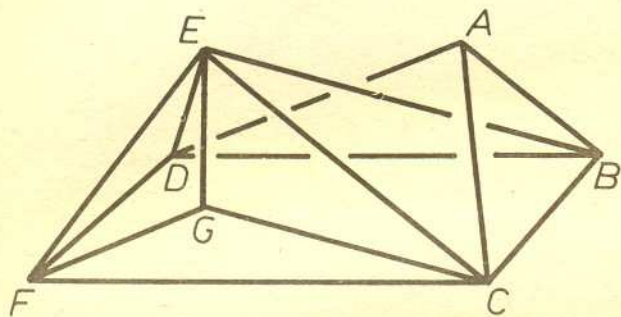


Naprawdę się rusza

W *Małej Delcie* w poprzednim numerze podaliśmy siatki dwóch ruchomych wielościanów. Teraz, zgodnie z zapowiedzią, przedstawimy dowód, że wielościan Connelly'ego jest naprawdę ruchomy. Dowód taki jest niezbędny, bo istnienie tekturnego modelu, który się rusza, może wynikać z niedokładności wykonania, sprężystości i elastyczności tekturny itp. Na zakończenie podamy jeden z takich przykładów.

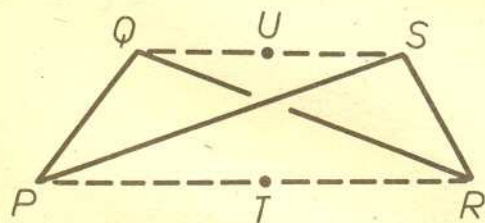
Pod tekstem jest reprodukowana siatka wielościanu Connelly'ego, którego ten dowód dotyczy. Podane też są długości poszczególnych krawędzi. Wygodnie skleja się taki wielościan, gdy $a \geq 1$ cm.

A teraz zaczynamy dowód. Wykonajmy (może być w wyobraźni) model krawędziowy jak na rysunku 1. Zauważmy, że wszystkie powstałe trójkąty (jest ich 6) możemy pokryć tekturną bez wpływu na ruchomość otrzymanej figury (nie jest ona wielościanem). Otrzymana figura rusza się. Mianowicie, trzymając punkty C i D na jednym poziomie możemy punkty B i F przemieścić w dół. Cztery trójkąty o wierzchołku E stanowią powierzchnię boczną ostrosłupa, a więc nie przeszkadzają w ruchu — po prostu krawędzie EB i EF zbliżają się. Punkt A , jako należący tylko do dwóch ścian, też nie ogranicza ruchu.



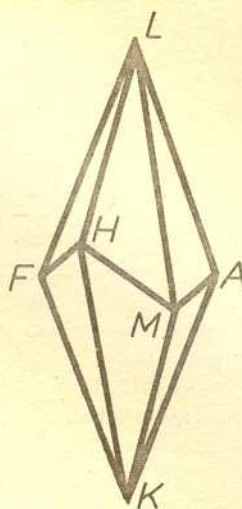
Rys. 1. $BCFD$ to prostokąt, ABC i DEF to trójkąty równoboczne, $AD = BE = CE$.

A teraz zadanie pomocnicze: jeśli $PQ = RS$ i $PS = RQ$ oraz środki T i U odcinków PR i QS są różne, to prosta TU jest prostopadła do obu tych odcinków. Jak łatwo zauważyć, wystarczy wykazać, że $TU \perp PR$, to zaś wynika z przystawiania trójkątów PTU i RTU ($PT = RT$ z założenia, TU wspólne, PU i RU to środkowe w przystających trójkątach PQS i RSQ — rys. 2).



Rys. 2

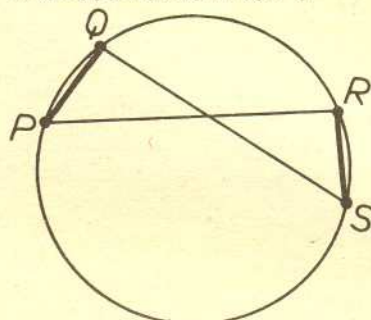
Z tego zadania wynika, że łamana zamknięta $BCFD$ ma w każdym położeniu oś symetrii — prostą łączącą środki BF i CD . Ponieważ punkt A jest połączony z B , C i D krawędziami o takich samych długościach jak krawędzie łączące E z F , D i C , więc punkty A i E leżą symetrycznie względem tej samej osi. Stąd mamy (choć tego nie zakładaliśmy) $AF = EB$ — odległość AF jest stała.



A teraz zupełnie inna figura — budujemy model krawędziowy jak na rysunku 3. Pokrywamy tekturną wszystkie 6 trójkątów. Otrzymana figura się rusza — możemy mianowicie zbliżyć (bądź oddalić) punkty K i L . Pozostałe wierzchołki będą wtedy leżały na płaszczyźnie symetralnej odcinka KL , co więcej — na pewnym (zależnym od odległości KL) okręgu.

Rys. 3. Wszystkie krawędzie wychodzące z K i z L są równe oraz $AM = FH$.

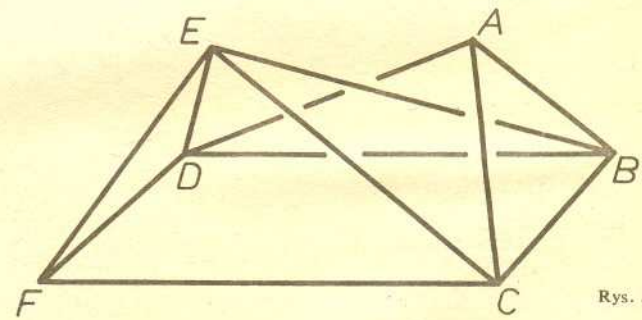
Znów zadanie pomocnicze: jeśli punkty P, Q, R, S leżą kolejno na okręgu i $PQ = RS$, to $PR = SQ$. Wobec równości cięciw PQ i RS mamy równość łuków \widehat{PQR} i \widehat{QRS} , a więc i równość zamykających je cięciw (rys. 4).



Rys. 4

Z zadania tego wynika, że w dowolnym położeniu modelu z rysunku 3 odległość AF jest równa odległości MH , a więc stała.

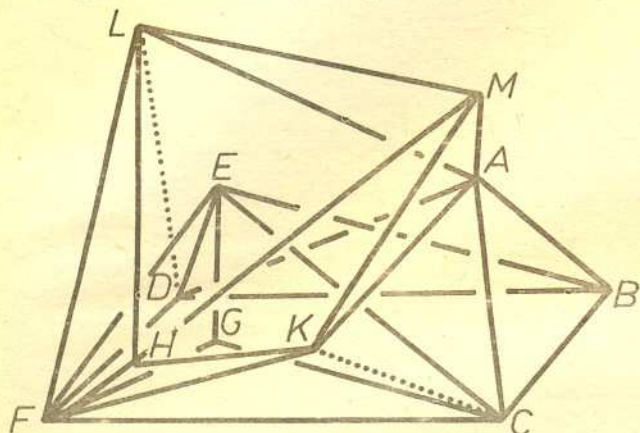
Dobranie w obu modelach tych samych nazw dla końców odcinków o stałej długości sugeruje, że chcemy te punkty zlepić. Ustawmy model z rysunku 3 (w którym AF jest tej samej długości co AF z rysunku 1) tak, by punkt M był wysunięty ku nam i zlepijmy punkty A i F obu modeli. Nie da się! Przeszkadza mianowicie ściana CEF i punkt H , który „chciałby” ją przebić. Trudno, musimy zmodyfikować model z rysunku 1 robiąc wnękę na punkt H — zastępujemy ścianę CEF trzema innymi (rys. 5).



Rys. 5

Teraz już można punkty A , jak też punkty F , zlepić. Każdy ze zlepionych modeli może się teraz poruszać niezależnie, choć mniej — ruch modelu z rysunku 1 (a właściwie 5) z jednej strony jest ograniczony przez ściany ABD i EDB (dlatego mówiliśmy o ruchu B i F w dół, a nie w górę), choć to ograniczenie miał i przed sklejeniem z modelem z rysunku 3. Ma jednak teraz i ograniczenie z drugiej strony — przez dotknięcie krawędzi CE do (podobnej de litery Z) łamanej $AMHF$, a dokładniej jej odcinka MH . To samo ogranicza ruch drugiego ze sklepanych modeli.

Model otrzymany po sklejeniu nie jest, oczywiście, wielościanem — ma 8 luźnych krawędzi (AC, FC, AD, FD — pierwszy i AK, FK, AL, FL — drugi). Z podanych nazw wynika, że zaklejamy otwory czterema trójkątami: AKC, FKC, ALD i FLD . I praca zakończona. Model się rusza, choć teraz obie części razem. Ale nowe ograniczenia ruchu nie powstały.

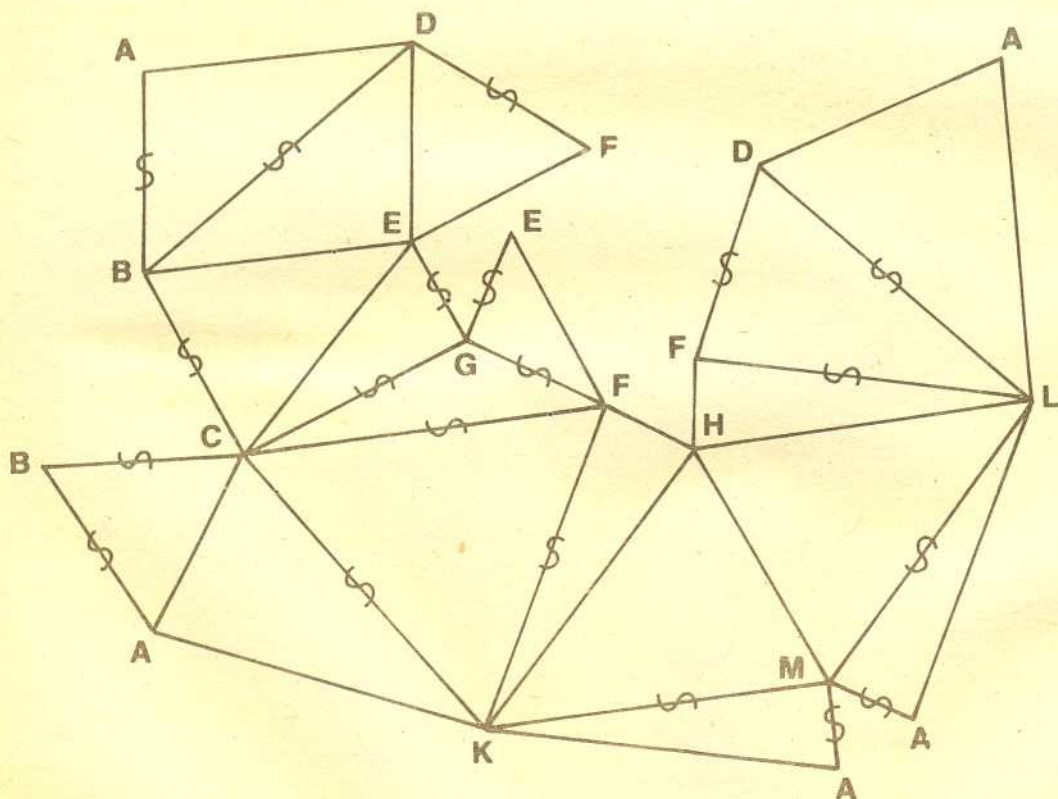


Rys. 6

Jedynym kłopotem przy budowie siatki wielościanu jest właściwy dobór proporcji odcinków AF, AM i AK . Chodzi o to, by końcowe zaklejenie było możliwe. Dlatego podaliśmy dokładne wymiary.

Radzimy w wykonanym (lepiej z siatki, niż stopniowo według przebiegu dowodu) wielościanie zrobić okrągłe okienko w ścianie CFK i przez nie oglądać, jak podczas poruszania punktami B i F (lub K i L) krawędzie CE i MH dotykają się i oddalają.

A teraz obiecany wielościan o oszukanym ruchu. Dwa jednakowe ośmiokąty foremne dzielimy na połowy, następnie sklejamy z nich cztery ostrosłupy bez podstaw. Z nich — dwa ośmiościąny o dwóch nie sklejonych krótszych krawędziach. Ustawiamy osie tych ośmiościąnów pod kątem prostym i łączymy



- $AB = AC = BC = DE =$
- $= DF = EF = 9a,$
- $AD = BE = CE = HM = 12a,$
- $AK = AL = FK = FL =$
- $= HK = HL = KM = LM =$
- $= 15a,$
- $AM = FH = 4a,$
- $BD = CF = CK = DL = 16a,$
- $CG = 11a,$
- $EG = 5a,$
- $FG = 7a.$

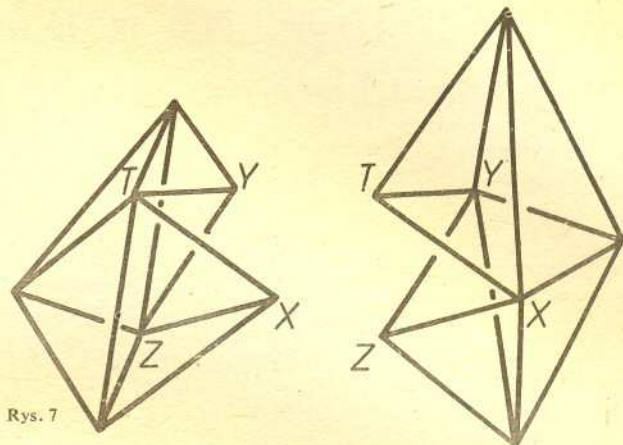
Opracowali

dr Jerzy

BEDNARCZUK

i dr hab. Marek

KORDON



Rys. 7

je „otwartymi pyszczkami”. Ten piękny przykład podał nam Tadeusz Wojszcza.

Posiadany przez nas model tego wielościanu rusza się — każdy z ośmiościąnów można przez ściśnięcie w „kącikach ust” rozpląszczyć, a wówczas drugi „zamyka pyszczek” i staje się regularnym ośmiościąnem. Ruch uzyskany przez spłaszczenie na zmianę lewego bądź prawego ośmiościąnu jest znacznie większy niż w wielościanie Connelly’ego. Jak jednak przekonać się, że to oszustwo?

My użyliśmy takiego sposobu. Znaleźliśmy funkcję f , która odległości „kącików ust” przyporządkowuje odległość „czubków warg”. Zatem z lewej jest $f(TZ) = XY$, a z prawej $f(XY) = TZ$. A więc musi być $ff(\alpha) = \alpha$ dla każdej liczby α z przedziału

$\left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot XZ \right\rangle$. (Czytelnik zechce uzasadnić, że w takim właśnie

zakresie zmienia się zarówno XY , jak TZ .) Sprawdziliśmy, czy $ff(\alpha) = \alpha$ i okazało się, że tak nie jest. Obliczając $ff(\alpha)$ dla α branych co $0,05 \cdot XZ$ największą różnicę $|ff(\alpha) - \alpha|$ otrzymaliśmy dla $\alpha = 0,2 \cdot XZ$ i wyniosła ona $0,1 \cdot XZ$. Ale może, przy jakiejś zmianie proporcji, model Wojszcza będzie się ruszał? Nie wiemy.