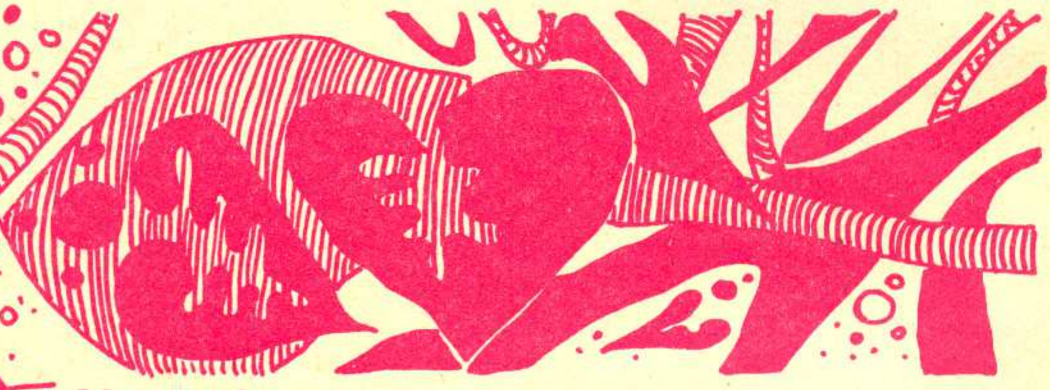
II. Na żadnej prostej nie leżą punkty wszystkich trzech kolorów.

Załóżmy, że jest inaczej. Przesuwając prostą, na której leżą punkty wszystkich trzech kolorów, równolegle w ten sposób, by punkt zielony przeszedł na (0,0) i korzystając z I. możemy założyć, że punkt czerwony (x_1, y_1) i niebieski (x_2, y_2) leżą na prostej przechodzącej przez (0,0). Istnieje więc liczba λ taka, że $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$. Zatem $\|x_1\| = \|\lambda\|\|x_2\|$, $\|y_1\| = \|\lambda\|\|y_2\|$. Ponieważ $\|x_1\| < \|y_1\|$ i $\lambda \neq 0$, więc $\|x_2\| < \|y_2\|$, co jest niemożliwe.

Załóżmy, że kwadrat o wierzchołkach (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) podzielono na n trójkątów o równych polach. Wierzchołek (0,0) jest zielony, (0,1) – czerwony, a dwa pozostałe – niebieskie. W myśl 2, któryś z trójkątów podziału ma różnokolorowe wierzchołki. Przesuńmy ten trójkąt równolegle tak, by wierzchołek zielony przeszedł na (0,0). Z I. wynika, że pozostałe wierzchołki nie zmienią kolorów. Załóżmy, że po przesunięciu wierzchołkiem czerwonym jest (x_1, y_1), a niebieskim – (x_2, y_2). Pole trójkąta o wierzchołkach (0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) jest równe $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$. Ponieważ $\|x_1\| < \|y_1\|$ i $\|x_2\| \geq \|y_2\|$, więc $\|x_1 y_2\| < \|x_2 y_1\|$. Zatem $\|\frac{1}{n}\| = \|\frac{1}{2}\|\|x_2\|\|y_1\| \geq 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. Wynika stąd, że n jest liczbą parzystą, gdyż jak zauważyliśmy, dla nieparzystego n mamy $\|\frac{1}{n}\| = 1$.

doc.dr Edmund PUCZYŁOWSKI



Martyngały

Jak dobrze wiadomo Czytelnikom *Delty*, przy wielokrotnym rzucie symetryczną monetą do uzyskania orła potrzebne są średnio dwa rzuty (zadanie **M 469** *Delta* 5/1987). Jasne jest, że taka sama jest średnia liczba rzutów potrzebna do otrzymania reszki. A co się dzieje przy oczekiwaniach na serię długości dwa? Wówczas sytuacja zmienia się radykalnie. Jak nietrudno sprawdzić, średnia liczba rzutów potrzebna do uzyskania dwóch orłów pod rząd jest 6, natomiast dla uzyskania serii **(O,R)** potrzeba średnio tylko 4 rzuty. Różnice te są jeszcze bardziej widoczne przy oczekiwaniach na dłuższe serie; i tak na przykład do uzyskania serii **(O,O,R,R,O,O)** potrzeba średnio 70 rzutów, dla serii **(O,O,O,O,O,O)** aż 126, podczas gdy dla serii **(O,O,O,O,O,R)** wystarczają średnio 64 rzuty, czyli prawie dwukrotnie mniej! Obliczenie czasów oczekiwania w tym przypadku wymaga dość żmudnych rachunków. Okazuje się jednak, że przy użyciu podstawowych faktów z teorii martyngałów można łatwo wyliczać średnie czasy oczekiwania na serię dowolnej (skończonej) długości przy wielokrotnym powtarzaniu doświadczenia nawet bardziej skomplikowanego niż rzut monetą.

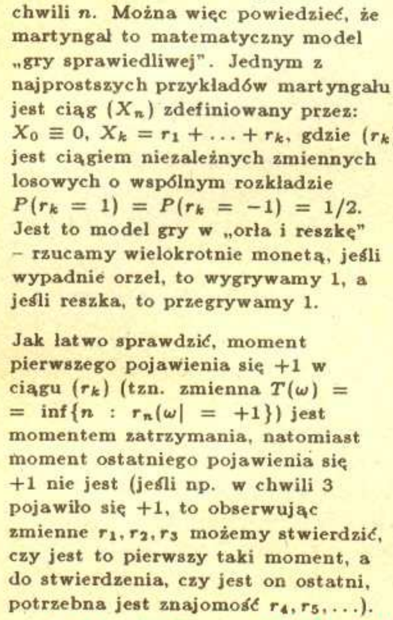
Sprecyzujmy dokładnie problem. Załóżmy, że powtarzamy wielokrotnie doświadczenie losowe Z, w pojedynczej próbie możemy otrzymać co najwyżej przeliczalną liczbę wyników (każdy z dodatnim prawdopodobieństwem). Oznaczmy zbiór tych wyników przez W. Niech $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ będzie dowolnym ciągiem, którego wyrazami są elementy zbioru W i oznaczmy przez T_A pierwszy moment pojawienia się serii A w ciągu powtórzeń doświadczenia Z. Pytamy się, ile razy trzeba średnio powtórzyć doświadczenie Z, by uzyskać serię A.

Probabilistyczny model jest następujący: dana jest dyskretna zmienna losowa Z o zbiorze wartości W oraz ciąg $(Z_1, Z_2, \ldots)$ niezależnych zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej (Ω, P) o rozkładach prawdopodobieństwa takich samych jak rozkład Z. Wtedy T_A jest zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych, określoną następująco

$$T_A(\omega) = \min\{k : Z_k(\omega) = a_m, \quad Z_{k-1}(\omega) = a_{m-1}, \ldots, Z_{k-m+1}(\omega) = a_1\}.$$

Intuicyjny sens pojęcia martyngału jest następujący: wyobraźmy sobie hazardzistę grającego w pewną grę i niech X_n oznacza jego łączną wygraną w chwili n. Liczbę $\frac{1}{P(A)} \int_A X_{n+1} \mathrm{d} P$ interpretuje się w rachunku prawdopodobieństwa jako średnią wartość przyjmowaną przez X_{n+1}, jeśli wiadomo, że zaszło zdarzenie A. Równość w definicji martyngału mówi więc, że niezależnie od przebiegu gry do chwili n średnia wygrana w chwili $n+1$ będzie taka sama jak średnia wygrana w chwili n. Można więc powiedzieć, że martyngał to matematyczny model „gry sprawiedliwej". Jednym z najprostszych przykładów martyngału jest ciąg (X_n) zdefiniowany przez: $X_0 \equiv 0$, $X_k = r_1 + \ldots + r_k$, gdzie (r_k) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $P(r_k = 1) = P(r_k = -1) = 1/2$. Jest to model gry w „orła i reszkę" – rzucamy wielokrotnie monetą, jeśli wypadnie orzeł, to wygrywamy 1, a jeśli reszka, to przegrywamy 1.

Jak łatwo sprawdzić, moment pierwszego pojawienia się $+1$ w ciągu (r_k) (tzn. zmienna $T(\omega) = \inf\{n : r_n(\omega| = +1\}$) jest momentem zatrzymania, natomiast moment ostatniego pojawienia się $+1$ nie jest (jeśli np. w chwili 3 pojawiło się $+1$, to obserwując zmienne r_1, r_2, r_3 możemy stwierdzić, czy jest to pierwszy taki moment, a do stwierdzenia, czy jest on ostatni, potrzebna jest znajomość $r_4, r_5, \ldots$).



Na podstawie artukułu Shuo-Yen Robert Li, *A martingale approach to the study of occurence of sequence patterns in repeated experiments*, Annals of Probability 8(1980), 1171-1176.

Natomiast średni czas oczekiwania na serię A to po prostu wartość oczekiwana zmiennej losowej T_A. Aby podać wzór na tę wartość, wprowadzimy jeszcze jedno oznaczenie. Dla dwóch (być może różnej długości) ciągów $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ i $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ o wyrazach z W określamy

$$d_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{P(Z=a_j)}, & \text{jeśli } a_j = b_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ oraz

$$B \star A = d_{1,1} \cdot d_{2,2} \cdot \ldots \cdot d_{n,n} + d_{2,1} \cdot d_{3,2} \cdot \ldots \cdot d_{n,n-1} + \ldots + d_{n-1,1} \cdot d_{n,2} + d_{n,1}.$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie

$$(*) \qquad \mathrm{E}T_A = A \star A.$$

Fakt ten można łatwo udowodnić korzystając z teorii martyngałów.

Cóż to takiego jest martyngał? Dla naszych rozważań wystarczy ograniczyć się do przypadku dyskretnych zmiennych losowych. Ciąg $(X_0, X_1, \ldots)$ takich zmiennych jest martyngałem, jeśli dla dowolnego $n \geq 1$ średnia wartość zmiennej losowej X_{n+1} na zbiorze, gdzie zmienne $X_0, X_1, \ldots, X_n$ przyjmują ustalone wartości, jest taka sama jak wartość zmiennej X_n na tym zbiorze, tzn. dla dowolnego ciągu $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ spełniona jest równość

$$\int_C X_{n+1} = \int_C X_n = z_n \cdot P(X_0(\omega) = z_0, \ldots, X_n(\omega) = z_n),$$

gdzie $C = \{\omega : X_0(\omega) = z_0, \ldots, X_n(\omega) = z_n\}$.

Wynika stąd w szczególności, że

$$\mathrm{E}X_{n+1} = \mathrm{E}X_n = \ldots = \mathrm{E}X_0.$$

Przez moment zatrzymania względem martyngału (X_n) będziemy rozumieć taką zmienną losową T przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych, że dla dowolnego $n \geq 1$ zbiór $\{\omega : T(\omega) = n\}$ należy do rozbicia Ω wyznaczonego przez zmienne $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ (rozbiciem Ω wyznaczonym przez zmienne $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ nazywamy rodzinę zbiorów postaci $\{\omega : X_0(\omega) = z_0, \ldots, X_n(\omega) = z_n\}$, gdzie z_i przebiega wszystkie możliwe wartości zmiennej losowej X_i dla $i = 0, 1, \ldots, n$). Innymi słowy moment zatrzymania to taka zmienna losowa, o której możemy stwierdzić czy przyjęła wartość n obserwując zmienne losowe $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Następujące twierdzenie ma podstawowe znaczenie w teorii martyngałów:

Twierdzenie (Doob). Jeśli (X_n) jest martyngałem, a T takim momentem zatrzymania, że $\int |X_{T(\omega)}(\omega)| \mathrm{d} P(\omega) < \infty$, oraz $\sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} \int_{\{\omega : T(\omega) > k\}} |X_k| \mathrm{d}P = 0$, to ciąg (X_0, X_T) jest martyngałem. W szczególności $\mathrm{E}X_0 = \mathrm{E}X_T$.

Wróćmy do wzoru $(*)$. Aby go udowodnić, zdefiniujmy ciąg (X_n)

$$X_0 \equiv 0, \quad X_k(\omega) = (Z_1(\omega), \ldots, Z_k(\omega)) \star A - k.$$

Pominiemy tu sprawdzenie, że ciąg (X_n) jest martyngałem, a T_A momentem zatrzymania spełniającym założenia twierdzenia Dooba. Zauważmy, że

$$X_{T_A(\omega)}(\omega) = (Z_1(\omega), \ldots, Z_{T_A(\omega)}(\omega)) \star A - T_A(\omega).$$

Ale ostatnie m wyrazów ciągu $(Z_1(\omega), \ldots, Z_{T_A(\omega)}(\omega))$ jest takie jak wyrazy serii A i $T_A(\omega)$ jest pierwszym takim momentem zatrzymania. W związku z tym

$$(Z_1(\omega), \ldots, Z_{T_A(\omega)}(\omega)) \star A = A \star A.$$

Stosując teraz twierdzenie Dooba otrzymujemy

$$0 = \mathrm{E}X_0 = \mathrm{E}X_{T_A} = A \star A - \mathrm{E}T_A,$$

co dowodzi wzoru $(*)$.

Wróćmy wreszcie do rzutu monetą. Tutaj Z jest zmienną losową przyjmującą wartość **O** lub **R**, każdą z prawdopodobieństwem $1/2$, Z_i oznacza i-ty rzut monetą, a $d_{i,j}$ jest równe 0 bądź 2. Dla dowolnej serii A o długości m pierwszy składnik sumy $A \star A$ jest różny od zera i jest równy 2^m. Jeśli wszystkie wyrazy serii A są równe, to również następne składniki $A \star A$ są różne od zera (i są odpowiednio równe $2^{m-1}, 2^{m-2}, \ldots, 2$). Średni czas oczekiwania na taką serię jest więc równy $2^m + 2^{m-1} + \ldots + 2 = 2^{m+1} - 2$. Natomiast, jeśli ostatni wyraz serii A jest różny od wszystkich poprzednich, to wszystkie składniki $A \star A$ poza pierwszym są zerami i średni czas oczekiwania jest równy 2^m.

Opracował dr Paweł HITCZENKO