Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Ligę organizuje Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, oraz nasza Redakcja. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 9/1981.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 3/1983

Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	47,22pkt
Jacek Uryga	- Bytom	41,83pkt
Mariusz Fiszer	- Duszniki Zd.	40,86pkt
Artur Smolczyk	- Tarnów Op.	36,51pkt
Tomasz Biegański	- Lublin	32,06pkt
Marian Roman	- Ełk	30,16pkt
Ryszard Pagacz	- Zawadzkie	28,07pkt

Współczynniki trudności zadań 49, 50, 51:
3,20 1,56 2,86

Tym razem Klub 44 nie wzbogacił się o nowe nazwisko: Pan Janowicz przekroczył próg 44 już po raz DRUGI i zbiera zasłużone gratulacje !

Klub 44

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 61, 62, 63

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1983

61. Czy równanie $x^3+y^3+z^3 = 13579^2$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?

62. Wykazać, że w dowolnym trójkącie znak wyrażenia $2R+r-p$ zależy tylko od tego, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. Znaczenie symboli zwykłe: R, r — promienie kół opisanego i wpisanego, p — połowa obwodu.

63. Podana obok łamigłówka typu „litera-cyfra” ma kilka rozwiązań.
Znaleźć rozwiązanie:
a) w którym DWA jest liczbą możliwie największą;
b) w którym możliwie najwięcej razy występuje cyfra wyrażająca wiek ligi zadaniowej w „Delcie”.

DWA
LATA
TRWA
+LIGA
DELTY

Zadanie 61 przysłał nasz Czytelnik, pan Andrzej Pawłowski z Zabrza.

Skrót treści zadań z nr. 5/1983

55. Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $a^x+b^x = c^x$ (a, b, c dodatnie)?

56. „Jeśli zbiór wierzchołków wielokąta ma oś (odp. środek) symetrii, to wielokąt ma oś (odp. środek) symetrii”. Czy powyższe stwierdzenia są prawdziwe? Jak (ewentualnie) wzmocnić założenia, by stwierdzenia stały się prawdziwe?

57. Obliczamy iloczyn cyfr liczby naturalnej, z wynikiem postępujemy tak samo, aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Od jakiej liczby naturalnej trzeba zacząć, by otrzymać 1?

Rozwiązania zadań z numeru 5/1983

55. Niech I oznacza przedział $\langle a, b\rangle$ lub $\langle b, a\rangle$ (w zależności od tego, która z liczb a, b jest większa). Dane w zadaniu równanie przepisujemy w postaci: $(a/c)^x+(b/c)^x = 1$. Gdy $c \in I$, równanie nie ma rozwiązań, bo dla każdej wartości $x \in \mathbf{R}$ jeden ze składników lewej strony jest $\geqslant 1$, a drugi jest > 0. Gdy $c \notin I$, równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, bo wówczas składniki lewej strony są funkcjami wykładniczymi o podstawach jednocześnie większych lub mniejszych od 1, więc ich suma jest ściśle monotoniczną funkcją ciągłą, odwzorowującą zbiór $\mathbf{R}$ na przedział $(0, \infty)$.

56. Oba podane stwierdzenia są nieprawdziwe. Za kontrprzykład służyć może pięciokąt $ABCDE$, gdzie $ABCD$ jest rombem (ale nie kwadratem), a E jest jego środkiem. Zbiór skończony $\{A, B, C, D, E\}$ ma osie symetrii i środek symetrii, a pięciokąt $ABCDE$ — nie ma.
Oba zdania stają się prawdziwe przy dodatkowym założeniu wypukłości wielokąta.
Dowód: Oznaczmy przez W dany wielokąt wypukły, przez Z — zbiór jego wierzchołków i niech $\mathscr{S}$ będzie symetrią płaszczyzny (osiową w przypadku a, środkową w przypadku b) taką, że $\mathscr{S}(Z) = Z$. Zbiór $\mathscr{S}(W)$ jest też wielokątem wypukłym, a $\mathscr{S}(Z)$ jest zbiorem jego wierzchołków. Wielokąt wypukły W jest wyznaczony przez zbiór Z jednoznacznie, jest bowiem częścią wspólną wszystkich zbiorów wypukłych zawierających Z. Analogiczny związek zachodzi między zbiorami $\mathscr{S}(W)$ i $\mathscr{S}(Z)$. Ponieważ zbiory Z i $\mathscr{S}(Z)$ są identyczne, więc także W i $\mathscr{S}(W)$ są identyczne.

57. Otrzymana w wyniku jedynka może być poprzedzona tylko przez liczbę postaci 111…11. Pokażemy, że liczba takiej postaci nie może być już poprzedzona przez nic. Załóżmy, wbrew naszej tezie, że $x = 111\ldots11$ jest iloczynem liczb jednocyfrowych. Wówczas rozkład x na czynniki pierwsze składa się wyłącznie z trójek i siódemek: $x = 3^k7^m$. Jeśli $k > 0$, to x dzieli się przez 3; zatem liczba jedynek, z których składa się x, także dzieli się przez 3; wobec tego x jest podzielne przez 111 i ma czynnik pierwszy 37 — sprzeczność. Jeśli zaś $k = 0$, czyli $x = 7^m$, to sprzeczność wyniknie stąd, że $7^2 \equiv 49$, $7^3 \equiv 43$, $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$; co za tym idzie, dowolna potęga siódemki kończy się grupą cyfr 01 lub 07 lub 49 lub 43 (a więc nie 11).
Poszukiwanymi w zadaniu liczbami są zatem tylko te, których zapis dziesiętny składa się z samych jedynek.

Rozwiązanie zadania 2 (Mizar):
Fakt, że punkt b jest środkiem odcinka $\langle a, c\rangle$ będziemy zapisywać M $[a, b, c]$.

```
ENVIRON

AX1: FOR A,B BEING PUNKT EX C BEING PUNKT ST M[A,C,B];

AX2: FOR A,B BEING PUNKT EX C BEING PUNKT ST M[A,B,C];

AX3: FOR A,B,C,D,E BEING PUNKT
        ST M[A,B,C] & M[C,D,E] & M[A,C,E]
          HOLDS M[B,C,D];

AX4: FOR A,B1,B2,C BEING PUNKT
        ST M[A,B1,C] & M[A,B2,C] HOLDS B1=B2
```