mała delta

Zadanie Kopciuszka

Wyobraźcie sobie, że otrzymaliście wymieszane w pudełku małe i duże kulki z zadaniem rozdzielenia mieszaniny. W bajkach podobne zadania służą złym do nękania dobrych.

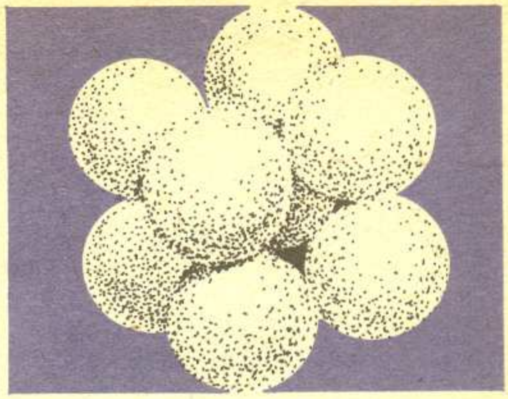
Spróbujmy znaleźć metodę mniej pracochłonną od wybierania kulka po kulce. Czy na przykład potrząsanie pudełkiem nie spowoduje „wypłynięcia" dużych lub małych kulek na powierzchnię?

Załóżmy najpierw, że pudełko wypełnione jest piaskiem i na powierzchni piasku leży ołowiana kula. Szybkie potrząsanie pudełkiem w płaszczyźnie poziomej powoduje pogrążanie się kuli w piasku. Podobnie ukryty w piasku drewniany przedmiot po chwili potrząsania wypływa na powierzchnię. Wibrujący sypki ośrodek ma wiele własności cieczy. Między innymi ciężkie ciała w nim toną, lekkie utrzymują się na powierzchni, a każda nierówność powierzchni szybko się rozpływa. W rezultacie zawsze środek ciężkości całości zajmuje położenie najniższe z możliwych.

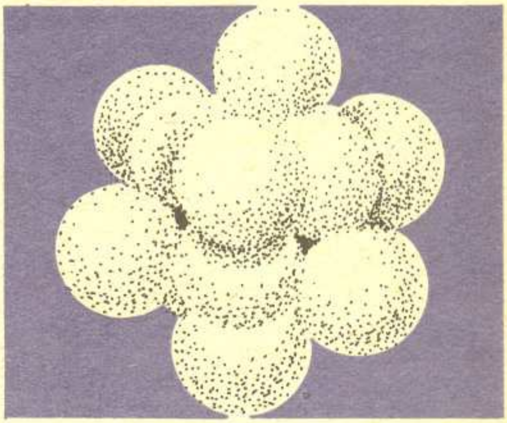
Żeby teraz rozstrzygnąć, które kulki, małe czy duże, znajdą się pod wpływem potrząsania na powierzchni, wystarczy rozstrzygnąć, jakie ich ułożenie odpowiada najniższemu położeniu środka ciężkości. W tym celu musimy znaleźć najgęstsze upakowanie obu rodzajów kulek.

Gęstość upakowania to stosunek objętości kulek znajdujących się w pudełku do objętości pudełka. Zakładamy przy tym, że pudełko zawiera tak dużo kulek, iż można nie uwzględniać jego kształtu.

Jednakowe kulki można upakować następująco. Pierwszą warstwę układamy tak, by środki kul tworzyły sieć kwadratową. Środki kul w drugiej i następnych warstwach umieszczamy dokładnie ponad środkami pierwszej warstwy (rys. 1). Upakowanie to jest bardzo nieekonomiczne — jego gęstość jest równa stosunkowi objętości kuli do objętości sześcianu na niej opisanego i wynosi 0,5236 ... Lepsze jest upakowanie, w którym każdą kulę drugiej warstwy wkładamy pomiędzy cztery kule pierwszej. Przy układaniu trzeciej warstwy musimy dokonać wyboru. Można teraz kłaść kule trzeciej warstwy dokładnie nad kulami pierwszej warstwy, a następnie czwartą warstwę nad drugą (rys. 2). Można też ułożyć trzecią warstwę tak, że dopiero kule czwartej warstwy leżą nad kulami pierwszej (rys. 3). W obu przypadkach gęstość upakowania jest taka sama i równa 0,7404 ... Okazuje się, że nie jest to najlepsze możliwe upakowanie. Gęstsze tworzy się w następujący sposób. Buduje się ciasno upakowane „grona" o różnych rozmiarach, a następnie próbuje się wypełnić nimi przestrzeń tak, aby pozostało jak najmniej pustych miejsc. W ten sposób postępują matematycy konstruujący coraz lepsze upakowania. To najlepsze nie jest do tej pory znane. Wiadomo jednak, że jego gęstość nie jest większa niż 0,7796 ...

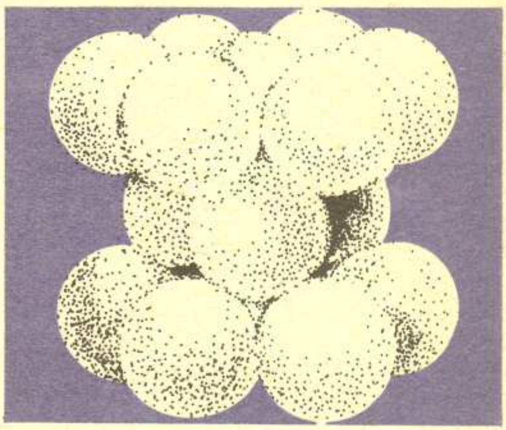


Rys. 1



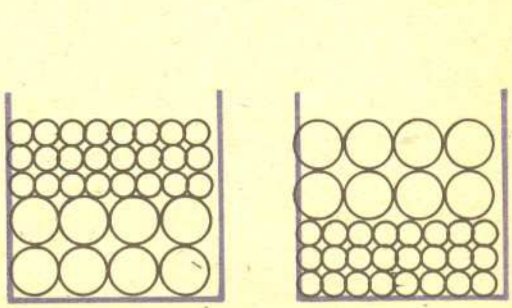
Rys. 2

Wróćmy teraz do problemu upakowania kul o różnych promieniach. Zauważmy, że gęstość upakowania jednakowych kul nie zależy od ich promienia. Dlatego środek ciężkości w obu przypadkach przedstawionych na rysunku 4 znajduje się na tej samej wysokości. Tak więc wynikiem wibracji nie będzie z pewnością całkowite rozdzielenie kulek.



Rys. 3

Z reguły maksymalna gęstość upakowania kul różnych wielkości przewyższa maksymalną gęstość upakowania jednakowych kul. Tak jest na przykład wtedy, gdy małe kule mieszczą się w pustych miejscach między maksymalnie upakowanymi dużymi kulami. Pod wpływem wibracji zawsze gęsta mieszanina znajdzie się na dnie, a na powierzchni pozostaną duże kule, jeśli w pudełku było zbyt wiele dużych, albo małe, jeśli zbyt wiele małych.



Rys. 4

Małą Deltę przygotował Maciej JĘDRZEJCZAK