Jak pamiętać obrazy?

Dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

Kształty przedmiotów stworzonych przez człowieka – domów, samolotów, przedmiotów codziennego użytku – dają się zazwyczaj opisać bardzo oszczędnie – niewielką ilością informacji. Do opisu zwykłego stołu wystarczy podać długość, szerokość i grubość blatu, miejsca umocowania nóg, ich długość, grubość i ewentualne usztywnienia – w sumie kilkanaście lub kilkadziesiąt cyfr. Pamięć przeciętnego komputera może pomieścić informacje niezbędne do odtworzenia rysunków dużego domu, samochodu czy obrabiarki, o czym dobrze wiedzą np. użytkownicy programu-instytucji AutoCAD.

Zupełnie inaczej dzieje się, gdy mamy opisać kształt „wzięty z natury", na przykład liść paproci, głazy, o które rozbija się fala czy ośnieżony górski las. Do niedawna jedyną metodą zapamiętania takiego obrazu w postaci cyfrowej było opisywanie (przy zadanej rozdzielczości, czyli gęstości elementów obrazu) koloru i jasności kolejnych punktów. Barwny obraz o „telewizyjnej" rozdzielczości 640 linii po 1000 punktów w 64 kolorach wymaga przy takim zapisie $10\,000 \cdot 2^{12} \cong 40\,000\,000$ bitów.

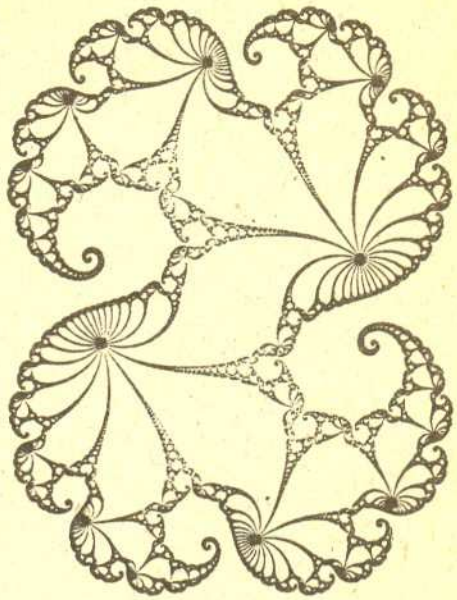
Można wprawdzie streścić nieco tę informację zastępując sekwencje powtarzających się kolorów kolejnych punktów przez skrócony zapis ich ilości, jednak rzadko można w ten sposób osiągnąć zysk większy niż 60–80%. Widać więc wyraźnie trudności operowania tak wielkimi zbiorami danych, nawet gdy uwzględnimy szybkość współczesnych komputerów.

Dodatkowy problem stwarza sztywność takiego zapisu: bardzo trudno na przykład obrócić, zmniejszyć czy zwiększyć obraz zapisany taką mapą bitową, gdy wybierzemy skalę powiększenia czy kąt obrotu spoza bardzo ograniczonego zbioru wartości.

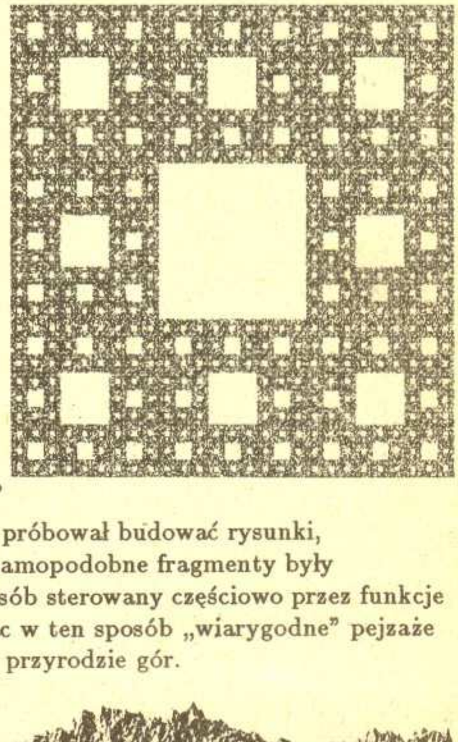
Stosunkowo niedawno opublikowano jednak dość szokujący wynik: istnieje metoda pozwalająca „streścić" opis skomplikowanych kształtów natury do setek czy najwyżej tysięcy bitów. Otrzymywanymi przy tym danymi można łatwo manipulować – odzwierciedlają one bowiem w pewnym sensie naturę przedstawianych kształtów.

U podstaw teoretycznych proponowanej metody leży pojęcie fraktali, czyli zbiorów wymiaru ułamkowego, znanych już od dawna, lecz intensywnie badanych i propagowanych dopiero w ostatnich kilkunastu latach przez Benoit Mandelbrota, autora pięknej książki o „Fraktalnej geometrii natury" (*The fractal geometry of nature*). Istotną własnością fraktali, na którą zwrócił uwagę Mandelbrot, jest ich „samopodobieństwo": we fraktalu można odnaleźć fragmenty w mniej lub bardziej ścisłym tego słowa znaczeniu podobne do całego fraktala lub innej, większej jego części.

Zjawisko to widać wyraźnie na rysunkach tzw. zbioru Julii (czyt. żulii) i dywanu Sierpińskiego.

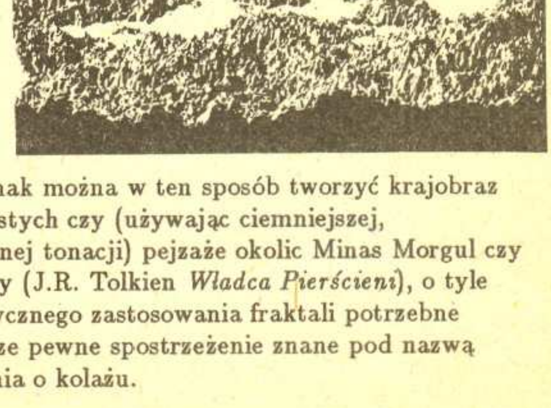


Zbiór Julii



Dywan Sierpińskiego

Sam Mandelbrot próbował budować rysunki, w których takie samopodobne fragmenty były zestawiane w sposób sterowany częściowo przez funkcje losowe otrzymując w ten sposób „wiarygodne" pejzaże nieistniejących w przyrodzie gór.



O ile jednak można w ten sposób tworzyć krajobraz Gór Mglistych czy (używając ciemniejszej, szaroczarnej tonacji) pejzaże okolic Minas Morgul czy Orodruiny (J.R. Tolkien *Władca Pierścieni*), o tyle do praktycznego zastosowania fraktali potrzebne jest jeszcze pewne spostrzeżenie znane pod nazwą twierdzenia o kolażu.

Aby sformułować twierdzenie o kolażu, przypomnijmy parę podstawowych faktów z teorii odwzorowań afinicznych płaszczyzny, czyli przekształceń, które można otrzymać przez składanie podobieństw, obrotów, symetrii i powinowactw osiowych. Każde takie przekształcenie można we współrzędnych kartezjańskich zapisać w postaci:

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f\,,$$

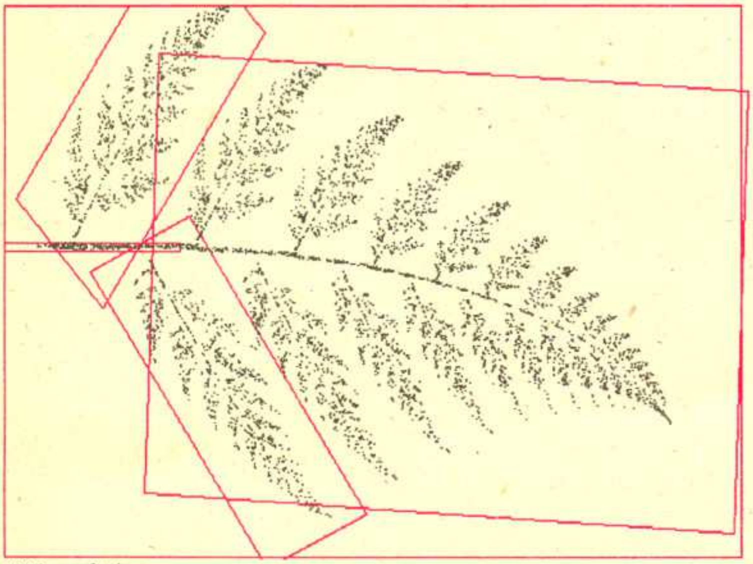
gdzie a, b, c, d, e, f są liczbami rzeczywistymi. Wektor o składowych $[c, f]$ opisuje przy tym przesunięcie, a liczby a, b, d, e opisują tzw. część liniową przekształcenia. W szczególności liczba $|ae - bd|$ jest stosunkiem powierzchni figury przekształconej do powierzchni jej pierwowzoru, a $\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{b^2 + e^2}$ jest górnym ograniczeniem stosunku, w jakim przekształcenie zmienia odległości punktów.

Przypuśćmy teraz, że pewien podzbiór płaszczyzny ma tę własność, iż da się przedstawić jako suma swoich obrazów przy przekształceniach afinicznych **zwężających,** tzn. zmniejszających odległości między punktami. Przykładowo, liść paproci możemy pokryć czterema zaznaczonymi na rysunku podzbiorami: liściem skróconym o pierwsze dwa boczne listki, dwoma listkami i odcinkiem łodyżki. Widoczne na rysunku równoległoboki to obrazy ramki przy kolejnych przekształceniach f_1, f_2, f_3 i f_4.

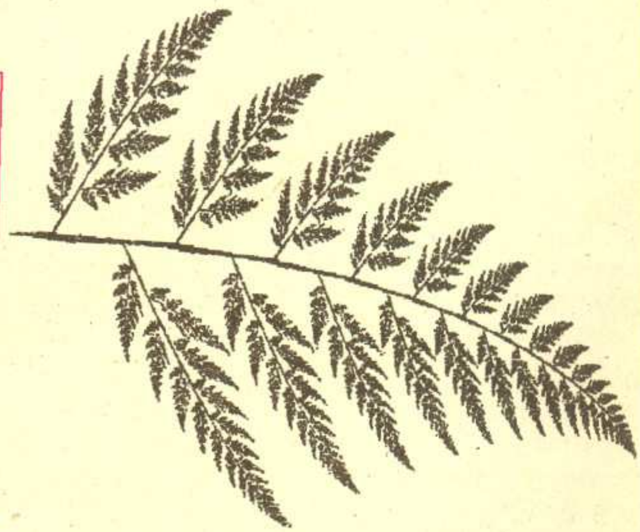
Szybkość rysowania obrazków:
na XT z koprocesorem około 1000 pkt./s,
na 386 z koprocesorem około 6000 pkt./s,
na XT bez koprocesora około 100 pkt./s.

```
4.                   ilosc przekszt.
.24..0,.0,           kolejne
.0..015,.0.          macierze
.22,.23,.54,         przeksztalcen
-.26,.2,.0,
.24,.26,1.4,
.28,-.1,.0,
.8,-.036,1.6,
.036,.8,.0,
0.,9.,-1.8,2.3,:rozmiary obrazu
```

1000 punktów



6000 punktów



36000 punktów

Uruchamiamy teraz następującą procedurę:

Krok 1: Wybieramy dowolny punkt płaszczyzny p_o i przyjmujemy $n = 0$;

Krok 2: Losujemy jedno z przekształceń wybranych do opisu rysunku i znajdujemy punkt p_{n+1} będący obrazem punktu p_n przy wylosowanym przekształceniu;

Krok 3: Gdy $n > 20$, zaznaczamy na rysunku punkt p_{n+1};

Krok 4: Zwiększamy n o jeden i wracamy do kroku 2.

Rozsądnie jest losować przekształcenia tak, by prawdopodobieństwo wylosowania f_k było proporcjonalne do współczynnika zmiany powierzchni s_k podanego powyżej. Można w tym celu np. podzielić przedział $[0, 1)$ na przedziały $[a_k, a_{k+1})$, gdzie $a_k = (s_1 + \ldots + s_{k-1})/(s_1 + \ldots + s_n)$ i losując liczbę u: $0 \leq u < 1$ wybierać f_k takie, że $u \in [a_k, a_{k+1})$. Aby uniknąć nadmiernej dyskryminacji przekształceń silnie zmniejszających pole, można w powyższej metodzie skorygować nieco wartości s_k, np. przez dodanie stałej 0,001.

Kilkanaście pierwszych punktów może jeszcze leżeć poza właściwym rysunkiem. Przekształcenia f_i jako zwężające ściągają jednak punkty w obszar rysunku, a tam ich zachowanie jest już zgodne z twierdzeniem o kolażu.

Realizacja takiej procedury nie nastręcza poważniejszych trudności, gdy mamy dostęp do komputera o rozsądnych możliwościach graficznych – wystarczy tu popularne Spectrum czy Atari, choć o wiele efektowniejsze wyniki zobaczymy na komputerze klasy PC z grafiką Hercules. Gdy zażądamy wyświetlenia np. 5 000 punktów, będziemy mogli obserwować, jak w cudowny nieomal sposób z rozrzuconych po ekranie punktów zacznie się wyłaniać kształt liścia. Sprawdzamy w ten sposób praktycznie właśnie **twierdzenie o kolażu** mówiące, że:

Jeżeli podzbiór płaszczyzny A daje się przedstawić jako suma swoich obrazów przy zwężających przekształceniach afinicznych $f_1, \ldots, f_n$, to punkty otrzymane przez zastosowanie opisanej wyżej procedury będą coraz dokładniej wypełniać zbiór A.

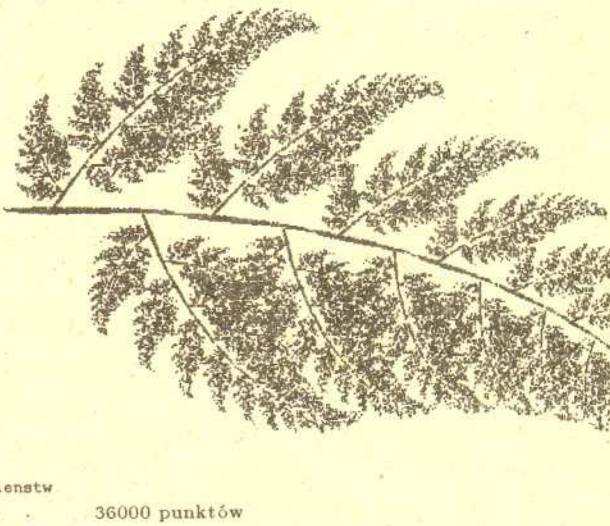
Łatwo zauważyć, że obrazem punktu należącego do A będzie znów punkt z A – wynika to stąd, że dla każdego i mamy $f_i(A) \subset A$. Można również sprawdzić, choć jest to trudniejsze, że dowolnie blisko dowolnego punktu z A znajdzie się po pewnej liczbie iteracji któryś z kolejno otrzymywanych punktów.

Warto poeksperymentować nieco z opisanym algorytmem, którego zapis w „uogólnionym języku komputerowym" przedstawiamy poniżej. Można się na przykład przekonać, że drobne zaburzenia danych wejściowych, czyli układów liczb opisujących kolejne przekształcenia f_i, powodują nieznaczne zniekształcenia rysunku, pozwalające jednak na natychmiastowe rozpoznanie pierwowzoru.

```
program ssim
character*2 lin
dimension sim(2,3,50),pro(50)
read ns                                       ;ns - ilosc podobienstw
pr=0.
do i=1,ns
  read sim(1,1,i),sim(1,2,i),sim(1,3,i) ;czytanie kolejnej
  read sim(2,1,i),sim(2,2,i),sim(2,3,i) ;macierzy podobienstwa
  pro(i)=abs(sim(1,1,i)*sim(2,2,i)-sim(2,1,i)*sim(1,2,i))+.03
  pr=pr+pro(i)
enddo
p=0.
do i=1,ns
  p=p+pro(i)                                  ;obliczanie prawdopodobienstw
  pro(i)=p/pr                                 ;wyboru przeksztalcen
enddo
read xl,xr,yd,yu                              ;granice obrazu
read iter                                     ;ilosc iteracji
p=0.
initgraph(xl,xr,yl,yu)                        ;okno graficzne o danych wymiarach
x=0.                                          ;punkt
y=0.                                          ;startowy
do ii=1,iter
  p=ran(idum)
  do i=1,ns
    k=i
    if p<pro(i) exit                          ;losowanie przeksztalcenia
  enddo
  xn=x*sim(1,1,k)+y*sim(1,2,k)+sim(1,3,k) ;afiniczne przeksztalcanie
  yn=x*sim(2,1,k)+y*sim(2,2,k)+sim(2,3,k) ;punktu
  x=xn
  y=yn
  if ii>20 setpixel(x,y)                      ;rysowanie punktu
enddo
do
until keypressed
endgraphic                                    ;wyjscie z trybu graficznego
end
```

Fakt ten ma podstawowe znaczenie dla zastosowań praktycznych twierdzenia o kolażu. Wystarczy bowiem stwierdzić, że zarówno drobne nieścisłości w pokryciu zbioru A jego obrazami, jak i zaokrąglenia parametrów uzyskanych przekształceń nie spowodują katastrofalnych różnic między oryginałem rysunku a jego odtworzeniem, co widać na zaprezentowanym na okładce portrecie indiańskiej dziewczyny z Andów. Przy zapisie tego obrazu, jak i przy innych przetwarzanych zdjęciach nie ograniczano się, oczywiście, do jednej formy: obrazy oryginalne rozłożono na elementy składowe (drzewa, góry czy bryzgi fal) kodując i odtwarzając każdy z nich z osobna.

Trzeba na zakończenie stwierdzić, że przedstawiony tu optymistyczny obraz problemu oszczędnego kodowania obrazów za pomocą teorii fraktali kryje pewną istotną lukę. O ile mianowicie analizę obrazu tak w istocie swej prostego, jak liść paproci czy dywan Sierpińskiego, można przeprowadzić nawet bez komputera, o tyle obrazy bardziej skomplikowane – takie, jak ten z okładki – wymagają już wyrafinowanej techniki interakcyjnej, gdzie komputer podsuwa pewne propozycje weryfikowane przez człowieka i na odwrót. Twórcy opisanej metody: Michael Barnsley, Stephen Demko, Laurie Hodges i Bruce Naylor z Georgia Institute of Technology, zastrzegli prawa patentowe do metod analizy obrazu i rozwijają je we własnym przedsiębiorstwie korzystając przy tym z funduszy Ministerstwa Obrony USA.



```
4,
.24,.007,.0,
-.007,.015,.0,
.22,.33,.54,
-.36,.1,.0,
.14,.36,1.4,
.38,-.1,.0,
.8,-.1,1.6,
.1,.8,.0,
0.,7.,-2.6,3.5,
```

36000 punktów

```
4,
.24,.0,.0,
.0,.015,.0,
.22,.23,.54,
-.26,.2,.0,
.24,.26,1.4,
.28,-.2,.0,
.8,-.1,1.6,
.1,.8,.0,
0.,9.,-2.1,3.3,
```

36000 punktów