Lemat Kuratowskiego-Zorna

Dr Zbigniew SAWOŃ

W Analizie Matematycznej, a także w innych działach matematyki często zachodzi konieczność wykazania istnienia elementu maksymalnego z punktu widzenia pewnej własności. Zwykle sytuacja jest następująca: mamy jakiś zbiór elementów częściowo uporządkowany przez pewną relację i poszukujemy w nim elementu lub elementów maksymalnych względem tej relacji, tj. obiektów, od których nie ma już większych. Twierdzenie zwane *lematem Kuratowskiego-Zorna* zapewnia istnienie takich elementów, jeżeli spełnione są pewne dodatkowe założenia. Celem tego artykułu jest zapoznanie Czytelnika z tym lematem i zastosowanie lematu do pewnej konkretnej konstrukcji, której wynikiem będzie dowód istnienia nieciągłych funkcji takich, że

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \qquad \text{dla wszystkich} \qquad x, y \in \boldsymbol{R}.$$

Mówimy, że zbiór X jest częściowo uporządkowany przez pewną relację $\prec$ zachodzącą między jego elementami, jeśli relacja ta jest
a) *zwrotna*, tj. dla każdego $x \in X$ mamy $x \prec x$,
b) *przechodnia*, tj. jeśli $x \prec y$ i $y \prec z$, to $x \prec z$,
c) „*nawpółprzeciwsymetryczna*", tj. jeśli $x \prec y$ i $y \prec x$, to $x = y$.
Typowym przykładem takiej relacji jest relacja *inkluzji* (*zawierania*) zbiorów: $A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$.

1. Zaczniemy od podstawowych definicji. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\prec$.
1) Podzbiór $A \subset X$ jest liniowo uporządkowany, gdy dla każdego $a, b \in A$ albo $a \prec b$ albo $b \prec a$.
2) Podzbiór $A \subset X$ jest ograniczony z góry, gdy istnieje takie x_0, że dla każdego $a \in A$ mamy $a \prec x_0$.
3) Element $x_0 \in X$ jest maksymalny w X, gdy z tego, że $x_0 \prec y$, wynika, że $x_0 = y$.

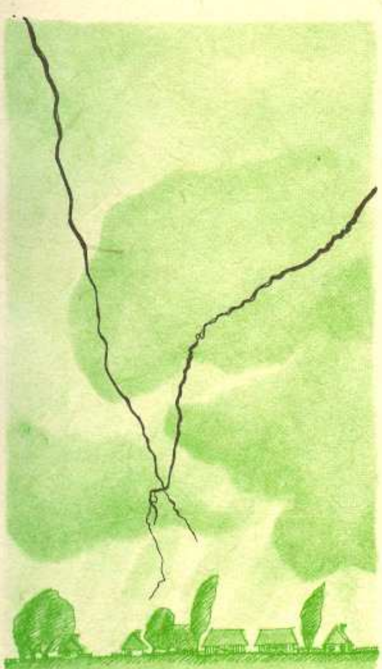
Otóż lemat Kuratowskiego-Zorna brzmi jak następuje:

Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\prec$. Jeżeli każdy liniowo uporządkowany podzbiór $A \subset X$ jest ograniczony z góry, to w X istnieją elementy maksymalne ze względu na tę relację.

2. Pokażemy na prostym standardowym przykładzie, jak posługujemy się tym twierdzeniem. Symbol $\boldsymbol{Q}$ będzie oznaczał zbiór wszystkich liczb wymiernych, $\boldsymbol{R}$ — rzeczywistych. Niech $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ będzie pewnym układem liczb rzeczywistych. Mówimy, że A jest *układem liniowo-wymiernie niezależnym*, jeżeli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i w_i = 0, \quad w_i \in \boldsymbol{Q}, \quad i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_n = 0.$$

Takie układy istnieją, np. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, \sqrt{2}\}$, $A_3 = \{1, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots, \pi^n\}$. To, że A_2 jest układem liniowo-wymiernie niezależnym znaczy po prostu tyle, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną, a to, że A_3 ma tę własność, wynika z faktu, że nie istnieje wielomian o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkiem byłaby liczba π, inaczej mówiąc: π nie jest liczbą algebraiczną.



Mówimy dalej, że zbiór $A \subset \boldsymbol{R}$ jest liniowo-wymiernie niezależny, jeżeli każdy skończony układ elementów tego zbioru ma tę własność. Na przykład zbiór wszystkich naturalnych potęg liczby π jest taki.

Rozpatrzmy teraz rodzinę Ω podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych złożoną ze zbiorów liniowo-wymiernie niezależnych.
Jest ona częściowo uporządkowana przez relację zawierania, tzn. $A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$.
Sprawdzimy, że dla tej rodziny spełnione jest założenie lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech $\{A_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną liniowo uporządkowaną w Ω. Rozpatrzmy zbiór $A_0 = \bigcup_{t \in T} A_t$, złożony ze wszystkich elementów wszystkich zbiorów A_t. Jeżeli $x_1, \dots, x_n \in A_0$, to dla pewnych $t_1, \dots, t_n$ mamy $x_1 \in A_{t_1}$, $x_2 \in A_{t_2}$, ..., $x_n \in A_{t_n}$. Ale rodzina $\{A_t\}_{t \in T}$ jest liniowo uporządkowana, tzn. w układzie zbiorów $A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_n}$ jest taki, który zawiera pozostałe. Niech będzie nim np. A_{t_n}; wówczas $x_1, x_2, \dots, x_n \in A_{t_n}$. Układ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest liniowo-wymiernie niezależny w A_{t_n}, a więc także w A_0. Wykazaliśmy tym samym, że $A_0 \subset \Omega$ i $A_t \subset A_0$ dla każdego $t \in T$. A więc rodzina $\{A_t\}_{t \in T}$ jest ograniczona z góry. Można więc do Ω i relacji $\subset$ stosować lemat Kuratowskiego-Zorna i stwierdzić, że

Istnieją zbiory $\Delta \subset \boldsymbol{R}$ liniowo-wymiernie niezależne i maksymalne.

Rozwiązanie zadania M 308.

Z równości $(n+1)^3+(n-1)^3+2(-n)^3 = 6n$ widzimy, że każda liczba podzielna przez 6 jest sumą czterech sześcianów liczb całkowitych. Równocześnie: $6n+1 = 6n+1^3$, $6n+2 = 6(n-1)+2^3$, $6n+3 = 6(n-4)+3^3$, $6n+4 = 6(n+2)+(-2)^3$, $6n+5 = 6(n+1)+(-1)^3$ i $6n = 6n+0^3$, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania F 121.

Obserwowana jasność powierzchni świecącego przedmiotu jest proporcjonalna do wartości natężenia oświetlenia w miejscu jego obrazu na siatkówce. Większe natężenie oświetlenia — większa ilość fotonów padających na receptory — większe ich podrażnienie.

Natężenie oświetlenia z kolei to strumień świetlny padający na jednostkową powierzchnię. Powierzchnia obrazu, a gdy pominiemy absorpcję, także strumień świetlny są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości. Wynika stąd, że w zwykłych warunkach, kiedy atmosfera niewiele absorbuje, natężenie oświetlenia na siatkówce, a co za tym idzie, obserwowana jasność powierzchni od odległości nie zależą. Podczas mgły, na skutek absorpcji, strumień świetlny maleje szybciej niż powierzchnia obrazu i bardziej odległe żarówki są przyćmione.

Czytelnikowi proponujemy zastanowienie się nad następującymi pytaniami:

1. Jak jasność zależy od powierzchni świecącego przedmiotu?
2. W jakim celu stosuje się mleczne klosze do lamp?

Zastanowimy się teraz, co to znaczy, że taki zbiór Δ jest maksymalny. Napiszmy $\Delta = \{a_t\}_{t \in T}$, gdzie T jest pewnym zbiorem wskaźników. Niech $x \in R$, ale $x \notin \Delta$; oczywiście zbiór $\Delta \cup \{x\}$ zawiera Δ. Nie może to być zbiór liniowo-wymiernie niezależny, bo jest większy od maksymalnego zbioru Δ o tej własności. A zatem znajdą się elementy $a_{t_1}, a_{t_2}, \ldots, a_{t_k}$ i liczby wymierne $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_k$, nie wszystkie równe zeru takie, że

$$w_0 x + w_1 a_{t_1} + \ldots + w_k a_{t_k} = 0.$$

Gdyby $w_0 = 0$, to byłoby $w_1 a_{t_1} + \ldots + w_k a_{t_k} = 0$, oraz $\sum_{i=1}^{k} |w_i| \neq 0$, a to nie jest możliwe, bo Δ jest zbiorem liniowo-wymiernie niezależnym. Czyli $w_0 \neq 0$. Teraz możemy napisać:

$$x = -\left(\frac{w_1}{w_0} a_{t_1} + \frac{w_2}{w_0} a_{t_2} + \ldots + \frac{w_k}{w_0} a_{t_k}\right),$$

wykazaliśmy zatem, że jeżeli $x \in \boldsymbol{R}$ i $x \notin \Delta$, to istnieją liczby wymierne $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ i liczby rzeczywiste $a_{t_1}, \ldots, a_{t_k} \in \Delta$, takie, że

$$(*) \qquad x = \alpha_1 a_{t_1} + \alpha_2 a_{t_2} + \ldots + \alpha_k a_{t_k};$$

możemy przyjąć, że liczby α_i nie są zerami. Przypuśćmy teraz, że istnieją liczby wymierne $\beta_1, \ldots, \beta_n$ i liczby rzeczywiste $a_{s_1}, \ldots, a_{s_n} \in \Delta$ takie, że

$$(**) \qquad x = \beta_1 a_{s_1} + \ldots + \beta_n a_{s_n} \qquad \text{(i jak poprzednio } \beta_i \neq 0).$$

Niech $A = \{t_1, \ldots, t_k\}$, $B = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Odejmując stronami wzory $(*)$ i $(**)$ otrzymamy

$$0 = (\alpha_1 a_{t_1} + \ldots + \alpha_k a_{t_k}) - (\beta_1 a_{s_1} + \ldots + \beta_n a_{s_n}) =$$
$$= \sum_{t_i \in A-B} \alpha_i a_{t_i} + \sum_{u_j \in A \cap B} (\alpha_{u_j} - \beta_{u_j}) a_{u_j} - \sum_{s_k \in B-A} \beta_k a_{s_k}.$$

Stąd $A-B = \emptyset$, $B-A = \emptyset$, tzn. $A = B$ oraz $\alpha_i = \beta_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. A to wszystko razem znaczy, że każdą liczbę $x \in \boldsymbol{R} - \Delta$ można zapisać jako kombinację liniową

$$x = \alpha_1 a_{t_1} + \ldots + \alpha_k a_{t_k} \qquad \text{oraz} \quad \alpha_i \neq 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

i przedstawienie to jest jednoznaczne. Oczywiście (dlaczego?) tę własność mają i liczby należące do Δ.

Ustalmy $t_i \in T$. Możemy określić funkcję $\alpha_{t_i} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Q}$ w następujący sposób: jeżeli $x = \alpha_1 a_{t_1} + \ldots + \alpha_k a_{t_k}$, to

$$\alpha_{t_i}(x) = \alpha_i \qquad \text{gdy } t_i \in \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$$
$$\alpha_{t_i}(x) = 0 \qquad \text{gdy } t_i \notin \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}.$$

Z tego określenia mamy

$$x = \sum_{t \in T} \alpha_t(x) a_t,$$

przy czym dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ tylko skończona liczba $\alpha_t(x)$ jest różna od zera, tj. sumowanie ma sens. Zauważmy jeszcze że, jak już wykazaliśmy, takie przedstawienie jest jedyne.

Jeżeli $y = \sum_{t \in T} \alpha_t(y) a_t$, to

$$x+y = \sum_{t \in T} (\alpha_t(x) + \alpha_t(y)) a_t = \sum_{t \in T} \alpha_t(x+y) a_t,$$

a więc dla każdego $t \in T$ i dla dowolnych $x, y \in \boldsymbol{R}$ mamy

$$\alpha_t(x+y) = \alpha_t(x) + \alpha_t(y).$$

Skonstruowaliśmy więc układ funkcji α_t o następujących własnościach

1) $\alpha_t : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Q}$, $\quad t \in T$,
2) $\alpha_t(x+y) = \alpha_t(x) + \alpha_t(y)$, $\quad x, y \in \boldsymbol{R}$,
3) $x = \sum_{t \in T} \alpha_t(x) a_t$
4) $\alpha_t(a_s) = \begin{cases} 0, & s \neq t \\ 1, & s = t. \end{cases}$

Układ $\Delta = \{a_t\}_{t \in T}$ nazywa się *bazą Hamela* przestrzeni liczb rzeczywistych nad ciałem liczb wymiernych. Wykazanie istnienia takiej bazy stanowiło treść tej części artykułu.

3. Niech $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ będzie funkcją taką, że

$$(***) \qquad f(x+y) = f(x)+f(y) \qquad \text{dla każdego } x, y.$$

Wówczas dla naturalnego n
$f(n) = f(1+1+ \ldots +1) = n \cdot f(1)$,
$f(1) = f(1/m+1/m+ \ldots +1/m) = m \cdot f(1/m)$,
a stąd łatwo otrzymujemy, że
$f(p/q) = p \cdot f(1)/q$.

Załóżmy teraz, że f jest funkcją ciągłą. Wówczas dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ istnieje ciąg w_n liczb wymiernych zbieżny do x, a więc

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} w_n f(1),$$

tzn. $f(x) = ax$, gdzie $a = f(1)$. Wynika stąd w szczególności, że zbiorem wartości każdej z tych funkcji (z wyjątkiem funkcji zerowej) jest cały zbiór liczb rzeczywistych, a stąd z kolei — że funkcje skonstruowane w poprzedniej części artykułu nie są ciągłe.

Założenie ciągłości funkcji f spełniającej (***) może być zastąpione przez ciągłość tylko w zerze. Istotnie, jeżeli
$x_n \to x_0$, to $x_n - x_0 \to 0$, a więc $f(x_n - x_0) \to 0$, ale $f(x_n - x_0) = f(x_n) - f(x_0)$, tzn. $f(x_n) \to f(x_0)$.

A oto jeszcze jedna własność funkcji f z (***). Wykażemy, że jeśli są one nieciągłe, to są nieograniczone w dowolnym otoczeniu zera; wskazuje to jak bardzo dziwne są te funkcje. Dla dowodu załóżmy, że f jest ograniczona w pewnym otoczeniu 0. Znaczy to, że istnieją liczby $M > 0$ i $\delta > 0$ takie, że dla każdego $|x| < \delta$ mamy $|f(x)| < M$. Niech ciąg x_n będzie zbieżny do zera. Można wówczas znaleźć ciąg liczb wymiernych $w_n \to \infty$ taki, że $w_n x_n \to 0$ (dlaczego? to zadanie dla Czytelnika; rozwiązanie w numerze). A więc dla pewnego n_0 mamy $n > n_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow |w_n x_n| < \delta$, a stąd $|f(x_n)| \leqslant M/w_n$ dla $n > n_0$. Ponieważ ciąg po prawej stronie tej równości jest zbieżny do zera, więc i $f(x_n) \to 0$, tzn. funkcja f jest ciągła w 0 (zatem, jak widzieliśmy, i na całej prostej).

Nieciągłe rozwiązania równania funkcyjnego (***) mają jeszcze inne ,,dziwne'' własności, ale opisanie ich wykraczałoby poza ramy tego artykułu.

4. Na zakończenie spróbujemy odpowiedzieć na następujące pytanie. Jakie własności musi mieć zbiór $V \subset \boldsymbol{R}$, aby można było podstawić go na miejsce $\boldsymbol{Q}$ w rozumowaniu w drugiej części artykułu?

Analizując dokładnie tamto rozumowanie stwierdzimy z łatwością, że wykorzystane zostały tylko następujące własności zbioru $\boldsymbol{Q}$:

1) Jeżeli w_1 i $w_2 \in \boldsymbol{Q}$, to w_1+w_2, w_1-w_2, $w_1 w_2 \in \boldsymbol{Q}$, a przy $w_2 \neq 0$ również $w_1/w_2 \in \boldsymbol{Q}$.
2) $0 \in \boldsymbol{Q}$, $\quad 1 \in \boldsymbol{Q}$.

Jeżeli zatem założymy, że zbiór V ma też powyższe własności, to całe tamto rozumowanie będzie mogło być powtórzone. Takie podzbiory $V \subset \boldsymbol{R}$ nazywają się ciałami liczbowymi. Jeżeli V jest takim ciałem, to $\boldsymbol{Q} \subset V$ (dlaczego?, dowód w numerze). Są też ciała różne od $\boldsymbol{Q}$, np. oznaczany symbolem $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ zbiór

$$V = \{x \in \boldsymbol{R}: \quad x = w_1 + w_2\sqrt{2}, \quad w_1, w_2 \in \boldsymbol{Q}\};$$

sprawdzenie, że warunki 1), 2) są spełnione, jest natychmiastowe.

Możemy więc na zakończenie artykułu stwierdzić, że istnieją funkcje nieciągłe $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ takie, że

1 $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2 $\quad f(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ dla każdego f.

Są to więc funkcje zupełnie różne od tych, które skonstruowaliśmy uprzednio, tam bowiem było $f(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{Q}$. Gdybyśmy wzięli inne ciało liczbowe $V \subset \boldsymbol{R}$, otrzymalibyśmy jeszcze inny zbiór takich funkcji, o równie dziwnych własnościach.

Rozwiązanie zadania F 122.

W przypadku gwiazd mamy do czynienia z zupełnie inną sytuacją niż w poprzednim zadaniu. Są to obiekty tak odległe, że ich obrazy ,,geometryczne'' powstające na siatkówce są znikomo małe w porównaniu z obrazami powstającymi w wyniku dyfrakcji na otworze źrenicy. Wielkość obrazu dyfrakcyjnego nie zależy od odległości od gwiazdy i jest zdeterminowana przez średnicę otworu.
Strumień świetlny wpadający do oka, podobnie jak poprzednio, jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości, a zatem, przy pominięciu absorpcji, tak samo maleje z odległością jasność widoma gwiazdy.