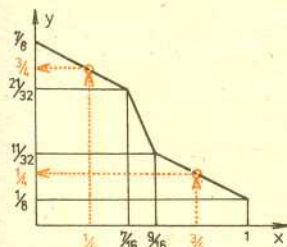
Czytelnik z łatwością narysuje sobie wykres przekształcenia $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ z trajektorią okresową przyciągającą dowolnego okresu (trzeba jednak zrezygnować z różnowartościowości f). A oto dwa przykłady przekształceń płaszczyzny: pierwsze ma punkt stały przyciągający, drugie trajektorię okresową przyciągającą długości 2.

Przekształcenie $f(x, y) = \left(\frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x\right)$ ma punkt stały $(0, 0)$, (!). Dla dowolnego koła

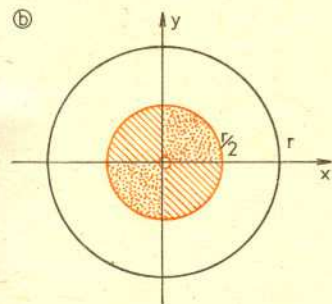
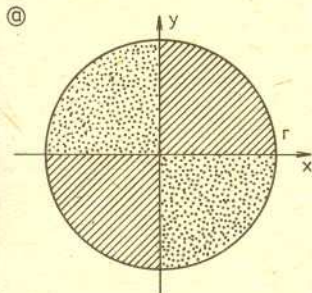
$K_r = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq r^2\}: f(K_r) = K_{\frac{r}{2}}$, (!) (rys. 3). Dla $U = K_1$ zbiór $f(U)$ zawiera się wewnątrz U oraz $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \{(0, 0)\}$. Punkt $(0, 0)$ jest przyciągający dla f .



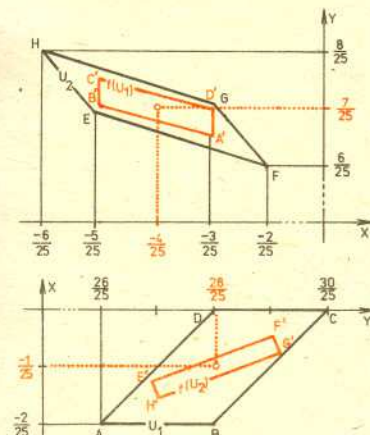
Rys. 1



Rys. 2

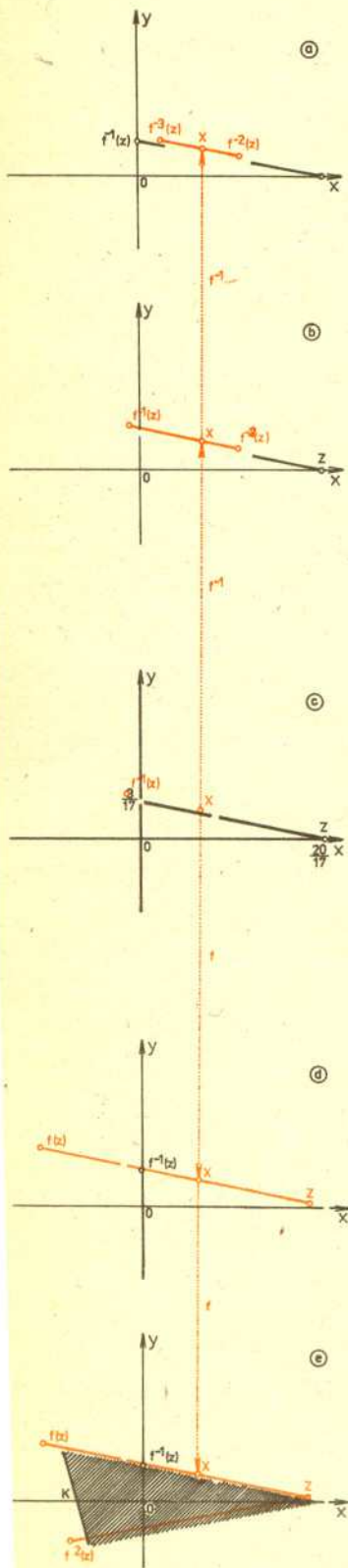


Rys. 3. Obraz koła $x^2 + y^2 \leq r^2$ przy przekształceniu $f(x, y) = \left(\frac{y}{2}, -\frac{x}{2}\right)$ jest kołem $x^2 + y^2 \leq \frac{r^2}{4}$.



Rys. 4. Przekształcenie $f(x, y) = \left(1 + y - |x|, \frac{x}{4}\right)$ przekształca równoległobok $ABCD$ w $A'B'C'D'$, a $EFGH$ w $E'F'G'H'$.

Atraktor zachowuje się podobnie do wiru rzecznoego — wirując przyciąga do siebie pewne swoje otoczenie i, „w granicy” wciąga je „w siebie”.



rys. 7. Tak działają f^{-1} : $f^{-1}(X) = X$
 $f: f(X) = X$.

Rozważmy przekształcenie $f(x, y) = \left(1 + y - |x|, \frac{1}{4}x\right)$. Jest to przekształcenie z rodziny rozpatrywanej w 3, przy $a = 1, b = \frac{1}{4}$; jego działanie przedstawia rys. 6. Mamy $f\left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right) = \left(\frac{-4}{25}, \frac{7}{25}\right)$ oraz $f\left(\frac{-4}{25}, \frac{7}{25}\right) = \left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right)$ (!). Punkty te tworzą trajektorię okresową długości 2. Niech U_1 będzie równoległobokiem o wierzchołkach $A = \left(\frac{26}{25}, \frac{-2}{25}\right)$,

$B = \left(\frac{28}{25}, \frac{-2}{25}\right), C = \left(\frac{30}{25}, 0\right)$ i $D = \left(\frac{28}{25}, 0\right)$, a U_2 równoległobokiem o wierzchołkach $E = \left(\frac{-5}{25}, \frac{6,9}{25}\right), F = \left(\frac{-2}{25}, \frac{6}{25}\right), G = \left(\frac{-3}{25}, \frac{7,1}{25}\right)$ i $H = \left(\frac{-6}{25}, \frac{8}{25}\right)$. Tak jak pokazano na rys. 4, $f(U_1)$ zawiera się we wnętrzu U_2 , a $f(U_2)$ we wnętrzu U_1 (!), a więc dla $U = U_1 \cup U_2$, $f(U)$ zawiera się we wnętrzu U . Jest również prawdą, że $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \left\{ \left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right), \left(\frac{-4}{25}, \frac{7}{25}\right) \right\}$.

Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi (wskazówka: znaleźć $f^2(U_1)$ i wykazać, że

$$\bigcap_{k \geq 0} f^{2k}(U_1) = \left\{ \left(\frac{28}{25}, \frac{-1}{25}\right) \right\}.$$

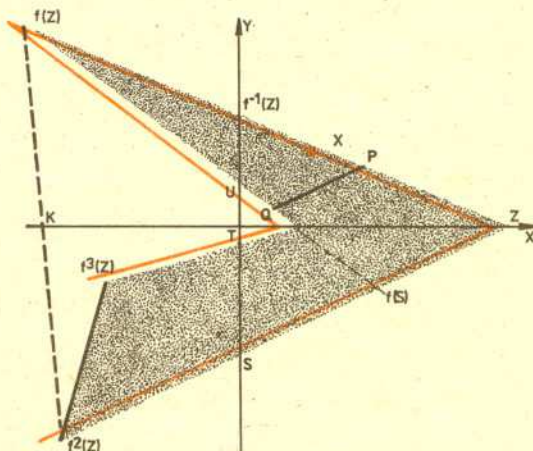
2. Punkt stały przyciągający i trajektoria okresowa przyciągająca są przykładami *atraktorów* tzn. zbiorów przyciągających (dokładna definicja na marginesie). Istnieją przekształcenia mające zbiory przyciągające nie będące punktami stałymi ani trajektoriami okresowymi. Zbiory takie to właśnie *dziwne atraktory*. W pobliżu dziwnego atraktora punkty poruszają się (przy działaniu przekształcenia) w sposób chaotyczny, pozornie przypadkowy.

Dlaczego matematycy zajmują się dziwnymi atraktorami? Źródłem tego zainteresowania trzeba szukać w fizyce. Najważniejszym dotąd nie wyjaśnionym teoretycznie zagadnieniem fizyki jest problem turbulencji. Ze zjawiskiem tym Czytelnik styka się codziennie gwałtownie odkręcając kran: woda wypływa dziwnie wirującym, niespokojnym strumieniem. Z powoli odkręcanego kranu woda często wypływa w sposób regularny, jakby była lepka; nazywa się to wypływem *laminarnym* (nie każdy kran nadaje się do takich obserwacji, np. z kranu z sitkiem zawsze wypływa strumień turbulentny).

Turbulencja, będąc zjawiskiem powszechnym, ma ogromne znaczenie praktyczne. Jej eksperymentalnemu opisowi poświęcono wiele tomów. Istnieje wiele teorii wyjaśniających turbulencję w szczególnych przypadkach, ale ogólnej teorii nie ma.

Od kilkunastu lat niektórzy fizycy i matematycy próbują powiązać turbulencję z dziwnymi atraktorami. Pewnym opisem turbulencji są równania hydromechaniki (równania Naviera—Stokesa). W oparciu o te równania definiuje się pewne przekształcenia R^n w siebie mające opisać ruch cząsteczek wody w turbulentnym strumieniu. Gdyby tak uzyskane przekształcenie miało dziwny atraktor, chaotyczne zachowanie się wody w strumieniu byłoby w jakimś sensie wyjaśnione. Byłby to, być może, sposób teoretycznego opisu zjawiska turbulencji.

Jak dotąd próby te powiodły się tylko w bardzo prostych przypadkach. Intensywne prace w tym kierunku prowadzone są na całym świecie, chociaż wielu fizyków i matematyków w ogóle nie wierzy w słuszność takiego podejścia.



rys. 8

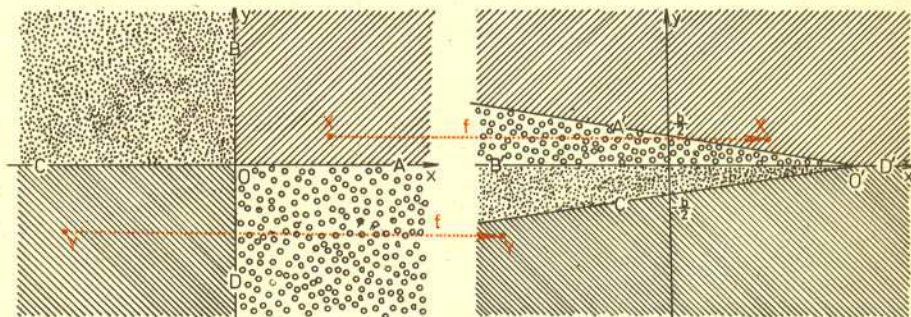
3. Poniżej podajemy przykład przekształcenia płaszczyzny mającego dziwny atraktor (jego związek z równaniami hydromechaniki jest bardzo, bardzo odległy). Jest to przekształcenie dane wzorem:

$$f(x, y) = (1 + y - a|x|, bx),$$

gdzie a, b są parametrami rzeczywistymi. Po raz pierwszy badał je R. Lozi. Na podstawie eksperymentów numerycznych wysnuł hipotezę, że przekształcenie to przy $a = 1,7, b = 0,5$ ma dziwny atraktor. Istnienie atraktora dla zbioru parametrów zakropkowanego na rys. 5 udowodnił Michał Misiurewicz z Uniwersytetu Warszawskiego. Warto dodać, że jest to pierwszy teoretyczny dowód istnienia dziwnego atraktora, tzw. niehiperbolicznego; dotychczas o ich istnieniu wnioskowano z obliczeń numerycznych.

Poniżej opisany jest dziwny atraktor przekształcenia f dla $a = 1,83$ i $b = 0,297$. Wartości parametrów zostały tak dobrane, aby ułatwić obliczenia.

f jest przekształceniem różnowartościowym (!), przekształca liniowo (tzn. obrazem odcinka jest odcinek) lewą półpłaszczyznę na dolną, a prawą na górną (rys. 6) (!).



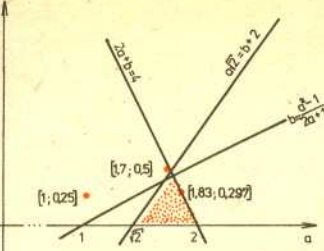
Rys. 6. Obrazy półpłaszczyzn przy przekształceniu $f(x, y) = (1 + y - 1,7|x|, \frac{x}{2})$.

f ma dokładnie dwa punkty stałe: $X = \left(\frac{1000}{2533}, \frac{297}{2533}\right)$ w pierwszej ćwiartce oraz $Y = \left(\frac{-1000}{1127}, \frac{-297}{1127}\right)$ w trzeciej ćwiartce (!). Niech $Z = \left(\frac{20}{17}, 0\right)$, wtedy $f^{-1}(Z) = \left(0, \frac{3}{17}\right)$, (!).

Odcinek $\overline{Zf^{-1}(Z)}$ zawiera punkt X (!), a przy działaniu f^{-1} przechodzi w siebie skracając się w stosunku 1:1,98 tak, jak to pokazano na rys. 7b (!). Tak więc, dla każdego $n, f^{n+1}(\overline{Zf^{-1}(Z)}) \supset \supset f^n(\overline{Zf^{-1}(Z)})$. Kolejne obrazy $\overline{Zf^{-1}(Z)}$ są przedstawione na rysunkach 7d – 10 (kolorowa łamana), (!). Rysunki 8-10 zostały zniekształcone, aby w ogóle było na nich coś widać. Cały obszar zakropkowany na każdym z nich mieści się we wnętrzu obszaru przedstawionego na rysunku poprzednim.

Oznaczmy przez A_0 zbiór $\bigcup_{n \geq 0} \overline{f^n(\overline{Zf^{-1}(Z)})}$. A_0 jest bardzo skomplikowanym zbiorem będącym przeliczalną sumą odcinków.

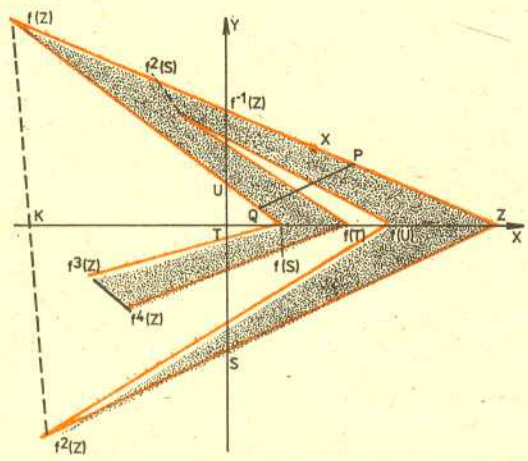
Niech F będzie trójkątem o wierzchołkach $Z, f(Z)$ i $f^2(Z)$. Rysunki 7e i 8 pokazują, że $f(F) \subset F$ (!). Za pomocą F skonstruujemy zbiór U , o którym mowa w definicji atraktora.



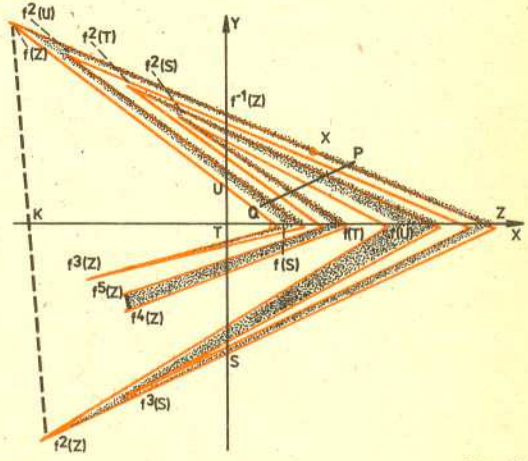
Rys. 5. Twierdzenie Misiurewicza: dla wartości parametrów zakropkowanego zbioru przekształcenie $f(x, y) = (1 + y - a|x|, bx)$ ma dziwny atraktor.

Punkt stały przyciągający i trajektoria przyciągająca są przykładami atraktorów (nazwa pochodzi od słowa atrakcja), tzn. zbiorów przyciągających. Zbiór $A \subset X$ nazywamy atraktorem dla przekształcenia $f: X \rightarrow X$, jeśli:

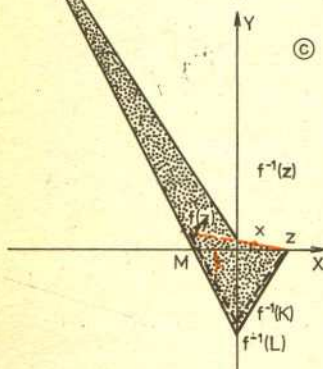
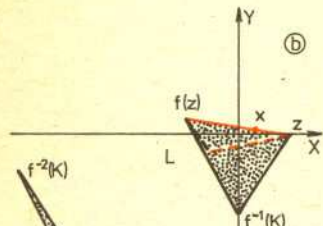
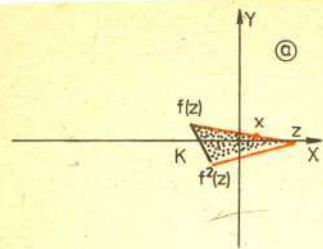
- 1° istnieje otoczenie $U \supset A$ takie, że domknięcie zbioru $f(U)$ zawarte jest we wnętrzu U ;
- 2° A jest częścią wspólną wszystkich $f^n(U), n = 1, 2, \dots$;
- 3° jeśli V_1 i V_2 są otwartymi podzbiórmi A , to dla pewnego n zbiory $f^n(V_1)$ i V_2 mają punkt wspólny; warunek ten zapewnia nierozkładalność A na sumę dwóch rozłącznych niepustych zbiorów o własnościach 1° i 2°.



Rys. 9. Kolejne etapy budowy dziwnego atraktora.



Rys. 10.



Rys. 11

Na rysunkach 11a, b, c, 12 i 13 pokazane są odpowiednio $F, f^{-1}(F), f^{-2}(F), f^{-3}(F)$ i $f^{-4}(F)$, (!). Na rys. 13a widać, że $f(f^{-4}(F)) = f^{-3}(F)$ prawie całkowicie zawiera się we wnętrzu $f^{-4}(F)$, jedynie w pobliżu punktu X brzegi $f^{-3}(F)$ i $f^{-4}(F)$ pokrywają się.

Na rys. 13a przedstawiono trapez R (dłuższe boki są równoległe), który dodamy do $f^{-4}(F)$. Rys. 12a pokazuje, że $U = f^{-4}(F) \cup R$ ma własność żądaną w punkcie 1° definicji atraktora (!).

Naturalnym kandydatem na dziwny atraktor jest $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$. Można wykazać, że

$$\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(F) \text{ (radzimy spróbować), a więc rys. 9 i 10 przedstawiają przybliżone}$$

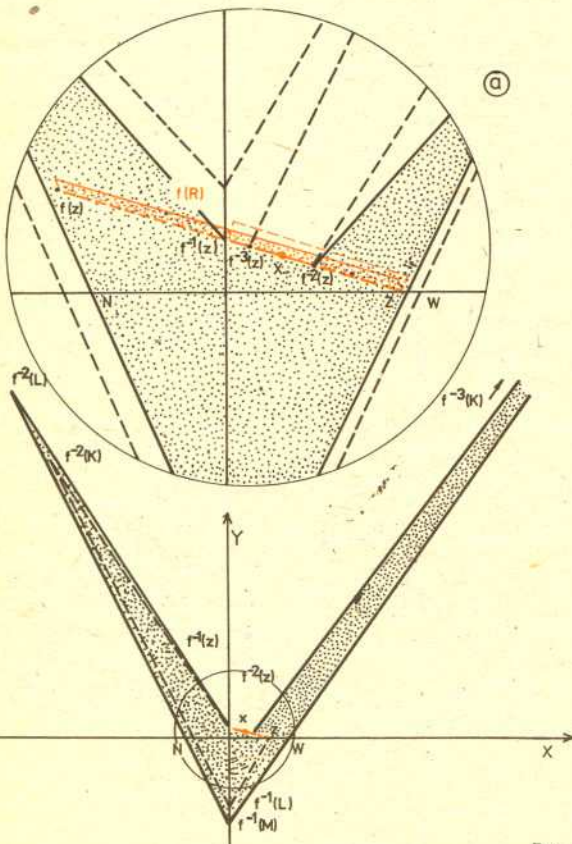
wyobrażenie A . Ponieważ A_0 jest zbiorem niezmienniczym ($f(A_0) = A_0$, (!)) zawartym w U , więc A zawiera A_0 . Ponieważ A jest zbiorem domkniętym (jako przecięcie zbiorów domkniętych) zawiera domknięcie A_0 . Można wykazać, że A jest równy domknięciu A_0 , a więc A jest „bardzo podobny” do A_0 . Można również wykazać, że A spełnia warunek 3° definicji atraktora. Ponieważ niewątpliwie nie jest punktem stałym ani trajektorią okresową, więc jest prawdziwym dziwnym atraktorem.

Na zakończenie pragnę zwrócić uwagę na trzy własności charakterystyczne dla dziwnych atraktorów w ogóle:

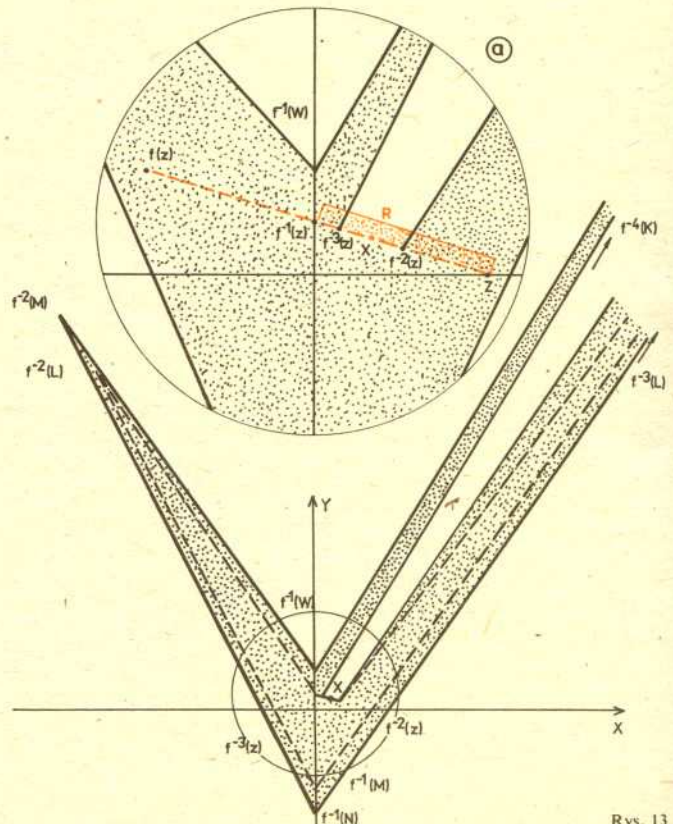
a) Popelnimy niewielki błąd wyobrażając sobie A jako A_0 . A_0 jest łamaną bez samoprzecięć o nieskończonej długości (!), można więc ją uważać za „pozaginaną” prostą, położoną na płaszczyźnie w bardzo skomplikowany sposób. Przy przekształceniu f zbiór A_0 wewnątrznie się rozszerza (każdy mały odcinek A_0 przechodzi na odcinek o większej długości), natomiast pewne otoczenie A_0 jest przyciągane do A_0 (małe odcinki bliskie i równoległe do A_0 zblizają się do A_0).

b) Skoncentrujmy na chwilę uwagę na odcinku \overline{PQ} zaznaczonym na rysunkach 8-10. Zbiory $f(F) \cap \overline{PQ}$, $f^2(F) \cap \overline{PQ}$ i $f^3(F) \cap \overline{PQ}$ przypominają kolejne zbiory otrzywane przy konstrukcji zbioru Cantora (np. K. Kuratowski „Wstęp do teorii mnogości i topologii”), można więc przypuszczać, że $A \cap \overline{PQ}$ jest pewnym zbiorem Cantora. Stąd wynikałoby, że A jest lokalnie zbiorem Cantora pomnożonym kartezjańsko przez odcinek. Przypuszcza się, że jest to typowe dla dziwnych atraktorów.

c) $A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(F)$. F ma pewne skończone pole. Przekształcenie f zmniejsza pole każdej figury dokładnie $b = 0,297$ razy (spróbujcie to wykazać), a więc pola zbiorów $f^n(F)$ zbiegają do zera. Stąd wynika, że pole A jest równe zeru.



Rys. 12



Rys. 13