Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Klub 44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w nr. $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

$$4-3\cdot\frac{\text{suma ocen za rozwiązania danego zadania}}{\text{liczba osób, które nadesłały choć jedno rozwiązanie z numeru}}$$

i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów (w dowolnym czasie) zostaje on członkiem Klubu, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w nr. 1/1984.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań z numeru 10/1983

Tomasz Biegański	- Lublin	47,53pkt
Małgorzata Czerniakowska-Gdańsk		42,54pkt
Marek Prauza	- Poraj	41,87pkt
Artur Smołczyk	- Tarnów Op.	38,68pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	32,87pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	32,01pkt
Jerzy Milczarek	- Gorzów Wlkp	31,30pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	30,08pkt

Współczynniki trudności zadań 64, 65, 66:
3,15   3,65   2,39

Pan Tomasz Biegański jest trzynastym członkiem "Klubu 44".

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Zadania nr 79, 80, 81

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1984

79. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych) układ równań:

$$2v = u+\frac{1}{u} \qquad 2x = v+\frac{1}{v} \qquad 2y = x+\frac{1}{x} \qquad 2u = y+\frac{1}{y}.$$

80. Łatwo pokryć płaszczyznę nie zachodzącymi na siebie przystającymi wypukłymi czworokątami lub sześciokątami. Czy istnieje podobne pokrycie płaszczyzny (tzw. parkietaż) przez przystające wypukłe:
a) pięciokąty, b) siedmiokąty, c) ośmiokąty? Czy zmieni się odpowiedź na te pytania, jeśli nie będziemy żądać wypukłości?

81. Liczby naturalne a, b spełniają warunki: $a \equiv -1 \pmod{b}$, $b \equiv 1 \pmod{2}$. Niech $c_n = a^{b^n}+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dowieść, że dla każdego n liczba c_{n+1} jest podzielna przez bc_n.

Zadanie **81** przysłał pan Andrzej Pawłowski z Zabrza.

Rozwiązania zadań z numeru 11/1983

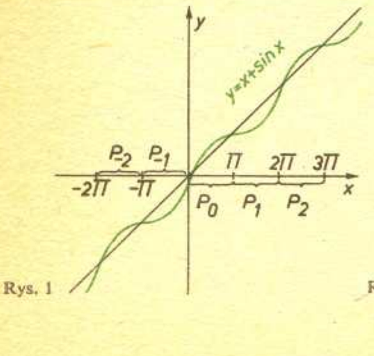
Przypominamy treść zadań:

67. Wyrazy szeregu $\sum a_n$ spełniają zależność: $a_n = \sin(a_1+\ldots+a_{n-1})$. Wykazać zbieżność tego szeregu i przedyskutować zależność jego sumy od wartości wyrazu początkowego a_1.

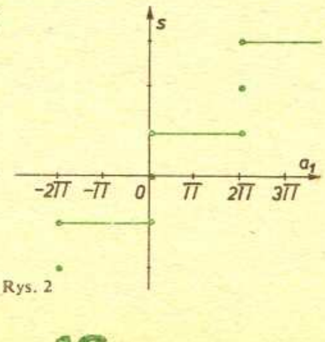
68. Boki AB, BC, CA trójkąta ABC o danym polu S podzielono na trzy równe części punktami A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, jak pokazuje rysunek 3. Obliczyć pole części wspólnej trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$.

69. Do turnieju pucharowego przystąpiło 1024 uczestników: 128 zawodowców (Z) (numery startowe 8, 16, 24, ...), reszta to amatorzy (A). W pojedynku Z z A, Z zwycięża z prawdopodobieństwem 0,6. System rozgrywek: nr 1 walczy z nr 2, nr 3 z nr 4 itd. W drugiej rundzie zwycięzca meczu 1/2 walczy ze ze zwycięzcą meczu 3/4 itd. Czy bardziej prawdopodobne jest zdobycie pucharu przez Z, czy przez A?

67. Oznaczmy przez x_1, x_2, ... sumy częściowe rozpatrywanego szeregu: $x_n = a_1+\ldots+a_n$. Z założenia $x_n-x_{n-1} = a_n = \sin x_{n-1}$. Zatem $x_n = f(x_{n-1})$, gdzie $f(x) = x+\sin x$. Granicą ciągu (x_n) może być tylko punkt stały funkcji f, czyli liczba postaci $k\pi$ (k całkowite). Punkty te dzielą oś rzeczywistą na przedziały $P_k = (k\pi, (k+1)\pi)$. Z przebiegu funkcji f wynika (rysunek 1), że jeśli $x \in P_k$, to także $f(x) \in P_k$, przy czym $f(x) > x$, gdy k jest parzyste, a $f(x) < x$, gdy k jest nieparzyste. Jeśli więc a_1 równa się jednej z liczb $k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, to (x_n) jest ciągiem stałym, o wyrazach równych tej liczbie. Jeśli natomiast a_1 należy do jednego z przedziałów P_k, to (x_n) jest ciągiem ograniczonym i monotonicznym, więc zbieżnym. Gdy k jest parzyste, ciąg (x_n) jest rosnący, a jego granicą (czyli sumą szeregu $\sum a_n$) jest prawy koniec przedziału P_k, czyli liczba $(k+1)\pi$. Gdy k jest nieparzyste, wartością graniczną jest lewy koniec P_k, czyli liczba $k\pi$. Rysunek 2 przedstawia zależność sumy $s = \sum a_n$ od wartości wyrazu początkowego a_1.

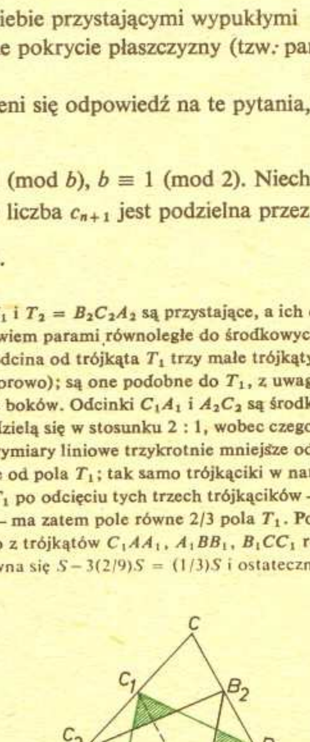


Rys. 1



Rys. 2

68. Trójkąty $T_1 = A_1B_1C_1$ i $T_2 = B_2C_2A_2$ są przystające, a ich odpowiednie boki są równoległe (są bowiem parami równoległe do środkowych trójkąta ABC). Brzeg trójkąta T_2 odcina od trójkąta T_1 trzy małe trójkąty narożne (na rysunku 3 zaznaczone kolorowo); są one podobne do T_1, z uwagi na wspomnianą równoległość boków. Odcinki C_1A_1 i A_2C_2 są środkowymi w trójkącie AA_2C_1, więc dzielą się w stosunku 2 : 1, wobec czego mały trójkąt przy wierzchołku A_1 ma wymiary liniowe trzykrotnie mniejsze od T_1, a pole dziewięciokrotnie mniejsze od pola T_1; tak samo trójkąciki w narożach B_1 i C_1. To, co zostaje z trójkąta T_1 po odcięciu tych trzech trójkącików — czyli sześciokąt $H = T_1 \cap T_2$ — ma zatem pole równe 2/3 pola T_1. Pozostaje zauważyć, że pole każdego z trójkątów C_1AA_1, A_1BB_1, B_1CC_1 równa się $(2/9)S$, tak, że pole T_1 równa się $S-3(2/9)S = (1/3)S$ i ostatecznie pole H równa się $(2/9)S$.



Rys. 3

69. Po trzech rundach rozgrywek pozostaje w turnieju 128 uczestników, po jednym z każdej „ósemki” zestawionej z numerów startowych 1—8, 9—16, 17—24 itd. Prawdopodobieństwo tego, że z danej ósemki awansuje do dalszych bojów Z wynosi $0{,}6^3$ (konieczność wygrania trzech pierwszych meczów). W każdym meczu czwartej rundy walczy więc para rywali w jednym z czterech możliwych zestawień: ZZ, ZA, AZ, AA; prawdopodobieństwa tych zestawień równe są odpowiednio p^2, pq, qp, q^2, gdzie $p = 0{,}6^3$, $q = 1-p$. W pierwszym i czwartym przypadku nie ma wątpliwości, czy zwycięzcą będzie Z czy A; w drugim i trzecim przypadku Z zwycięży z prawdopodobieństwem 0,6. Wobec tego zwycięzcą dowolnego meczu czwartej rundy — a więc uczestnikiem piątej rundy — będzie Z z prawdopodobieństwem $p^2+2pq\cdot 0{,}6 = p(6-p)/5$. Analogiczna sytuacja powtórzy się w każdej dalszej rundzie: na dowolnym miejscu startowym w n-tej rundzie rozgrywek stanie Z lub A, przy czym prawdopodobieństwo tego, że będzie to Z, zależy tylko od n. Oznaczmy je przez p_n; zatem $p_4 = 0{,}6^3 = 0{,}216$, a $p_5 = p_4(6-p_4)/5$. Powtarzając przeprowadzone wyżej rozumowanie dostajemy wzór rekurencyjny $p_{n+1} = p_n(6-p_n)/5$. Po dziesięciu rundach pozostaje niepokonany tylko jeden uczestnik — triumfator turnieju. Prawdopodobieństwo, że jest to Z wynosi p_{11} = (z wzoru rekurencyjnego) = 0,517 ...