Skacząc po stożkowych

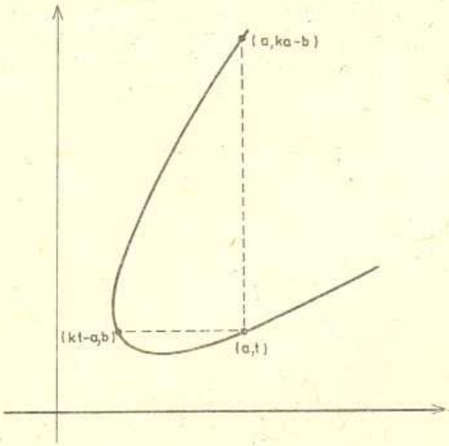
Krzysztof OLESZKIEWICZ

Jest to praca złotego medalisty z konkursu UPM z 1989 r.

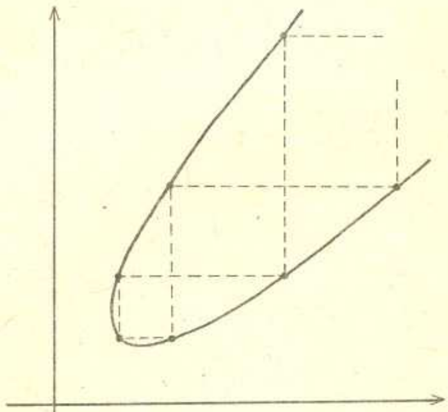
Do napisania tej pracy zainspirowało mnie zadanie nr 6 z XXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej:

jeśli liczby x, y i $\frac{x^2+y^2}{xy+1}$ są naturalne, to $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy+1}}$ też jest liczbą naturalną.

Rozważmy wielomian dwóch zmiennych $W(x,y) = x^2 - kxy + y^2 - k$, gdzie k jest pewną ustaloną liczbą całkowitą. Ze wzoru na sumę pierwiastków trójmianu kwadratowego (gdy potraktujemy W jako wielomian jednej ze zmiennych) wynika, że jeśli punkt (a,b) należy do wykresu stożkowej o równaniu $W(x,y)=0$, należą doń także punkty $(kb-a,b)$ i $(a,ka-b)$, które dalej będą nazywane śladami punktu (a,b) (rys. 1). Istotne jest, że jeśli (a,b) jest punktem kratowym (tzn. gdy a i b są liczbami całkowitymi), jego ślady też są punktami kratowymi. Na stożkowej możemy więc utworzyć trajektorię złożoną z punktów kratowych (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Wynik ten może służyć do znalezienia wszystkich punktów kratowych na naszej stożkowej. Rozpatrzmy w tym celu trzy przypadki:

I. $|k| \le 2$

Jak łatwo sprawdzić, dla $k \in \{-2,-1,2\}$ do stożkowej nie należy żaden punkt kratowy; przy $k=0$ jedynym rozwiązaniem jest $(0,0)$, a dla $k=1$ istnieją cztery punkty kratowe należące do stożkowej: $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ i $(-1,0)$.

II. $k \ge 3$

Jeśli na stożkowej leży punkt kratowy (a,b), to do jego trajektorii należy pewien punkt kratowy (c,d) taki, że $cd \le 0$. By tego dowieść, wprowadźmy funkcję $f\big((x,y)\big) = x+y$. Albo $ab \le 0$ i wówczas możemy przyjąć po prostu $(c,d)=(a,b)$, albo $ab>0$, czyli $a,\ b>0$ lub $a,\ b<0$. Rozważymy tylko pierwszy z tych przypadków – dowód drugiego przebiega analogicznie.

Ponieważ $k \ge 3$ i $W(a,b)=0$, otrzymujemy ciąg równoważnych nierówności:

$$\frac{4-k^2}{k}(a^2+b^2) < 0 < k^2+4,$$

$$\left(\frac{k^2+4}{k} - 2k\right)(a^2+b^2) < k^2+4,$$

$$(k^2+4)\left(\frac{a^2+b^2}{k} - 1\right) < 2k(a^2+b^2),$$

$$(k^2+4)ab - 2k(a^2+b^2) < 0,$$

$$(kb-2a)(ka-2b) < 0,$$

$$\Big(f\big((kb-a,b)\big) - f\big((a,b)\big)\Big)\cdot\Big(f\big((a,ka-b)\big) - f\big((a,b)\big)\Big) < 0.$$

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

OPÓR W TEMPERATURZE MILIONA STOPNI

Pomiar wartości oporu elektrycznego metalu w temperaturze miliona stopni wydaje się czymś absolutnie niemożliwym. Przecież wszystkie znane materiały w dużo niższych temperaturach przechodzą najpierw do fazy ciekłej, a później gazowej. A jednak pomysłowość fizyków z laboratorium firmy Bell w Murray Hill (USA, stan New Jersey) umożliwiła wykonanie takich pomiarów. Badanym obiektem była napylona na szkle cienka folia aluminiowa. Użytym narzędziem badawczym był laser impulsowy wysyłający impulsy promieniowania ultrafioletowego o długości fali 308 nanometrów, o niezwykle krótkim czasie trwania (mniejszym od pół pikosekundy) i energii dochodzącej do 7 milidżuli w impulsie. Światło lasera było ogniskowane na próbce, na powierzchni wynoszącej około 10^{-5} cm^2, co prowadziło do osiągnięcia bardzo dużej gęstości mocy promieniowania dochodzącej do około 10^{15} wata na centymetr kwadratowy. Folia metalowa była przesuwana tak szybko, że każdy impuls padał w nowym "chłodnym" miejscu. Bardzo krótki czas trwania impulsu i odpowiedni dobór długości fali promieniowania powodował chwilowe podgrzanie gazu elektronowego w metalu. Sieć krystaliczna nie rozgrzewała się i nie rozszerzała się w trakcie eksperymentu. Pomiar zależności współczynnika odbicia promieniowania od mocy lasera umożliwił wyznaczenie zmian oporności badanego materiału. Natomiast obserwacja efektu Dopplera, czyli zmian długości fali odbitego promieniowania, umożliwiła znalezienie wartości temperatury badanego gazu elektronowego, również w zależności od mocy lasera. W eksperymencie stwierdzono, że oporność aluminium wzrasta z temperaturą ponad stokrotnie (w stosunku do temperatury pokojowej) i osiąga nasycenie przy wartości około **200 μΩ cm** (mikroomocentymetrów) w temperaturze wynoszącej około pół miliona stopni. Przy dalszym znacznym wzroście temperatury obserwowano jedynie spadek oporności o około 20%. Średnią drogę swobodną elektronu (czyli drogę przebywaną między kolejnymi zderzeniami) w obszarze maksymalnego oporu oszacowano na około 3Å. Odpowiada to w przybliżeniu odległości pomiędzy atomami. Dla porównania, w bardzo niskich temperaturach średnia droga swobodna elektronu w metalach może wynosić kilka centymetrów. Wydaje się więc, że otrzymano w ten sposób maksymalną możliwą wartość oporności aluminium. Spadek oporu przy dalszym wzroście temperatury został zinterpretowany jako wynik pewnego wzrostu koncentracji swobodnych elektronów w aluminium przy tak wysokiej temperaturze.

Zatem w jednym ze śladów f przybiera większą, a w drugim – mniejszą wartość niż w punkcie (a, b). Można więc tak dobierać kolejne punkty z trajektorii (a, b), by wartość funkcji f malała. Atoli f przyjmuje tylko wartości będące liczbami całkowitymi, zatem w trajektorii od pewnego momentu (jeszcze $a,\ b > 0$) pojawią się punkty nie mające obu współrzędnych dodatnich. Ten z nich, który „pojawi się" jako pierwszy, jest szukanym punktem (c, d), gdyż ze względu na sposób tworzenia śladów musi mieć jedną współrzędną dodatnią. Stąd $cd \leq 0$. Ponadto $c^2 - kcd + d^2 - k = 0$, czyli

$$(*) \qquad c^2 + d^2 = k(cd + 1)\,.$$

Gdyby było $cd \leq -1$, to $0 \leq c^2 + d^2 \leq 0$, zatem $c = d = 0$, czyli $cd = 0$, co prowadzi do sprzeczności. Musi więc być $cd = 0$, czyli $c = 0$ lub $d = 0$. Załóżmy bez zmniejszenia ogólności, że to $c = 0$. Wówczas ze wzoru $(*)$ wynika, że musi być $k = d^2$.
Jeśli zatem $k \geq 3$ i $\sqrt{k} \notin \mathbf{N}$, na stożkowej nie ma punktów kratowych. Gdy zaś $\sqrt{k} \in \mathbf{N}$, z jednoznaczności sposobu tworzenia trajektorii wynika, że wszystkie rozwiązania należą do trajektorii punktów $(0, \sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, 0)$, $(0, -\sqrt{k})$, $(-\sqrt{k}, 0)$.

III. $k \leq -3$

Jeśli na stożkowej leży punkt kratowy (a, b), to do jego trajektorii należy pewien punkt kratowy (c, d) taki, że $cd \geq -3$. Aby tego dowieść, wprowadźmy funkcję $g\big((x, y)\big) = x - y$. Gdyby było $ab \geq -3$, moglibyśmy przyjąć $(c, d) = (a, b)$. Pozostaje więc przypadek, gdy $ab < -3$, wtedy $ab < -2 - \frac{8}{5} \leq -2 - \frac{8}{k^2-4} = \frac{2k^2}{4-k^2}$. Stąd

$$2k \cdot k(ab + 1) < (k^2 + 4)ab\,,$$

a ponieważ $W(a, b) = 0$, więc

$$2k(a^2 + b^2) < (k^2 + 4)ab\,,$$

następnie

$$(2a - kb) \cdot (ka - 2b) < 0$$

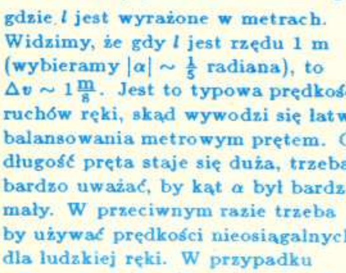
i ostatecznie

$$\Big(g\big((a, b)\big) - g\big((kb - a, b)\big)\Big) \cdot \Big(g\big((a, b)\big) - g\big((a, ka - b)\big)\Big) < 0\,.$$

Zatem jeśli $ab < -3$, w jednym ze śladów g przybiera większą, a w drugim – mniejszą wartość niż w punkcie (a, b). Załóżmy, że $g\big((a, b)\big) < 0$ (w przeciwnym przypadku dowód jest analogiczny do przedstawionego poniżej). Wówczas, gdyby było $xy < -3$ dla każdego punktu (x, y), z trajektorii punktu (a, b) można by tak dobierać kolejne punkty trajektorii, aby wartość funkcji g rosła. Skoro jednak wartości g są liczbami całkowitymi, w którymś punkcie trajektorii wartość g stałaby się dodatnia. Ponadto ponieważ $W(x, y) = 0$, więc $xy = -\frac{x^2+y^2+(-k)}{-k} < 0$, czyli każdy punkt stożkowej leży w II lub IV ćwiartce układu współrzędnych. Ale funkcja g przyjmuje w II ćwiartce tylko wartości ujemne, a w IV ćwiartce tylko dodatnie, ze sposobu zaś określania śladów wynika, że trajektoria może leżeć tylko w jednej z tych ćwiartek (rys. 3 – nie mogą „za jednym zamachem" zmienić się znaki obu współrzędnych). Zatem znak wartości funkcji g musi być dla całej trajektorii stały. Tu jednak dochodzimy do sprzeczności, gdyż $g\big((a, b)\big) < 0$, a jak wcześniej wykazaliśmy, gdyby dla każdego punktu (x, y) trajektorii było $xy < -3$, istniałby w trajektorii punktu (a, b) punkt, w którym g przyjmowałaby znak dodatni. Więc do trajektorii tej musi należeć szukany punkt kratowy (c, d) taki, że $0 > cd \geq -3$, czyli $-1 \geq cd \geq -3$. Ponieważ $cd \neq -1$ (byłoby wówczas $c^2 + d^2 = 0$ stąd $c = d = 0$ i $cd = 0$), więc $cd = -2$ lub $cd = -3$ skąd $(c, d) \in \big\{(1, -2), (-1, 2), (-2, 1), (2, -1), (1, -3), (-1, 3), (-3, 1), (3, -1)\big\}$. Jak łatwo sprawdzić, punkty te należą do stożkowej tylko wtedy, gdy $k = -5$. Gdy $k \leq -3$ i $k \neq -5$, na stożkowej nie ma punktów kratowych, a gdy $k = -5$, wszystkie rozwiązania należą do trajektorii wypisanych powyżej ośmiu punktów.

Zajmowałem się także nieco ogólniejszą postacią wielomianu $W(x, y)$. Wydaje mi się jednak, że przedstawiony problem wyraźnie ilustruje główną myśl mej pracy – wyszukiwanie na płaszczyźnie obszarów (zawierających skończenie wiele bądź nawet nieskończenie wiele, ale za to regularnie rozmieszczonych, punktów kratowych) takich, by przechodziły przez nie trajektorie wszystkich punktów kratowych należących do stożkowej. W rozważanym tu zagadnieniu takimi obszarami byłyby zbiory $\big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ xy = 0\big\}$ (dla $k \geq 3$) i $\big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ -2 \geq xy \geq -3\big\}$ (dla $k \leq -3$).

A dlaczego *Skacząc po stożkowych*? Żywię cichą nadzieję, iż widać to na obrazkach...



Rys. 3

Rozwiązanie zadania F 289.
Niech α oznacza kąt odchylenia pręta od pionu. Gdybyśmy nie poruszali ręką, na której oparty jest pręt, to jego energia wynosiłaby

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 + mg\frac{l}{2}(\cos\alpha - 1)\,,$$

gdzie $I = \frac{1}{3}ml^2$ oznacza moment bezwładności pręta względem punktu podparcia, $\dot{\alpha}$ jest prędkością kątową, a m masą pręta. Zwykle w opisanej sytuacji prędkość kątowa dla $\alpha = 0$ jest niemal zerowa. Wówczas $E = 0$ i ograniczając się do małych kątów ($\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \ldots$) znajdziemy

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}\,|\alpha|\,.$$

Próbując przywrócić pręt do pionu poruszamy ręką w poziomie. Jeśli robimy to z przyspieszeniem a, to na pręt działa siła bezwładności ma zaczepiona w środku masy. Niech ruch trwa przez czas Δt. Wówczas moment pędu pręta zmieni się o

$$\Delta L = \frac{l}{2}ma \cdot \Delta t = \frac{1}{2}ml \cdot \Delta v\,,$$

gdzie Δv jest zmianą prędkości ręki. Aby przywrócić pręt do pionu, ΔL musi być równe podwojonemu momentowi pędu pręta

$$\Delta L = 2L = 2 \cdot \frac{1}{3}ml^2\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{l}}\,ml^2|\alpha|\,,$$

a więc

$$\Delta v = 2\sqrt{\frac{2}{3}gl} \cdot |\alpha| \approx 5\sqrt{l}\,|\alpha|\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,$$

gdzie l jest wyrażone w metrach. Widzimy, że gdy l jest rzędu 1 m (wybieramy $|\alpha| \sim \frac{1}{5}$ radiana), to $\Delta v \sim 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Jest to typowa prędkość ruchów ręki, skąd wywodzi się łatwość balansowania metrowym prętem. Gdy długość pręta staje się duża, trzeba bardzo uważać, by kąt α był bardzo mały. W przeciwnym razie trzeba by używać prędkości nieosiągalnych dla ludzkiej ręki. W przypadku „długopisu" ($l \sim 10$ cm) trudność polega na precyzyjnym doborze Δv. Ponieważ jest ono teraz bardzo małe, łatwo nadać ręce zbyt dużą prędkość i przerzucić długopis na drugą stronę (ze znacznie większą energią). Trzeba również działać znacznie szybciej – typowy czas, w którym musimy się zmieścić, spełnia warunek:

$$\Delta t \ll \sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}\,.$$