

# Inwersja, stożkowe i inni

## Inwersja

Jeżeli mamy na płaszczyźnie dany okrąg  $o(A, t)$ , to inwersją względem tego okręgu (lub inwersją o środku  $A$  i promieniu  $t$ ) nazywane jest takie przekształcenie płaszczyzny, przy którym obrazem dowolnego punktu  $P$  jest punkt  $P'$  należący do półprostej  $AP$ , spełniający warunek  $AP \cdot AP' = t^2$ .

Jeżeli okrąg inwersji ma równanie  $x^2 + y^2 = t^2$ , to przy inwersji względem tego okręgu punkt  $P = (x, y)$  zmienia współrzędne według wzorów:

$$(1) \quad x' = \frac{t^2}{x^2 + y^2} \cdot x, \quad y' = \frac{t^2}{x^2 + y^2} \cdot y.$$

Inwersja przekształca proste przechodzące przez  $A$  na siebie, proste nie przechodzące przez  $A$  na okręgi przechodzące przez  $A$  (i odwrotnie: okręgi przechodzące przez  $A$  na proste nie przechodzące przez  $A$ ), natomiast okręgi nie przechodzące przez  $A$  na okręgi nie przechodzące przez  $A$ . Nie będziemy się tu jednak tym szczegółowo zajmować. Bardziej nas będzie interesować, jak wyglądają obrazy niektórych krzywych stożkowych, takich jak hiperbola czy parabola, przy inwersji właśnie.

Ponieważ niektóre rachunki wygodniej jest przeprowadzać we współrzędnych biegunowych, przypomnijmy, jak wyglądają równania stożkowych we współrzędnych biegunowych.

## Współrzędne biegunowe

Obierzmy na płaszczyźnie euklidesowej dowolny punkt  $F$  i półprostą  $b$  o początku  $F$ . Wówczas każdy punkt  $P$  płaszczyzny jest wyznaczony jednoznacznie przez swoją odległość  $r$  od punktu  $F$  i kąt  $\varphi$  (rys. 1). Para  $(r, \varphi)$  nazywana jest współzrędnymi biegunowymi punktu  $P$ , punkt  $F$  biegunem, a półprosta  $b$  osią biegunową.

Wygodnie jest przyporządkować każdemu punktowi o współzrędnym biegunowych  $(r, \varphi)$  drugą parę „współzrędnym”:

$$(2) \quad (r, \varphi) = (-r, \varphi + \pi).$$

Wzory na zmianę współzrędnym biegunowych przy inwersji o środku  $A = (0,0)$  i promieniu  $t$  mają postać:

$$(3) \quad \varphi' = \varphi, \quad r' = \frac{t^2}{r}.$$

## Stożkowe we współzrędnym biegunowych

Przypomnijmy, że stożkową o ognisku  $F$ , kierownicy  $k$  i mimośrodku  $e$  ( $e > 0$ ) nazywany jest zbiór takich punktów  $P$ , których stosunek odległości od ogniska  $F$  do odległości od kierownicy  $k$  równy jest  $e$  (rys. 2).

Obierzmy układ współzrędnym biegunowych tak, by ognisko  $F$  było biegunem, a oś biegunowa była prostopadła do kierownicy i przecinała ją w punkcie  $F'$ . Znajdziemy równanie stożkowej w takim układzie współzrędnym.

Niech punkt  $P$  o współzrędnym  $(r, \varphi)$  będzie dowolnym punktem stożkowej, a  $RF = f$  (rys. 3).

$$\begin{aligned} \text{Wówczas } r = PF = e \cdot PP' = e \cdot P'F' = e(FF' - r \cdot \cos \varphi) = e(RR' - r \cdot \cos \varphi) = \\ = e \left( \frac{RF}{e} - r \cdot \cos \varphi \right) = f - e \cdot r \cdot \cos \varphi, \end{aligned}$$

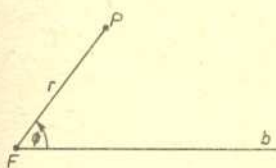
stąd  $r = f - e \cdot r \cdot \cos \varphi$  i ostatecznie

$$(4) \quad r = \frac{f}{e \cdot \cos \varphi + 1} \quad (r > 0).$$

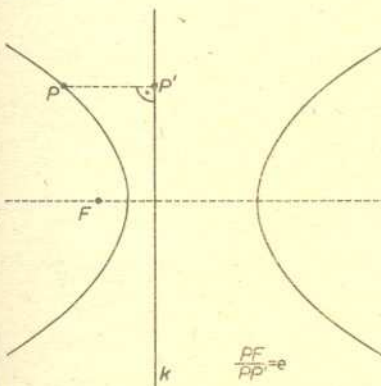
Równanie to jest równaniem elipsy (dla  $0 < e < 1$ ) lub paraboli (dla  $e = 1$ ) bądź też jednej gałęzi hiperboli. Dlatego w przypadku hiperboli, gdzie punkty drugiej jej gałęzi leżą po przeciwnej stronie kierownicy niż odpowiadające jej ognisko, musimy to równanie uzupełnić równaniem drugiej jej gałęzi

$$(5) \quad r = \frac{f}{e \cdot \cos \varphi - 1} \quad (r > 0),$$

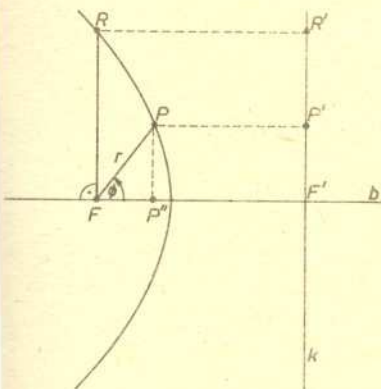
które otrzymujemy przeprowadzając analogiczne rachunki.



Rys. 1



Rys. 2

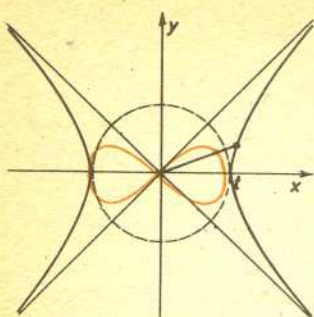


Rys. 3



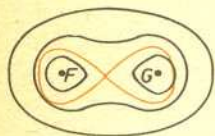
## Lemniskata Bernoulli'ego

Jeśli hiperbolę równoosiową o równaniu  $x^2 - y^2 = t^2$  przeksztalcimy przez inwersję o środku  $A = (0,0)$  i promieniu  $t$ , to jej obraz będzie miał równanie  $t^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ , które otrzymujemy stosując wzory (1) na zmianę współrzędnych przy inwersji. Krzywa ta to *lemniskata Bernoulli'ego* (rys. 4).



Rys. 4

Lemniskatę można otrzymać i w inny sposób. Zbiorem punktów, których iloczyn odległości od dwóch danych punktów  $F$  i  $G$  jest stały i równy  $s$ , jest krzywa nazywana *owalem Cassiniego*. Na rysunku 5 widzimy, jak wygląda owal Cassiniego, w zależności od stosunku  $s$  do  $d$  — odległości punktów  $F$  i  $G$ . Dla dużych  $s$  owal ten jest spójną krzywą i jeśli  $s$  maleje, to po przekroczeniu  $\left(\frac{d}{2}\right)^2$  „pęka” na dwie części. W granicznym przypadku, dla  $s = \left(\frac{d}{2}\right)^2$  otrzymujemy równanie  $\frac{d^2}{2}(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$  w układzie współrzędnych, w którym  $C = \left(-\frac{d}{2}, 0\right)$ ,  $D = \left(\frac{d}{2}, 0\right)$ .

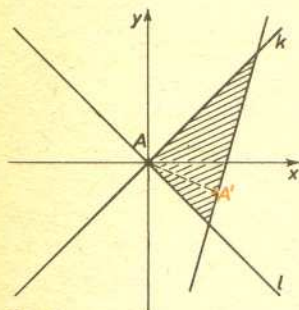


Rys. 5

Jest to więc po prostu lemniskata Bernoulli'ego (rys. 5).

Rozwiążmy teraz następujące zadanie:

Dane są prostopadłe proste  $k$  i  $l$  przecinające się w punkcie  $A$ . Znaleźć zbiór rzutów prostokątnych  $A'$  punktu  $A$  na proste wyznaczające wraz z prostymi  $k$  i  $l$  w „lewej” i „prawej” ćwiartce płaszczyzny trójkąty o danym polu  $t^2$  (rys. 6).



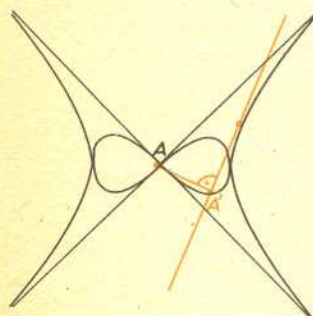
Rys. 6

Niech dane proste  $k$  i  $l$  mają równania  $x - y = 0$  i  $x + y = 0$ . Z warunków zadania wynika, że proste, na które rzutujemy punkt  $A$ , to styczne do hiperboli o równaniu  $x^2 - y^2 = t^2$ . Mają więc one równania postaci  $p_1x - p_2y = t^2$ , gdzie punkt styczności ma współrzędne  $P = (p_1, p_2)$ . Wobec tego proste odpowiednio do nich prostopadłe, przechodzące przez  $A$ , mają równania  $p_2x + p_1y = 0$ .

Po wyeliminowaniu z układu równań

$$\begin{aligned} p_1x - p_2y &= t^2 \\ p_2x + p_1y &= 0 \\ p_1^2 - p_2^2 &= t^2 \end{aligned}$$

parametrów  $p_1$  i  $p_2$  otrzymujemy równanie  $t^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$ , a więc znowu równanie lemniskaty Bernoulli'ego (rys. 7).

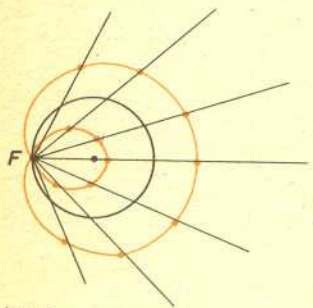


Rys. 7

## Ślimak Pascala

Ślimakiem Pascala nazywać będziemy krzywą otrzymaną w następujący sposób:

Na danym okręgu o środku  $A$  i promieniu  $u$  obieramy dowolny punkt  $F$ . Przez ten punkt prowadzimy proste, a na tych prostych odkładamy od punktów przecięcia z okręgiem, w obydwie strony, odcinki o danej długości  $s$ . Końce tych odłożonych odcinków tworzą krzywą nazywaną ślimakiem Pascala (rys. 8). Jeśli układ współrzędnych biegunowych obierzemy w ten sposób, by  $F$  był biegunem, a oś biegunowa przechodziła przez  $A$ , to ślimak Pascala opisywać będą równania:



Rys. 8

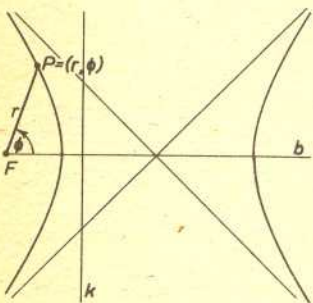
$$(6) \quad r = 2u \cdot \cos \varphi + s, \quad r = 2u \cdot \cos \varphi - s \quad \left( r > 0, \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right).$$

Jedno z nich odpowiada końcom odcinków odkładanych w jedną stronę od punktów przecięcia z okręgiem, a drugie — w drugą. Wobec umowy (2) warunki (6) można zastąpić przez

$$\begin{aligned} (7') \quad & r = 2u \cdot \cos \varphi + s, & \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \text{ lub} \\ (7'') \quad & r = 2u \cdot \cos \varphi - s, & \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

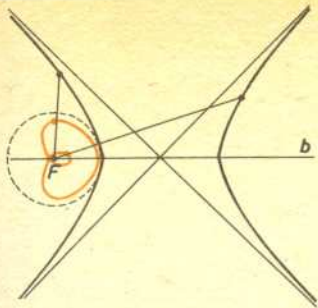
Przekształćmy jeszcze raz hiperbolę przez inwersję względem okręgu o promieniu  $t$ , ale tym razem niech środkiem inwersji będzie ognisko hiperboli. Rachunki przeprowadzimy we współrzędnych biegunowych, przy czym biegunem  $F$  będzie ognisko hiperboli, a oś biegunowa prostopadła do kierownicy, przechodząca przez drugie ognisko (rys. 9).

Po zastosowaniu do równań (4) i (5), opisujących obie gałęzie hiperboli, wzorów (3) na zmianę współrzędnych przy inwersji o środku w ognisku obraz jednej gałęzi hiperboli będzie krzywą opisaną równaniem  $r = \frac{et^2}{f} \cdot \cos \varphi + \frac{t^2}{f}$  ( $r > 0$ ), a obraz drugiej równaniem  $r = \frac{et^2}{f} \cdot \cos \varphi - \frac{t^2}{f}$  ( $r > 0$ ). Otrzymaliśmy więc równania opisujące ślimak Pascala (rys. 10).

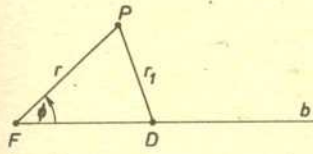


Rys. 9

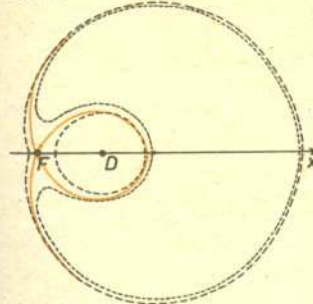




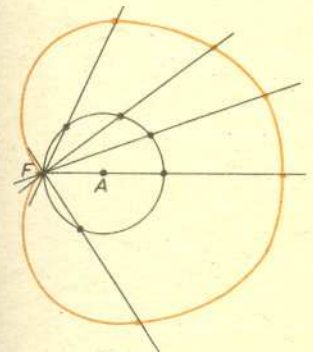
Rys. 10



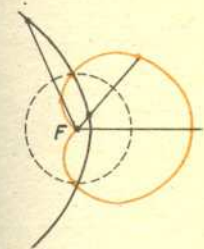
Rys. 11



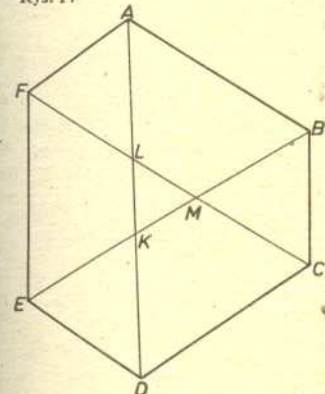
Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14



Owalem Kartezjusza nazywać będziemy zbiór takich punktów  $P$ , których odległości  $r$  i  $r_1$  od stałych punktów  $F$  i  $D$  spełniają warunek

$$(8) \quad r + s \cdot r_1 = u \quad \text{lub} \quad r - s \cdot r_1 = u,$$

gdzie  $s$  i  $u$  są pewnymi stałymi, przy czym  $s \neq 1, -1$ .

Obierzmy układ współrzędnych biegunowych tak, by  $F$  był biegunem, a oś biegunowa przechodziła przez  $D$  (rys. 11) i niech  $FD = d$ .

Wówczas

$$(9) \quad r_1^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cdot \cos \varphi.$$

Podstawiając (8) do (9) otrzymujemy równanie owalu Kartezjusza we współrzędnych biegunowych:

$$(10) \quad r^2(s^2 - 1) - 2r(ds^2 \cdot \cos \varphi - u) + s^2d^2 - u^2 = 0.$$

W zależności od parametrów  $s, u, d$  owal Kartezjusza może być spójną krzywą bądź może rozpaść się na dwie części. Jeżeli parametry wyznaczające owal Kartezjusza obierzemy tak, by  $u = s \cdot d$ , jego równanie przybierze postać:  $r(s^2 - 1) = 2d^2s \cdot \cos \varphi - 2sd$ . Porównując je z (7'') widzimy, że jest to równanie ślimaka Pascala (rys. 12), który jest więc szczególnym przypadkiem owalu Kartezjusza.

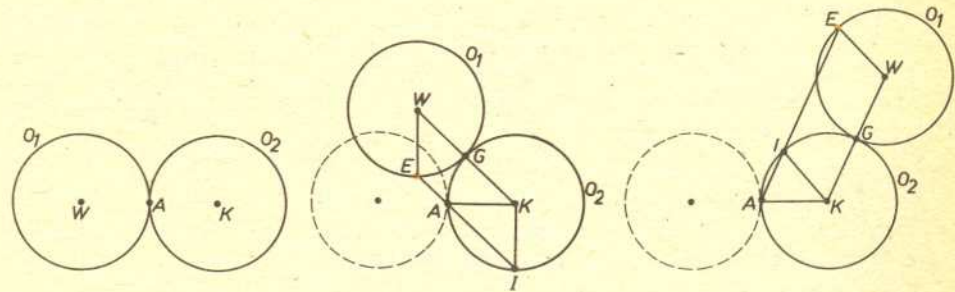
### Kardioida

Powróćmy jeszcze do równania (7'') ślimaka Pascala. Jeśli przyjmiemy  $s = 2u$ , to ten szczególny przypadek ślimaka Pascala nazywać będziemy *kardioidą* (rys. 13). Równanie kardioidy ma więc we współrzędnych biegunowych postać  $r = 2u(\cos \varphi + 1)$ .

Przekształćmy teraz parabolę przez inwersję o środku w jej ognisku i promieniu  $f$ . Stosując wzory (3) do równania paraboli ( $e = 1$ ) otrzymujemy równanie jej obrazu  $r = f(\cos \varphi + 1)$ , a jest to, jak widzimy, równanie kardioidy (rys. 14).

Kardioidę możemy otrzymać także w jeszcze inny sposób. Tym razem niczego nie będziemy liczyć. Będziemy za to toczyć. Zobaczymy, po jakim torze porusza się punkt okręgu, toczonego się po zewnętrznej stronie drugiego okręgu o takim samym promieniu  $r$ . Niech okrąg  $o_1$  toczy się po okręgu  $o_2$ . W pozycji wyjściowej okręgi te są styczne w punkcie  $A$  (rys. 15). Po przetoczeniu się okręgu  $o_1$  po łuku  $\widehat{AG}$  punkt  $A$ , którego drogi szukamy, znalazł się w punkcie  $E$ . Ponieważ łuki  $\widehat{AG}$  i  $\widehat{EG}$  są przystające, czworokąt  $EWKA$  jest trapezem równoramiennym. Stąd zaś wynika, że czworokąt  $EWKI$  jest równoległobokiem. W takim razie długość odcinka  $\overline{EI}$  równa jest  $2r$ , niezależnie od tego, jak daleko przetoczył się okrąg  $o_1$ . W takim razie punkt  $A$  porusza się po szczególnym przypadku ślimaka Pascala — po kardioidzie.

dr Jerzy BEDNARCZUK



Rys. 15



#### Rozwiązanie zadania M 344.

Przypuśćmy, że przekątne to tworzą trójkąt

$KLM$ . Z równości  $S_{ABCD} = S_{BCDE} =$

$$= \frac{1}{2} S_{ABCDEF} \text{ mamy } S_{ABK} = S_{KDE}$$

podobnie sprawdzamy, że  $S_{BMC} = S_{EMF}$

i  $S_{CLD} = S_{ALF}$ . Z równości kątów

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle DKE, \sphericalangle BMC = \sphericalangle EMF,$$

$$\sphericalangle CLD = \sphericalangle ALF \text{ mamy:}$$

$$AK \cdot BK = DK \cdot EK, CL \cdot DL = FL \cdot AL,$$

$$EM \cdot FM = BM \cdot CM, \text{ czyli}$$

$$(AL + LK)(BM + MK) = DK \cdot EK,$$

$$(CM + LM)(DK + KL) = AL \cdot FL,$$

$$(EK + KM)(FL + LM) = BM \cdot CM.$$

Mnożąc trzy ostatnie równości stronami otrzymamy:

$$(AL + LK)(BM + MK)(CM + LM) \\ (DK + KL)(EK + KM)(FL + LM) = \\ = DK \cdot EK \cdot AL \cdot FL \cdot BM \cdot CM, \text{ co wobec} \\ \text{nieujemności } KL, LM, KM \text{ jest możliwe} \\ \text{tylko wtedy, gdy } EL = LM = KM = 0, \\ \text{czyli gdy } K = L = M, \text{ co kończy dowód.}$$

H. Iwaniec w 1969 roku udowodnił, że sześciokąt jest (poza czworokątem) jedynym wielokątem o takiej własności.